「電磁気学」第６章　問題解答

６－１　ドリル問題

１.

電線に流れる電流は一様であるとする。この場合，電流密度の定義から，

$j = \dfrac{I}{S} = \dfrac{5}{\pi \times (0.002)^2} \approx 3.98 \times 10^5\ \mathrm{A/m^2}$ となる。（答）

２.

変位電流 I_D と変位電流密度ベクトル $\boldsymbol{j}_D$ の間には，$I_D = \int_S \boldsymbol{j}_D \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} dS$ の関係があるから，$\boldsymbol{j}_D = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ である。電界は $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t + \alpha)$ と書けるから，

$\boldsymbol{j}_D = \varepsilon_0 \omega \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)$ である。したがって，変位電流密度の最大値は

$\varepsilon_0 \omega E_0 = 8.85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 50 \times 0.1 \times 10^{-3} \approx 2.78 \times 10^{-13}\ \mathrm{A/m^2}$ となる。（答）

３.

式 6−17 から $I_D = \dfrac{dQ}{dt}$ であるから，コンデンサに流れ込む電流 I に I_D は等しい。

したがって，$I_D = 0.1\ \mathrm{A}$ である。（答）

４.

コンデンサの電荷は $Q = CV = CV_0 \sin(\omega t + \alpha)$ であると考えてよい。

$I_D = \dfrac{dQ}{dt} = \omega C V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ であるから，変位電流の最大値は

$\omega C V_0 = 2\pi \times 50 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 \approx 0.314\ \mathrm{A}$ である。（答）

５.

$Q = CV$ より，変位電流は

$I_D = C\dfrac{dV}{dt} = 5 \times 10^{-6} \times 10 \times \dfrac{1}{5} e^{-\frac{5}{5}} \approx 3.68 \times 10^{-6}\ \mathrm{A}$ である。（答）

６.

伝導電流密度の最大値は σE_0，変位電流密度の最大値は $\varepsilon \omega E_0$ 程度である。誘電率 ε は

真空中の誘電率ε_0程度であるから，変位電流I_Dと伝導電流Iの比は$\dfrac{I_D}{I} \approx \dfrac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}$となる。

銅のとき，$\dfrac{I_D}{I} \approx \dfrac{8.85 \times 10^{-12}}{6 \times 10^{7}} \omega \approx 1.5 \times 10^{-19} \omega$であるから，

50 Hzで$\dfrac{I_D}{I} \approx 1.5 \times 10^{-19} \times 2\pi \times 50 \approx 5 \times 10^{-17}$ （答）

10^{10} Hzで $\dfrac{I_D}{I} \approx 1.5 \times 10^{-19} \times 2\pi \times 10^{10} \approx 9 \times 10^{-9}$程度である。（答）

ガラスの場合は$\dfrac{I_D}{I} \approx \dfrac{8.85 \times 10^{-12}}{10^{-15}} \omega \approx 10^{4} \times \omega$であるから，

50 Hzで$\dfrac{I_D}{I} \approx 10^{4} \times 2\pi \times 50 \approx 3 \times 10^{6}$ （答）

10^{10} Hzで$\dfrac{I_D}{I} \approx 10^{4} \times 2\pi \times 10^{10} \approx 6 \times 10^{14}$である。（答）

7．

通常使われる電線は銅等の金属である。したがって，普通の交流では，６．の結果から，$\dfrac{I_D}{I} \approx 10^{-16}$程度である。変位電流の効果は無視できる。（答）

8．

電界の方向は，棒の長さ方向を向いている場合を考える。変位電流密度はそれがつくる磁束密度と$\int_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu \int_S \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} dS$の関係がある。閉曲線$c$を導体断面の中心から半径$r$の円に選ぶと，$r \le a$では，$2\pi r B = \mu \pi r^2 \dfrac{\partial D}{\partial t} = \mu \pi r^2 \omega \varepsilon E_0 \cos \omega t$である。

すなわち，$B = \dfrac{1}{2} \mu \varepsilon r \omega E_0 \cos \omega t$である。（答）

$r > a$では，$2\pi r B = \mu \pi a^2 \dfrac{\partial D}{\partial t} = \mu \pi a^2 \omega \varepsilon E_0 \cos \omega t$より，

$B = \dfrac{1}{2r} \mu \varepsilon a^2 \omega E_0 \cos \omega t$である。（答）

ここで，εとμは導体の誘電率と透磁率である。

9．

電極板間の空間では，$\int_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \int_S \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} dS$が成り立つから，

$2\pi r B(r,t) = \mu_0 \pi r^2 \dfrac{\partial D(r,t)}{\partial t}$である。変位電流密度$\dfrac{\partial D(r,t)}{\partial t}$は場所によらず一様で，$\dfrac{I(t)}{\pi a^2}$で

あるから， $B(r,t)=\dfrac{\mu_0 r}{2\pi a^2}I(t)$ が得られる。（答）

10.

（答） x 成分は $\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=-\dfrac{\partial B_x}{\partial t}$， y 成分は $\dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\dfrac{\partial B_y}{\partial t}$，

z 成分は $\dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\dfrac{\partial B_z}{\partial t}$ である。

6－2　ドリル問題

１.

式 6–36 から，$\dfrac{E}{B}=c$ である。光速は $c=3\times10^8$ m/s であるから，磁束密度の振幅 B_0 は，
$B_0=\dfrac{E_0}{c}=\dfrac{10^5}{3\times10^8}\approx 0.333\times10^{-3}$ T である。（答）

磁束密度の振動数は電界の振動数と同じであるから，磁束密度の波長 λ は $c=\lambda f$ を使って，$\lambda=\dfrac{c}{f}=\dfrac{3\times10^8}{10^{15}}=3\times10^{-7}$ m となる。（答）

２.

$E=cB$ を使って，電界の振幅は $E_0=3\times10^8\times10^2=3\times10^{10}$ V/m， 電界の波長は

$\lambda=\dfrac{c}{f}=\dfrac{3\times10^8}{10^6}=3\times10^2$ m である。（答）

３.

電界は $E=E_0\cos(\omega t-kx)$ と表すことができるから，電界最大の波面は $\omega t-kx=0$ の関係を満たす。これから， 100 m 移動するのに必要な時間は
$t=\dfrac{k}{\omega}x=\dfrac{2\pi/\lambda}{2\pi f}x=\dfrac{x}{\lambda f}=\dfrac{x}{c}=\dfrac{100}{3\times10^8}\approx 3.33\times10^{-7}$ s である。（答）

４.

$\omega t+kx=0$ の波面の動きを調べる。$x=-\dfrac{\omega}{k}t$ より，この波面は時間が経つと x の負の

方向に動く。すなわち，この平面波は x の負の向きに進む波を表す。（答）

５．

式 6−52 から $\bar{u}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0{}^2=0.5\times 8.85\times 10^{-12}\times 5^2=1.10\times 10^{-10}$ J/m³ である。（答）

６．

式 6−55 から $\bar{S}=c\bar{u}=3\times 10^8\times 1.1\times 10^{-10}=3.3\times 10^{-2}$ J/m²s である。（答）

７．

式 6−41 と 6−42 から，磁束密度の最大値は

$B_0=\dfrac{\mu_0 I_0}{2}=\dfrac{4\pi\times 10^{-7}\times 1}{2}=6.28\times 10^{-7}$ T （答）

電界の最大値は $E_0=\dfrac{c\mu_0 I_0}{2}=\dfrac{3\times 10^8\times 4\pi\times 10^{-7}\times 1}{2}\approx 3\times 10^8\times 6.28\times 10^{-7}\approx 188$ V/m

（答）

８．

ポインティングベクトルの大きさの時間平均値は前問の E_0 の値を使って

$\bar{S}=\dfrac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0{}^2=0.5\times 3\times 10^8\times 8.85\times 10^{-12}\times 188^2=46.9$ J/(m²s) である。これから，正方形に 1 秒間に流入するエネルギーは $46.9\times 2^2=187$ J/s である。（答）

９．

導体棒の電流密度は $j=\dfrac{I}{\pi a^2}$ である。導体断面の中心から半径 r の円の接線方向の磁束密度を B とすると，$2\pi rB=\mu_0 j\pi r^2$ の関係がある。これから，$B=\dfrac{\mu_0 jr}{2}=\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}$ である。導体棒の電位差 V は $V=IR=El$ であるから，導体内部の電場の大きさは $E=\dfrac{IR}{l}$ 、その方向は導体の長さ方向である。B と E の方向は互いに直角であるから，ポインティングベクトルの大きさは $S(r)=\dfrac{EB(r)}{\mu_0}=\dfrac{IR}{l}\dfrac{Ir}{2\pi a^2}=\dfrac{Rr}{2\pi a^2 l}I^2$ であり，方向は導体の中心に向かっている。（答）

10.

前問から得たポインティングベクトルの大きさの式を使って，導体棒の表面でのベクトルポテンシャルの大きさを求めると，表面では $r=a$ であるから，

$\dfrac{R}{2\pi al}I^2=\dfrac{10}{2\times 3.14\times 0.001\times 10}\times 1^2=159$ J/(s·m²) となる．ベクトルポテンシャルの方向

は導体の中心に向かっている。導体表面での単位時間あたりのエネルギーは表面積$2\pi al$をポインティングベクトルに掛ければ得られる。すなわち，$2\pi al \times \dfrac{R}{2\pi al} I^2 = RI^2$ である。

(答)

エネルギーは導体内部でジュール熱として消費される。

6－3　ドリル問題

１．

式 6−81 から，$v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3 \times 10^8}{1.333} = 2.25 \times 10^8$ m/s である。（答）

２．

電磁波の速度は$v = \lambda f$ の関係を満たすから，水中の青色の光の波長は，前問の結果を使って，$\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{2.25 \times 10^8}{6.5 \times 10^{14}} = 3.46 \times 10^{-7}$ m である。（答）

３．

式 6−81 から $n = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \approx \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ である。これから，

$\varepsilon = n^2\varepsilon_0 = 1.5^2 \times 8.85 \times 10^{-12} = 1.99 \times 10^{-11}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$ である。（答）

４．

銅の透磁率は真空中の透磁率 μ_0 であると考えてよいから，式 6−101 から電磁波の侵入の深さは $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$ より求めることができる。結果は

$\delta = \sqrt{\dfrac{2}{4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7 \times 2\pi \times 50}} \approx 9.35$ mm である。（答）

５．

$\delta = \sqrt{\dfrac{2}{4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7 \times 2\pi \times 10^{10}}} \approx 6.61 \times 10^{-7}$ m （答）

６．

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{4\pi\times10^{-7}\times10^{-14}\times2\pi\times10^{10}}}\approx5.04\times10^{4}\ \mathrm{m}$$ である。（答）

ゴムでは電磁波の減衰はほとんど起こらない。

第６章　演習問題

１．

$c=\lambda f$ より $f=540\mathrm{kHz}$ では $\lambda=\dfrac{c}{f}=\dfrac{3\times10^{8}}{5.4\times10^{5}}\approx5.56\times10^{2}\ \mathrm{m}$，1600kHz では $1.88\times10^{2}\ \mathrm{m}$ である。（答）

２．

電界の最大値を E_0，磁束密度の最大値を B_0 とすると，ポインディングベクトルの大きさの時間平均 w は $w=c\bar{u}=\dfrac{1}{2}c\varepsilon_0{E_0}^2=\dfrac{c{B_0}^2}{2\mu_0}$ で与えられる。レーザビームの半径を a とすると，$w\pi a^2$ が単位時間あたりのレーザ光のエネルギーである。この値がレーザの出力 1 W に等しい。すなわち，$\dfrac{1}{2}c\varepsilon_0{E_0}^2\pi a^2=\dfrac{c}{2\mu_0}{B_0}^2\pi a^2=1$ の関係が成り立つ。これから，

$E_0=1.55\times10^{6}\ \mathrm{V/m}$，$B_0=5.16\times10^{-3}\ \mathrm{T}$ である。（答）

３．

$c=\lambda f$ より $c=3392.23140\times10^{-9}\times88.376181627\times10^{12}=2.9979245833\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$ が得られる。（答）

４．

式6−44から $B=\dfrac{E}{c}$ の関係があるから，磁束密度の最大値は $B_0=\dfrac{2.5}{3\times10^{8}}=8.33\times10^{-9}\ \mathrm{T}$ である。（答）

５．

$1000\times10^{2}=10^{5}$ W，すなわち，100 kW のエネルギーが降りそそいでいる。（答）

6．

太陽から地球までの距離rを半径とする球の表面積は$4\pi r^2$であるから，地球に降り注ぐ単位面積あたりのエネルギー流をwとすると，太陽が放出する全電磁放射エネルギーは$w4\pi r^2 = 1.4\times 10^3 \times 4\times 3.14\times (1.5\times 10^{11})^2 \approx 4.0\times 10^{25}$ W である。(答)

7．

磁束密度と式 6‒23 の内積をとると，$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$の関係が得られる。次に，式 6‒25 を磁束密度と電界で表し、電界と内積をとると，

$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$となる。これら２つの式の差をとると，

$\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}))=-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$が得られる。(答)

8．

$\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})$を成分で表すと$B_x(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z})+B_y(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x})+B_z(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})$，

$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$は$E_x(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z})+E_y(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x})+E_z(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y})$である。これらの差は

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\\
&=B_x(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z})+B_y(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x})+B_z(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})\\
&-E_x(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z})-E_y(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x})-E_z(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y})\\
&=\frac{\partial}{\partial x}(E_yB_z-E_zB_y)+\frac{\partial}{\partial y}(E_zB_x-E_xB_z)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xB_y-E_yB_x)=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})
\end{aligned}
$$

となる。(答)

9．

７．で得た式に８．で得た式を代入し，$\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2)$等を考慮すると与式が得られる。ポインティングベクトル$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$を使うと，この式は，

$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2)=-\nabla\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$と表すことができる。(答)

すなわち、電磁界のエネルギーの時間変化はポインティングベクトルの発散とジュー

ル熱によるエネルギー散逸に等しい。

第 6 章　ワークシート問題

１．

$c=\lambda f$ より

(1)　X 線　$f=\dfrac{3\times10^8}{10^{-12}}=3\times10^{20}$ Hz （答）

(2)　紫外線　$f=\dfrac{3\times10^8}{10^{-7}}=3\times10^{15}$ Hz （答）

(3)　可視光　$f=\dfrac{3\times10^8}{6\times10^{-7}}=5\times10^{14}$ Hz （答）

(4)　マイクロ波　$f=\dfrac{3\times10^8}{10^{-2}}=3\times10^{10}$ Hz （答）

２．

変位電流 I_D はコンデンサに流れ込む電流 I に等しい．極板間に生じる電束密度 D は一様であるから，電極板の半径を a とすると，$I_D=\dfrac{\partial D}{\partial t}\pi a^2=I$ である。したがって，変位電流密度は $\dfrac{\partial D}{\partial t}=\dfrac{I}{\pi a^2}$ となる。アンペール・マクスウェルの法則（式 6‒24）を使って，コンデンサの中心を原点にとった半径 r の円上の磁束密度 B は $2\pi rB=\mu_0\dfrac{I}{\pi a^2}\pi r^2$ から求まる。すなわち，$B=\dfrac{\mu_0 rI}{2\pi a^2}$ である。（答）

３．

オイラーの公式（式 7‒35）を使うと，

$$E_1+E_2=E_0[\cos(kx-\omega t)+\cos(kx+\omega t)]=\frac{E_0}{2}[e^{j(kx-\omega t)}+e^{-j(kx-\omega t)}+e^{j(kx+\omega t)}+e^{-j(kx+\omega t)}]$$

$$=\frac{E_0}{2}(e^{jkx}+e^{-jkx})(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})=2E_0\cos kx\cos\omega t$$

となる。（答）

したがって，E_1+E_2 は動かない波，定在波を表す。

４．

電界の大きさ $E=E_0\dfrac{\cos\omega(t-\frac{r}{c})}{r}$ として，これが $(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2})E=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}E$ を満

たすことを示す． E を x で微分すると，

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=E_{0x}[-\sin\omega(t-\frac{r}{c})\cdot(-\frac{\omega}{c})\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}-\cos\omega(t-\frac{r}{c})\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}]$$ である。

これに $\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r^2}$ を使うと， $\frac{\partial E_x}{\partial x}=E_{0x}[\sin\omega(t-\frac{r}{c})\cdot(\frac{\omega}{c})-\cos\omega(t-\frac{r}{c})\cdot\frac{1}{r}]\frac{x}{r^2}$ である。

さらに， x についてもう 1 回微分し， $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^2})=\frac{1}{r^2}(1-2\frac{x^2}{r^2})$ の関係を使うと，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E=E_0[\cos\omega(t-\frac{r}{c})\{-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}-\frac{x^2}{r^3}(\frac{\omega}{c})^2\}+\sin\omega(t-\frac{r}{c})(\frac{\omega}{c})\{\frac{1}{r^2}-\frac{3x^2}{r^4}\}]$$ である。

y について $\frac{\partial^2}{\partial y^2}E=E_0[\cos\omega(t-\frac{r}{c})\{-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}-\frac{y^2}{r^3}(\frac{\omega}{c})^2\}+\sin\omega(t-\frac{r}{c})(\frac{\omega}{c})\{\frac{1}{r^2}-\frac{3y^2}{r^4}\}]$，

z についても同様な式が得られる。したがって，

$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})E=-E_0\frac{\cos\omega(t-\frac{r}{c})}{r}(\frac{\omega}{c})^2$ である。一方， $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=-E_0\frac{\cos\omega(t-\frac{r}{c})}{r}\omega^2$ で

あるから， $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})E=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E$ が成り立っている。（答）