「電磁気学」第 5 章問題解答

5－1　ドリル問題

１．

式５−１より，$F = lIB = 2\times 100\times 10 = 2\times 10^3$ N　（答）

２．

式５−３を使って，$N = l^2 IB\cos\theta = 0.2^2\times 2\times 1\times\cos\theta = 0.08\cos\theta$ [Nm]

（答）　$\theta = 0$ で $N = 0.08$ Nm，$\theta = 45^{\circ}$ で $N = 0.08/\sqrt{2} = 0.057$ Nm，

$\theta = 90^{\circ}$ で $N = 0$ Nm

３．

式５−６を使って，$\phi = BS\cos\theta = 0.1\times 0.1^2\times\cos\theta = (\cos\theta)\times 10^{-3}$ [Wb]。この式に θ の値を代入して求める。

（答）　$\theta = 0$ で $\phi = 10^{-3}$Wb，$\theta = 45^{\circ}$ で $\phi = 7.1\times 10^{-4}$Wb，$\theta = 90^{\circ}$ で $\phi = 0$Wb，

$\theta = 150^{\circ}$ で $\phi = -8.7\times 10^{-4}$Wb

４．

磁束密度の法線ベクトル成分が回路を縁とする平面の法線ベクトルの方向と逆向きである。

５．

回路の法線ベクトルの向きを磁束密度の向きと一致するように定義すると、

$\phi = \int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS = BS = \pi a^2 B$ [Wb] である。（答）

６．

円筒形で面積分をすると, 円筒形の側面では，面の法線方向と磁束密度は直交するから，

$\phi = \int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS = \pi a^2 B + 0\times 2\pi ah = \pi a^2 B$ [Wb] となり、５．と同じ結果が得られる。（答）

７．

磁束は時間変化しないから、磁束の時間微分はゼロ。起電力は生じない。（答）

８．

式５−５より，$V_e = -N\dfrac{d\phi}{dt} = -20\times\dfrac{d(0.1t + 0.05t^2)}{dt} = -(2+2t)$ [V] である。$t = 2$ s では、

$V_e = -(2+2\times 2) = -6$ V。磁束の増加を妨げる向きに6 Vの起電力が生じる。(答)

９．

誘導起電力は$V_e = -0.1\times 300\cos(300t) = -30\cos(300t)$ [V]である。時間を横軸、縦軸に磁束と起電力を取って、時間変化のようすを描けばよい。

10.

$\phi = 0.05\times\pi\times(0.1)^2 + 0.1\times\pi\times[(0.2)^2-(0.1)^2] \approx 0.011$ [Wb]　(答)

５－２　ドリル問題

１．

$$V_e = -\frac{d(Bl^2)}{dt} = -B_0 l^2\omega\cos\omega t \text{ [V]}$$　(答)

２．

最大値は$B_0 l^2\omega = 0.3\times 0.2^2\times 300 = 3.6$ V　(答)

３．

回路を貫く磁束は$Bl^2\cos\theta$であるから、$V_e = -B_0 l^2\cos\theta\times\omega\cos\omega t$。

最大値は$B_0 l^2\omega\cos\theta = 0.3\times 0.2^2\times 300\times\cos(\pi/4) = 2.5$ V　(答)

４．

式５−２１から$|V_e| = Blv = 1.5\times 2\times(40\times 10^3/3600) = 33$ V　(答)

５．

式５−２３から$V_e = -v[B(x+L_x) - B(x)]L_y = -v\left(\frac{A}{x+L_x} - \frac{A}{x}\right)L_y = \frac{vAL_xL_y}{x(x+L_x)}$ [V]　(答)

６．

電界の大きさは$|E| = |\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}| = vB\sin\theta = 10\times 1.5\times\sin(\pi/2) = 15$ V/m　(答)

７．

磁束密度は一様であるから、回路を貫く磁束の時間変化はない。したがって、誘導起電力

はゼロ。（答）

８．

回路を貫く磁束は$\phi = BS\cos\omega t$。これから、$|V_e| = BS\omega\sin\omega t$となるから、誘導起電力の最大値は$BS\omega = 0.2\times 0.1^2 \times 350 = 0.7\ \mathrm{V}$　（答）

９．

電荷の速度がゼロのとき，ローレンツ力はゼロ。電荷が導線中を動いている場合もその速度の向きは回路の接線方向だから，発生するローレンツ力は導線に沿った方向とは直角。したがって，導線に沿った方向のローレンツ力は常にゼロである。（答）

10.

式５−30 から導線に沿った方向のローレンツ力がゼロであるから、この方向の電界成分はゼロ。したがって、誘導起電力は生じない。（答）

５－３　ドリル問題

１．

式５−３４より回路に沿って電界を線積分すると誘導起電力が得られる。

$V_e = \int_a^b Eds + \int_b^c Eds + \int_c^d Eds + \int_d^a Eds = 4El$ となる。（答）

２．

$V_e = 4\times 10\times 0.5 = 20\ \mathrm{V}$　（答）

３．

$V_e = E\times(2\pi r)$ より導体内の電界は

$E = \dfrac{V_e}{2\pi r} = \dfrac{10}{2\times 3.14\times 0.2} \approx 8.0\ \mathrm{V/m}$　(答)

４．

式５−35 より $2\pi rE = -\dfrac{dB}{dt}\pi r^2$ の関係が得られる。これから $E = \dfrac{B_0\omega r\sin\omega t}{2}$ である。(答)

５．

導体を５回巻いてあることを考慮して、前問の結果を使うと電界は

$$E=\frac{5\times0.5\times300\times0.2\times\sin(300t)}{2}=75\sin(300t)\ [\mathrm{V/m}]$$ で時間変化する。(答)

６.

磁束密度は z 方向を向いているから，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ より y 方向に $E_y=-vB=-vAx$ の電界が生じている。回路に沿った方向の電界の値は，x 軸に平行な辺ではゼロである。y 軸に平行な辺では、$-vAx$ と $-vA(x+L)$ である。（答）

７.

$$E=-\frac{r}{2}\frac{d}{dt}(0.05t)=-\frac{0.2\times0.05}{2}=-0.005\ \mathrm{V/m}\quad(答)$$

８.

$t=0$ で $E=-\dfrac{\mu_0 nI_0\omega a^2}{2r}$，$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ で $E=0$，$t=\dfrac{\pi}{\omega}$ で $E=\dfrac{\mu_0 nI_0\omega a^2}{2r}$ である。これらの結果を使えばよい。縦軸に $E/(\dfrac{\mu_0 nI_0\omega a^2}{2})$，横軸に r をとれば，誘導電界の r 依存性を容易にグラフに表すことができる。

９.

$r>a$ では，$2\pi rE=-\dfrac{\partial B}{\partial t}\pi r^2$ の関係が得られる。これより，

$$E=-\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{\mu_0 nI_0\omega r}{2}\cos\omega t$$ となる。（答）

10. $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\dfrac{\partial E_z(y)}{\partial y}\boldsymbol{e}_x=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ より $\dfrac{\partial E_z}{\partial y}=-\dfrac{\partial B_x}{\partial t}$ (答)

５－４　ドリル問題

１.

式５−68 に数値を代入して、$L=4\pi\times10^{-7}\times500^2\times0.5\times0.05\approx7.85\times10^{-3}\mathrm{H}$ （答）

２.

式５−６８の μ_0 を $5000\mu_0$ にすればよいから，$L=5000\times7.85\times10^{-3}\approx39.3\ \mathrm{H}$ （答）

３．（この問題は第３刷以降では削除しました。第１，２刷のみ掲載）

この問題では，導線の太さを考慮する必要がある。導線の断面を半径bの円であるとする。電流はこの断面を一様な電流密度$J=\dfrac{I}{\pi b^2}$で流れている。式５−１０と式４−６１で導入したベクトルポテンシャルを使って，導体内に取った閉曲線c_1を貫く磁束ϕ_1を求めると，

$\phi_1=\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS_1=\int \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS_1=\int_{c_1}\mathbf{A}(\mathbf{R}_1)\cdot d\mathbf{s}_1$である。$\mathbf{A}(\mathbf{R}_1)$は，閉曲線$c_1$上の点$\mathbf{R}_1$でのベクトルポテンシャルである。電流密度が導線の断面積D_2に一様に分布しているとすると，式４−６３から$\mathbf{A}(\mathbf{R}_1)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{\pi b^2}\int_{D_2}dD_2\int_{c_2}\dfrac{d\mathbf{s}_2}{|\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2|}$である。したがって，閉曲線$c_1$を貫く磁束は$\phi_1=\int_{c_1}\mathbf{A}(\mathbf{R}_1)\cdot d\mathbf{s}_1=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{\pi b^2}\int_{D_2}dD_2\iint_{c_1c_2}\dfrac{d\mathbf{s}_1\cdot d\mathbf{s}_2}{|\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2|}$である。この式を断面について平均すれば，回路の導線を貫く磁束ϕが得られる。したがって，自己インダクタンスは

$L=\dfrac{\phi}{I}=\dfrac{1}{I}\dfrac{1}{\pi b^2}\int_{D_1}\phi_1 dD_1=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{1}{(\pi b^2)^2}\int_{D_1}dD_1\int_{D_2}dD_2\iint_{c_1c_2}\dfrac{d\mathbf{s}_1\cdot d\mathbf{s}_2}{|\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2|}$となる。導体断面の中心からの距離$r$と角度$\theta$および導線方向のふれ角$\varphi$使って，位置ベクトル$\mathbf{R}_1$を表すと，

$\mathbf{R}_1=((a+r_1\cos\theta_1)\cos\varphi_1,\ (a+r_1\cos\theta_1)\sin\varphi_1,\ r_1\sin\theta_1)$である。$\mathbf{R}_2$も同様である。この座標を使うと$dD_1=r_1d\theta_1dr_1$，$dD_2=r_2d\theta_2dr_2$である。また，

$l_1=a+r_1\cos\theta_1, l_2=a+r_2\cos\theta_2$で$l_1$と$l_2$を定義すると$d\mathbf{s}_1\cdot d\mathbf{s}_2=\cos(\varphi_1-\varphi_2)l_1d\varphi_1l_2d\varphi_2$である。以上から，自己インダクタンスを与える式は

$$L=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{(\pi b^2)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{b}\int_0^{2\pi}\int_0^{b}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)l_1d\varphi_1l_2d\varphi_2r_1dr_1d\theta_1r_2dr_2d\theta_2}{\sqrt{l_1{}^2+l_2{}^2-2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+z^2}}$$

となる。ここで、$z=r_1\sin\theta_1-r_2\sin\theta_2$である。変数$\varphi_1$と$\varphi_2$を$\varphi=\varphi_1-\varphi_2$と$\varphi_2$に変数変換すると，$\varphi_2$に関する積分は実行できて，$2\pi$となる。したがって，

$$L=\frac{\mu_0}{2}\frac{1}{(\pi b^2)^2}\int_0^{b}\int_0^{2\pi}\int_0^{b}\int_0^{2\pi}[\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{l_1{}^2+l_2{}^2-2l_1l_2\cos\varphi+z^2}}d\varphi]\,l_1l_2r_1dr_1d\theta_1r_2dr_2d\theta_2$$

である。この式を数値積分などで計算すれば自己インダクタンスの値を求めることができる。(答)

３．（第１，２刷では４．）

式５−63から　$M=\dfrac{\pi\mu r_2{}^2}{2r_1}=\dfrac{5000\pi\mu r_2{}^2}{2r_1}$ [H]である。(答)

４．（第１，２刷では５．）

$\phi_{12}=M_{12}I_2, \phi_{21}=M_{21}I_1, M_{12}=M_{21}=M$より，$\phi_{12}=MI_2=\dfrac{5000\pi\mu r_2{}^2}{2r_1}I_2$　(答)

５．（第１，２刷では６．）

$V_2 = -\dfrac{N_2}{N_1}V$ より $\dfrac{100}{1000} = \dfrac{N_2}{N_1}$ となるから，$N_1 = 10N_2$ とすればよい。（答）

7. **（この問題は第３刷以降では削除しました。第１，２刷のみ掲載）**

導線の断面の半径を $b = 5$ [mm] としよう。この場合 $b << a$ である。この条件が成り立つ場合には，前問３の L を求める積分を初等関数で表すことができる。

まず φ に関する積分を実行しよう。変数 $u = (\varphi + \pi)$ を使うと，$\cos\varphi = 2\sin u - 1$ である。

$k^2 = \dfrac{4l_1l_2}{(l_1+l_2)^2 + z^2}$ を導入すると

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{{l_1}^2 + {l_2}^2 - 2l_1l_2\cos\varphi + z^2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{(l_1+l_2)^2 + z^2}}\left[\frac{2-k^2}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 u}du\right]$$

と書き直せる。ここで，$b << a$ の条件を使うと $(l_1+l_2)^2 + z^2 \approx 4a^2$ および $l_1 \approx l_2 \approx a$ であるから，k は１に近い。そこで $1 - k^2 = \varepsilon^2$ $(|\varepsilon|= 1)$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos^2 u + \varepsilon^2\sin^2 u}} \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{du}{\sqrt{\cos^2 u}} + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos^2 u + \varepsilon^2\sin^2 u}}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{du}{\cos u} + \int_0^{\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta}} \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{du}{\cos u} + \int_0^{\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta + \varepsilon^2}}$$

である。ここで，$\varepsilon = \delta = 1$，$\theta = \dfrac{\pi}{2} - u$ として，近似式 $\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$ を使った。この式の右辺の第１項の積分は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{du}{\cos u} = [\log\tan(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})]_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} = \log\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}) = \log[\cos\frac{\delta}{2} / \sin\frac{\delta}{2}] \approx \log\frac{2}{\delta}$$ となる。

第２項は $\displaystyle\int_0^{\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta + \varepsilon^2}} = [\log(\theta + \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2})]_0^{\delta} = \log\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \approx \log\frac{2\delta}{\varepsilon}$ となるから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} \approx \log\frac{2}{\delta} + \log\frac{2\delta}{\varepsilon} = \log\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} = \log\frac{8a}{\sqrt{(l_1-l_2)^2 + z^2}}$$ が得られる。また，

$k \approx 1$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 u}du \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 u}du = 1$ である。したがって，

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{l_1{}^2+l_2{}^2-2l_1l_2\cos\varphi+z^2}}\approx\frac{2}{a}[\log\frac{8a}{\sqrt{(l_1-l_2)^2+z^2}}-2]$$
$$=\frac{2}{a}[\log\frac{8a}{\sqrt{(r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}-2]$$

である。この結果をLの式に代入し，$l_1\approx l_2\approx a$を考慮すると，

$$L\approx\frac{\mu_0 a}{(\pi b^2)^2}\int_0^b\int_0^{2\pi}\int_0^b\int_0^{2\pi}[\log\frac{8a}{\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}-2]r_1dr_1d\theta_1r_2dr_2d\theta_2$$

$$=\frac{\mu_0 a}{(\pi b^2)^2}2\pi\int_0^b\int_0^b\{\int_0^{2\pi}[\log(8a)-2-\frac{1}{2}\log(r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos\theta)]d\theta\}r_1r_2dr_1dr_2$$

が得られる。ここで，$\theta=\theta_1-\theta_2$である。積分公式によると，$r_1\geq r_2$のとき

$J(r_1,r_2)\equiv\int_0^{2\pi}\log(r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos\theta)d\theta=4\pi\log r_1$である。積分領域を$r_1\geq r_2$を満たすように変更すると，

$$\int_0^b\int_0^b J(r_1,r_2)r_1dr_1r_2dr_2=2\int_0^b\int_0^{r_1}r_2dr_2J(r_1,r_2)r_1dr_1=8\pi\int_0^b\int_0^{r_1}r_2dr_2(\log r_1)r_1dr_1$$
$$=8\pi\int_0^b[\frac{1}{2}r_2{}^2]_0^{r_1}(\log r_1)r_1dr_1=4\pi\int_0^b(\log r_1)r_1{}^3dr_1=4\pi b^4(\frac{\log b}{4}-\frac{1}{16})$$

となる。ここで，積分公式$\int_0^b r^3\log r dr=b^4(\frac{\log b}{4}-\frac{1}{16})$を使った。したがって，

$L\approx\frac{\mu_0 a}{(\pi b^2)^2}2\pi\times[2\pi\frac{b^4}{4}(\log 8a-2)-\frac{1}{2}4\pi b^4(\frac{\log b}{4}-\frac{1}{16})]=\mu_0 a[\log\frac{8a}{b}-\frac{7}{4}]$の関係が得られる。すなわち，$b<<a$では，自己インダクタンスは$L\approx\mu_0 a[\log\frac{8a}{b}-\frac{7}{4}]$と表される。

得られた式に数値を代入すると，

$L\approx 4\pi\times10^{-7}\times0.2\times[\log(8\times0.2/0.005)-7/4]\approx1.0\times10^{-6}$ [H]となる。これから，磁界のエネルギーは$U=\frac{1}{2}LI^2\approx0.5\times1.0\times10^{-6}\times10^2=0.5\times10^{-4}$ [J]である。（答）

６．（第１，２刷では８．）

$$U=(\frac{1}{2}L_1+\frac{1}{2}L_2+M)I^2=(\frac{1}{2}\times0.1+\frac{1}{2}\times0.5+0.2)\times2^2=2\text{ J}$$ （答）

７．（第１，２刷では９．）

相互インダクタンスによって蓄えられたエネルギーは

$MI_1I_2=\frac{\mu_0\pi r_2{}^2}{2r_1}I_1I_2=\frac{4\pi\times10^{-7}\times\pi\times0.01^2}{2\times0.5}\times1\times3\approx1.2\times10^{-9}$ J である。

８．（第１，２刷では 10.）

直列接続であるから自己インダクタンスの和を取ればよい。合成インダクタンスは$2L$である。（答）

５－５　ドリル問題

１．

単位の関係は$[\mathrm{H}]=[\mathrm{J/A^2}]$，［Ω］＝［J/A^{2}s］であるから，［H/Ω］＝［(J/A^2)/(J/A^{2}s)］＝［s］となる。したがって，ＨとΩの比H/Ωは秒である。（答）

２．

$\dfrac{L}{R}=\dfrac{0.2}{3}\approx 0.067\ \mathrm{s}$　（答）

３．

スイッチを入れた瞬間の電流はオームの法則から$\dfrac{V}{R}=\dfrac{6}{3}=2\ \mathrm{A}$である。時刻$t=10\ \mathrm{s}$では，$I=I(0)\exp(-t/(L/R))=2\times\exp(-10/0.067)\approx 0.0$となる。すなわち，電流はゼロである。（答）

４．

直列接続であるから，合成インダクタンスは$0.4+0.1=0.5\ \mathrm{H}$である。（答）

５．

式５−９９より，並列接続したコイルの合成インピーダンスLは$\dfrac{1}{L}=\dfrac{1}{0.2}+\dfrac{1}{0.4}=7.5\ \mathrm{H}^{-1}$の関係を満たすから，$L\approx 0.13\ \mathrm{H}$が得られる。（答）

６．

単位の関係は$[\mathrm{F}]=[(\mathrm{As})^2/\mathrm{J}]$，$[\mathrm{H}]=[\mathrm{J/A^2}]$より$[\mathrm{FH}]=[(\mathrm{As})^2/\mathrm{J}]\times[\mathrm{J/A^2}]=[\mathrm{s}^2]$．したがって$[(\mathrm{HF})^{\frac{1}{2}}]=[\mathrm{s}]$である。すなわち，$\sqrt{LC}$は秒の単位を持つ。（答）

７．

式５−104 から，$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\dfrac{1}{\sqrt{10\times10^{-6}\times0.1}}=10^3\ \mathrm{s}^{-1}$である。（答）

8．

式５−106 から，最大電荷は$VC = 10\times5\times10^{-6} = 5\times10^{-5}$ C である。(答)

9．

$U = \frac{1}{2}CV^2 = 5\times10^{-6}\times10^2/2 = 2.5\times10^{-4}$ J　(答)

10.

$Q(t) = CV\sin\omega t = 5\times10^{-5}\sin(1000t)$ [C]，

$I(t) = \frac{dQ}{dt} = CV\omega\cos\omega t = 5\times10^{-2}\cos1000t$ [A] である。

これから，時間 t を横軸に，電荷と電流を縦軸にとってグラフを描けばよい。

5－6　ドリル問題

1．

$\dot{V} = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)} = V_0[\cos(\omega t+\alpha) + j\sin(\omega t+\alpha)]$ より

$\mathrm{Re}[\dot{V}] = V_0\cos(\omega t+\alpha)$　となり，式５−130 と一致する。(答)

2．

$\omega = 2\pi f$ より $\omega = 2\pi\times50 \approx 314$ rad/s である。(答)

3．

$\frac{V_0}{\sqrt{2}} = 110$ であるから最大電圧は$V_0 \approx 156$ V となる。(答)

4．

抵抗を流れる電流の実効値は10 A である。式５−129 より

$\overline{P} = \frac{I_0V_0}{2} = (\frac{I_0}{\sqrt{2}})(\frac{V_0}{\sqrt{2}}) = 100\times10 = 10^3$W である。(答)

5．

$\dot{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}$　(答)

６．

$$\tan\phi = -\frac{1}{\omega RC}$$ （答）

７．

電流の最大値は$\dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+(-\dfrac{1}{\omega C})^2}} = \dfrac{\sqrt{2}\times 110}{\sqrt{20^2+(\dfrac{1}{300\times 10\times 10^{-6}})^2}} \approx 0.47\ \mathrm{A}$ （答）

８．

$$Z = \sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{5^2+\left(300\times 5\times 10^{-3} - \frac{1}{300\times 5\times 10^{-6}}\right)} \approx 665\Omega$$ （答）

９．

$\tan\phi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \approx -\dfrac{665}{5} \approx -133$ より $\phi \approx -89.6^{\circ}$ （答）

10.

縦軸に虚数軸、横軸に実数軸をとる。前問９から，この座標軸の横軸に５Ω、縦軸の負の向きに665Ωをとって求めた点と座標軸の原点を結べばよい。

５－７　ドリル問題

１．

有効電力$=\sqrt{400^2-200^2} \approx 346\ \mathrm{W}$ （答）

２．

最大電流は$I_0 = \dfrac{V_0}{Z} = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = \dfrac{200}{\sqrt{50^2+(300\times 0.1)^2}} = \dfrac{200}{\sqrt{3400}} \approx 3.43\ \mathrm{A}$,

力率は$\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} \approx \dfrac{50}{58.3} \approx 0.857$,

消費電力は$\dfrac{I_0 V_0}{2}\cos\varphi \approx \dfrac{3.43\times 200}{2}\times 0.857 \approx 294\ \mathrm{W}$ （答）

３．

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega L})^2}} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + (\frac{1}{1000 \times 10 \times 10^{-6}})^2}} \approx 0.196$$ （答）

４．

$Z = \sqrt{50^2 + \left(300 \times 0.05\right)^2} \approx 52.2\Omega$　より，力率は $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} \approx \dfrac{50}{52.2} \approx 0.958,$

最大電圧は $V_0 = I_0 Z \approx 2 \times 52.2 \approx 104$ V である。

これらを使って，消費電力は

$\dfrac{I_0 V_0}{2}\cos\varphi \approx \dfrac{2 \times 104}{2} \times 0.958 \approx 100$ W となる。（答）

５．

L に流れる複素電流の振幅 $\dot{I}_{0L}$ および C を流れる複素電流の振幅 $\dot{I}_{0C}$ と回路の複素電流の振幅 $\dot{I}_0$ との間には，$\dot{I}_0 = \dot{I}_{0L} + \dot{I}_{0C}$ の関係がある。電源の複素電圧の振幅を $\dot{V}_0$ とすると，L や C に加わる複素電圧の振幅は $\dot{V}_0 - \dot{I}_0 R = \dot{V}_0 - \dot{I}_{0L}R - \dot{I}_{0C}R$ である。この複素電圧の振幅と L や C での複素電圧の振幅が等しいから，$\dot{V}_0 - \dot{I}_{0L}R - \dot{I}_{0C}R = j\omega L\dot{I}_{0L}$ と

$\dot{V}_0 - \dot{I}_{0L}R - \dot{I}_{0C}R = -j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}_{0C}$ の２つの式が得られる。これらの式を連立して解き，数値を代入すると，

$$\dot{I}_{0L} = \frac{\dot{V}_0}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} = \frac{1}{30 + 40j}\dot{V}_0$$

および

$$\dot{I}_{0C} = \frac{-\omega^2 LC\dot{V}_0}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} = \frac{-0.4}{30 + 40j}\dot{V}_0$$

となる。以上の結果から，電源電圧の実効値 40 V をつかって，L を流れる電流の実効値は $\dfrac{40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 0.8$ A，C の電流の実効値は $\dfrac{0.4 \times 40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 0.32$ A と計算される。（答）

６．

前問から

$$\dot{I}_{0L} = \frac{\dot{V}_0}{R-\omega^2 RLC + j\omega L} = \frac{R-\omega^2 RLC - j\omega L}{\left(R-\omega^2 RLC\right)^2 + (\omega L)^2}\dot{V}_0 = \frac{e^{-j\varphi}}{\sqrt{\left(R-\omega^2 RLC\right)^2 + (\omega L)^2}}\dot{V}_0$$

であるから，L に流れる電流の実効値は$(\frac{I_{0L}}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{(R-\omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2}}(\frac{V_0}{\sqrt{2}})$ である。

同様にして C の電流の実効値は$(\frac{I_{0C}}{\sqrt{2}}) = \frac{\omega^2 LC}{\sqrt{(R-\omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2}}(\frac{V_0}{\sqrt{2}})$ と得られる。

ω を変化させて$(\frac{I_{0L}}{\sqrt{2}}) = (\frac{I_{0C}}{\sqrt{2}})$ となったから，$\omega^2 = \frac{1}{LC}$ である。このときの複素電流の振幅は $\dot{I}_{0L} = \frac{\dot{V}_0}{R-\omega^2 RLC + j\omega L} = -j\frac{\dot{V}_0}{\omega L}$ および $\dot{I}_{0C} = \frac{-\omega^2 LC\dot{V}_0}{R-\omega^2 RLC + j\omega L} = j\frac{\dot{V}_0}{\omega L}$ となるから，

$\dot{I}_0 = \dot{I}_{0L} + \dot{I}_{0C} = 0$ である。すなわち抵抗を流れる電流はゼロとなる。（答）

７．

$t = 0$ で電源電圧 V_e は最大であるから，$V_e = V_0 \cos\omega t$ である。$V_e = RI_R$ の関係から，

$I_R = \frac{V_0}{R}\cos\omega t = 20\cos 1000t$ [A] である。一方，$I_L = I_{0L}\sin(\omega t + \alpha)$ を仮定すると，

$V_e = L\frac{dI_L}{dt}$ から $V_0 \cos\omega t = \omega L I_{0L}\cos(\omega t + \alpha)$ の関係が満たされる必要がある。これから.

$\alpha = 0$ および $I_{0L} = \frac{V_0}{\omega L}$ が得られる。すなわち，$I_L = \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t = 5\sin 1000t$ [A] である。

以上の式から、横軸に時間 t [s]，縦軸に I_R と I_L [A] を取ってグラフにすればよい。

８．

LCR 回路の共鳴角振動数は

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.5\times 1\times 10^{-6}}} \approx 1.41\times 10^3$ rad/s　である。（答）

９．

式 5−157 から $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2}} = \frac{V_0}{R} = \frac{150}{5} = 30$ A である。

また、力率は式 5−155 から，

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2}} = 1$$

である。これから消費電力は

$$\overline{P} = \frac{I_0 V_0}{2}\cos\varphi = \frac{150\times 30}{2} = 2250\ \mathrm{W}$$ である。(答)

10.

式 5−169 から回路のインピーダンスは

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(300\times 10^{-6} - \frac{1}{300\times 0.5}\right)^2}} \approx 5\Omega$$ である。(答)

5章　演習問題

１.

回路を貫く磁束 $\phi = B\pi r^2$，回路に生じる誘導起電力 $V_e = -\frac{d\phi}{dt}$, 流れる電流は $I = \frac{V_e}{R}$ であるから

$$I = -\frac{\pi r^2}{R}\frac{dB}{dt} = \frac{3.14\times 0.1^2}{5}\times 0.1\times 400\times \sin(400t) \approx 0.251\sin(400t)\ [\mathrm{A}]$$

となる。最大電流は 0.251 A である。(答)

２.

回路を貫く磁束 $\phi = BS = B_0 S\exp(-bt)$ であるから，回路に生じる誘導起電力は

$$V_e = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 Sb\exp(-bt)$$ である。(答)

３.

磁束密度は紙面に垂直である。$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ より，長さｂの辺に沿った方向の電界はゼロ，長さａの辺に沿った方向の電界は $E(r) = vB(r)$ と $E(r+b) = vB(r+b)$ である。電流がつくる磁束密度は $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ および $B(r+b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+b)}$ であるから，左側の長さａの辺での電界 $E(r) = v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, 右側の長さａの辺の電界 $E(r+b) = v\frac{\mu_0 I}{2\pi(r+b)}$ である。(答)

４.

回路に生じる誘導起電力は $V_e = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2\frac{dB}{dt} = \pi r^2 a$ である。回路に生じる電界を E と

すると，$2\pi rE = \pi r^2 a$ であるから $E = \dfrac{ra}{2}$ である。(答)

５．

ソレノイド内部の磁束密度は $B = n\mu_0 I$，したがって，ソレノイド内部の空間の磁界のエネルギー密度は $u = \dfrac{1}{2\mu_0}B^2 = \dfrac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 = \dfrac{1}{2}4\pi \times 10^{-7} \times 200^2 \times 5^2$ =0.628 J/m^3 である。(答)

６．

式 5−77 から二次側の起電力の大きさは $V_2 = \dfrac{N_2}{N_1}V_1$ で得られるから，

$V_2 = \dfrac{20}{200}\times 1000 = 100$ V である。(答)

７．

並列 LC 回路では，コンデンサの電荷は $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \alpha)$、電流は $I(t) = \dfrac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \alpha)$、角振動数は $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ である。$t = 0$ では，

$Q(0) = Q_0 \cos(\alpha) = 0$ および $I(0) = -\omega Q_0 \sin(\alpha)$ =2 A であるから，

$\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ と $Q_0 = \dfrac{2}{\omega} = 2\times\sqrt{0.2\times 10\times 10^{-6}} \approx 2.83\times 10^{-3}$ C が得られる。したがって，

$Q(t) = 2.83\times 10^{-3}\cos(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$ [C]，$I(t) = 2\sin(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$ [A] である。なお，

$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{0.2\times 10\times 10^{-6}}} = 707$ rad/s である。これらの式を使って，横軸に時間 t、縦軸に電荷 $Q(t)$ および電流 $I(t)$ をとって、グラフを描けばよい。

８．

回路を流れる電流とコンデンサの電荷の間には，$IR + \dfrac{Q}{C} = -L\dfrac{dI}{dt}$ の関係が成り立つ。

$I = \dfrac{dQ}{dt}$ の関係を使うと，電荷に対する微分方程式 $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = 0$ が得られる。この方程式を解くために，$Q \propto \mathrm{e}^{-zt}$ の時間依存性を仮定する。ここで，z は時間によらない定数である。これを微分方程式に代入すると $Lz^2 + Rz + \dfrac{1}{C} = 0$ の関係が得られる。この関係を満たす z は，$z = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$ である。

条件$\dfrac{4}{LC} >> (\dfrac{R}{L})^2$より，$\sqrt{R^2 - 4L/C} = L\sqrt{(\dfrac{R}{L})^2 - 4\dfrac{1}{LC}} \approx jL\sqrt{\dfrac{4}{LC}}$，ここで，$j = \sqrt{-1}$である。したがって, 解として，$\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\mathrm{e}^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}$と$\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\mathrm{e}^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}}$が得られる。微分方程式の一般解は，これら２つの解の線形結合であるから，$Q(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}(A\mathrm{e}^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}} + B\mathrm{e}^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}})$である。電荷$Q(t)$は実数であるから，定数$A$と$B$の間には$B = A^*$，すなわち，実数$a, \alpha$を使って，$A = a\mathrm{e}^{j\alpha}$および$B = a\mathrm{e}^{-j\alpha}$と表せる。これから，$Q(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + \alpha)$である。$t = 0$で$Q(0) = a\cos\alpha = Q_0$である。また，この値がコンデンサに蓄えられる電荷の最大値であるから，$\alpha = 0$である。したがって，$Q(t) = Q_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\dfrac{t}{\sqrt{LC}})$である。(答)

電流は電荷を時間微分して得られるから，

$$I(t) = -Q_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}[\frac{R}{2L}\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}}) + \frac{1}{\sqrt{LC}}\sin(\frac{t}{\sqrt{LC}})] \approx -Q_0\frac{1}{\sqrt{LC}}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\frac{t}{\sqrt{LC}})\ [\mathrm{A}]$$

となる。(答)

９.

$0 \le t < T$では，時刻tの電圧は$V(t) = \dfrac{2V_0}{T}t - V_0$と書ける。したがって，

$\overline{V^2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T V^2 dt = \dfrac{1}{T}(\dfrac{2V_0}{T})^2\int_0^T (t - \dfrac{T}{2})^2 dt$である。積分変数を$u = t - \dfrac{T}{2}$に選ぶと，

$\displaystyle\int_0^T (t - \frac{T}{2})^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2 du = \frac{1}{3}[(\frac{T}{2})^3 - (-\frac{T}{2})^3] = \frac{2}{3}(\frac{T}{2})^3$であるから，

$\overline{V^2} = \dfrac{1}{T}(\dfrac{2V_0}{T})^2\dfrac{2}{3}(\dfrac{T}{2})^3 = \dfrac{{V_0}^2}{3}$である。これから，実効値は$\sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\dfrac{{V_0}^2}{3}} = \dfrac{V_0}{\sqrt{3}}$となる。(答)

10.

式 5−149 より直列LCR回路を流れる電流は$I = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}}\cos(\omega t - \varphi)$である。

したがって，$\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$のとき電流の振幅が最大になる。最大の振幅にするには,

$L = \dfrac{1}{\omega^2 C} = \dfrac{1}{300^2 \times 3 \times 10^{-6}} = 3.70\ \mathrm{H}$に選べばよい。(答)

なお， L をこの値に選べば，回路を流れる電流の実効値は $\dfrac{1}{R}\dfrac{V_0}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{100}\times 100=1$ A である。

第５章　ワークシート問題

１．

円形コイルを貫く磁束は， θ の角度では $\phi = B\pi a^2 \sin\theta$ である。回転の速度は一定とすると，その角速度は $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{\theta}{T}$ である。 $\dfrac{d(\sin\theta)}{dt}=\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$ から，誘導起電力は

$V_e=-\dfrac{d\phi}{dt}=-\pi a^2 B\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}=-\pi a^2 B\cos\theta\cdot(\dfrac{\theta}{T})$ [V] となる。(答)

２．

正方形の回路の二辺が x 軸に平行，他の二辺が y 軸に平行である場合を考える。この場合には次のようになる。この回路が微小時間 dt の間に x 方向に vdt だけ移動する。したがって，この間に回路を貫く磁束の変化は $d\phi = b(x+a)avdt - bxavdt = ba^2vdt$ である。これから，回路に生じる誘導起電力は $V_e=-\dfrac{d\phi}{dt}=-bva^2$ [V] である。(答)

３．

導体棒から距離 r の位置の磁束密度はアンペールの法則から，$2\pi rB=\mu_0 I$ より求まる。すなわち，$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ である。この磁界中を導線が速度 v で動くと式５−３０から導線中に生じる電界は $E=vB=v\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ である。時刻 t での導線の速度は $v(t)=\mathrm{g}t$，導体棒からの距離は，$t=0$ で r_0 とすると．時刻 t では $r(t)=r_0-\dfrac{1}{2}gt^2$ である。したがって，

$E=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(r_0-gt^2/2)}gt$ [V/m] である。(答)

４．

ソレノイド内部にできる磁束密度は $B=n\mu_0 I$ である。したがって， $a<r$ のときは，円形コイルを貫く磁束は $\phi = BS = n\mu_0 I\pi a^2 = n\mu_0\pi a^2 I_0\dfrac{t}{T}$ である。これから，誘導起電力は

$V_e=-\dfrac{n\mu_0\pi a^2 I_0}{T}$， 円形回路の電界は $E=\dfrac{V_e}{2\pi r}=-\dfrac{n\mu_0 a^2 I_0}{2rT}$ [V/m] である。(答)

$a > r$のときは，円形コイルを貫く磁束は$\phi = n\mu_0 I\pi r^2 = n\mu_0\pi r^2 I_0 \dfrac{t}{T}$ である。したがって，誘導起電力は$V_e = -\dfrac{n\mu_0\pi r^2 I_0}{T}$，円形回路の電界は$E = \dfrac{V_e}{2\pi r} = -\dfrac{n\mu_0 r I_0}{2T}$ [V/m]である。(答)

５.

２つのコイルのエネルギーは$U = \dfrac{1}{2}L_1 {I_1}^2 + \dfrac{1}{2}L_2 {I_2}^2 + MI_1 I_2$ であるから、この式に値を代入すると$U = 5\times 1^2/2 + 2\times 2^2/2 + 0.5\times 1\times 2 = 7.5$ J である。(答)

６.

同軸ケーブルの中心軸から距離rの位置の磁束密度は$r < a$で$B = \dfrac{\mu I r}{2\pi a^2}$， $a < r$で$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ である。ここで，導体の透磁率をμとした。ケーブルの長さをlとする。

(1)　内側の導体円柱と外側の導体の間に同軸ケーブルの軸方向に平行に幅$b-a$、長さlの長方形の面を考える，電流Iがつくる磁束密度はこの長方形に垂直である。したがって，この長方形を貫く磁束は$\phi = \int_S BdS = \int_a^b \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} ldr = \dfrac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^b \dfrac{dr}{r} = \dfrac{\mu_0 Il}{2\pi}\log(\dfrac{b}{a})$ である。一方，導体円柱内の磁束は$\phi_0 = \int_0^a \dfrac{\mu I r}{2\pi a^2} ldr = \dfrac{\mu Il}{4\pi}$ である。これらの結果を使うと，ケーブル内の自己インダクタンスは$L = \dfrac{\phi + \phi_0}{I} = \dfrac{\mu_0 l}{2\pi} log(\dfrac{b}{a}) + \dfrac{\mu l}{4\pi}$ であることがわかる。単位長さ当たりの自己インダクタンスは$\dfrac{1}{2\pi}[\mu_0 \log(\dfrac{b}{a}) + \dfrac{\mu}{2}]$ である。(答)

(2)　ケーブル中に蓄えられるエネルギーは，(1)の結果を使って$U = \dfrac{1}{2}LI^2 = \dfrac{lI^2}{4\pi}[\mu_0\log(\dfrac{b}{a}) + \dfrac{\mu}{2}]$ [J]が得られる。これを単位長さ当たりのエネルギーに直すと$\dfrac{U}{l} = \dfrac{lI^2}{4\pi}[\mu_0\log(\dfrac{b}{a}) + \dfrac{\mu}{2}]$ である。(答)

７.

コンデンサの電荷の時間変化を記述する方程式は$L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + \dfrac{Q}{C} = 0$ である。すなわち，$\dfrac{d^2Q}{dt^2} = -\dfrac{1}{LC}Q$ である。時刻$t = 0$でコンデンサの電荷は最大値Q_0であるから， $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ とすると，方程式の解は$Q = Q_0\cos\omega t$ である。

(1)　$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-11} \times 2 \times 10^{-3}}} \approx 7.07 \times 10^{6}\ \mathrm{s^{-1}}$　（答）

(2)　$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin \omega t$ である。$Q_0 = CV = 10^{-11} \times 12 = 1.2 \times 10^{-10}\ \mathrm{C}$ であるから，電流の最大値は $\omega Q_0 = 7.07 \times 10^{6} \times 1.2 \times 10^{-10} \approx 8.48 \times 10^{-4}\ \mathrm{A}$ である。(答)

８.

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-9}}} \approx 3.16 \times 10^{6}\ \mathrm{Hz}$　$\Delta\omega = \frac{R}{L} = \frac{10}{20 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^{5}\ \mathrm{Hz}$

であるから，式 5−163 より $Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{3.16 \times 10^{6}}{5 \times 10^{5}} \approx 6.32$ である。(答)