「工学系の力学」第５章　問題解答

５－１　ドリル問題

問題１

物体の質量を m，斜面方向の加速度を a とすると，運動方程式は次のように表される。

$$ma = -mg\sin\theta$$

よって，斜面上の物体の運動は，加速度が

$$a = -g\sin\theta = -9.8\times\sin 30° = -4.9\text{m/s}$$

の等加速度直線運動となる。停止するまでの移動距離は

$$s = \frac{v - v_0^2}{2a} = \frac{0 - 4.0^2}{2\times(-4.9)} = 1.63\,\text{m}$$

と求めることができるので，最高到達点の高さは

$$h = s\sin\theta = 1.6326\times\sin 30° = 0.816\text{m} \quad \text{（答）}$$

となる。また，ここに到達するまでの時間は次のように求められる。

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 4.0}{-4.9} = 0.816\text{s} \quad \text{(答)}$$

問題２

ブレーキをかけ始めてからの運動は初速度が v_0 の等加速度運動である。その加速度 a は式 4-11 から次のように求められる。

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{0 - \left(\frac{36\times 1000}{3600}\right)^2}{2\times 20} = \frac{0 - 10^2}{40} = \frac{-100}{40} = -2.5\text{m/s}^2$$

自動車の運動方程式から制動力 F は次のように求められる。

$$F = ma = 1000\times(-2.5) = -2500\text{N} \quad \text{（答）}$$

ここで，負号は運動と逆向きであることを意味している。停止するまでの時間は，式 4-9 から次のように求められる。

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 10}{-2.5} = \frac{10}{2.5} = 4\text{s} \quad \text{(答)}$$

問題３

ロケットには，重力 mg と推力 F_t が作用するが，推力が重力よりも大きい（$F_t > mg$）ので，重力に打ち勝ってロケットが上昇する．ロケッ鉛直方向方向の運動方程式を書くと

$$ma = F_t - mg$$

となり，打ち上げ時の加速度 a は次のように求められる。

$$a = \frac{F_t - mg}{m} = \frac{F_t}{m} - g = \frac{10150\times 10^3}{500\times 10^3} - 9.8 = 20.3 - 9.8 = 10.5\text{m/s}^2 \quad \text{（答）}$$

問題４

月面に垂直の方向の降下の加速度を a とすると、逆噴射を行っているときの運動方程式は

$$ma = \frac{1}{6}mg - F$$

となる。これより加速度を求めると次のようになる。

$$a = \frac{1}{6}g - \frac{F}{m} = \frac{9.8}{6} - \frac{22\times10^3}{10\times10^3} = -0.567\mathrm{m/s^2}$$

初速度 v_0＝9m/s で加速度が a＝−0.567m/s^2 の等加速度直線運動となるので，h＝71m 降下したときの速度 v は次のように求められる。

$$v = \sqrt{{v_0}^2 + 2ah} = \sqrt{9^2 - 2\times0.567\times71} = 0.697\mathrm{m/s} \quad (答)$$

問題５

４基のジェットエンジンによる推進力 F は

$$F = 4\times F_t = 4\times300 = 1200\mathrm{kN} = 1200\times10^3\mathrm{N}$$

となる。この推進力で加速するので，運動方程式は次のようになる。

$$ma = F$$

これより，加速度 a を次のように求めることができる。

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1200\times10^3}{240\times10^3} = 5.0\mathrm{m/s^2}$$

離陸までに等加速度運動をするので，式 4-11 より滑走路上の走行距離 x は次のように求められる。

$$x = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a} = \frac{\left(252\times\frac{1000}{3600}\right)^2 - 0}{2\times5.0} = 490\mathrm{m} \quad （答）$$

また，式 4-9 より離陸までの時間 t は次のように求められる。

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{252\times\frac{1000}{3600} - 0}{5.0} = \frac{70}{5} = 14\mathrm{s} \quad （答）$$

問題６

斜面を走行している自動車の運動方程式は，斜面方向の推進力を F とすると次のように表される。

$$ma = F - mg\sin\theta$$

斜面を走行しているときは一定の速度であり加速度 a＝0 であるので, 推進力 F は次のように求められる。

$$F = ma + mg\sin\theta = mg\sin\theta = 1600\times9.8\times\sin30^\circ = 7840\mathrm{N}$$

水平な路面上での運動方程式は次のようになる。

$$ma = F$$

これより加速度 a は次のように求められる。

$$a=\frac{F}{m}=\frac{7840}{1600}=4.9\mathrm{m/s^2}\quad(答)$$

この問題では，運動の方向が変化するが，それぞれが直線運動であるので，それぞれに１次元座標を定めて運動方程式を立てればよい。

問題７

慣性力は加速度と質量から次のように求められる。

$$F=-Ma=60\times0.72=43.2\mathrm{N}\quad(答)$$

おもりの質量を m とし，慣性力 F と糸の張力 T，重力 mg について水平方向と鉛直方向の力のつり合いを書くと次のようになる。

水平方向　$ma=T\sin\theta$　　鉛直方向　$mg=T\cos\theta$

これらから張力 T を消去すると，角度θは次のように求められる。

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{0.72}{9.8}\right)=4.2^\circ＝0.0733\ \mathrm{rad}\quad(答)$$

問題８

人が体重計から受ける垂直抗力を N とすると，運動方程式は次のように表される。

$$ma=N-mg$$

垂直抗力の反作用により体重計の指示値 m'が決まるので, 垂直抗力 N は次のように求められる。

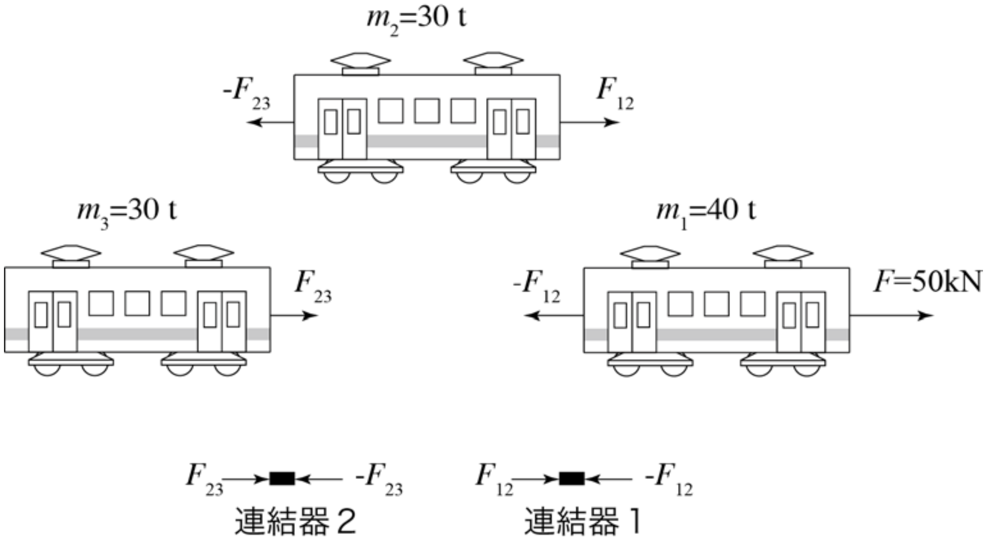
$$N=m'g$$

よって，このエレベータの加速度は次のように求められる。

$$a=\frac{N}{m}-g=\frac{m'g}{m}-g=\left(\frac{m'}{m}-1\right)g=\left(\frac{70}{65}-1\right)\times9.8＝0.754\mathrm{m/s^2}\quad(答)$$

問題９

(1)　この列車の自由体図を描くと次のようになる。



各車両の運動方程式は次のように書ける。

$$m_1 a = F - F_{12}$$

$$m_2 a = F_{12} - F_{23}$$

$$m_3 a = F_{23}$$

F_{12} と F_{23} を消去すると，加速度が次のように求められる。

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{50 \times 10^3}{(40 + 30 + 30) \times 10^3} = 0.5\mathrm{m/s^2} \quad (答)$$

(2)　(1)に示した運動方程式に加速度の値を代入すると，F_{12} と F_{23} はそれぞれ次のように求められる。

$$F_{12} = F - m_1 a = 50 \times 10^3 - 40 \times 10^3 \times 0.5 = 30 \times 10^3\mathrm{N} = 30\mathrm{kN} \quad (答)$$

$$F_{23} = m_3 a = 30 \times 10^3 \times 0.5 = 15 \times 10^3\mathrm{N} = 15\mathrm{kN} \quad (答)$$

(3)　列車は等加速度直線運動となるので, 速度が v＝54km/h＝15m/s に到達するまでの時間は次のように求められる。

$$t_1 = \frac{v - v_0}{a} = \frac{15 - 0}{0.5} = 30\mathrm{s} \quad (答)$$

また，この間に進む距離は次のように求められる。

$$x_1 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 30^2 = 225\mathrm{m} \quad (答)$$

(4)　制動力が一定であることから, ブレーキをかけている間の運動は, 等加速度直線運動となる。その加速度は次のように求められる。

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 15}{25} = -0.6\mathrm{m/s^2}$$

制動力を考慮して運動方程式を書くと次のようになる。

$$m_1 a = -F_{12} - F_b$$

$$m_2 a = F_{12} - F_{23} - F_b$$

$$m_3 a = F_{23} - F_b$$

これより，制動力は次のように求められる。

$$F_b = -\frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3) a = \frac{1}{3}(40 + 30 + 30) \times 10^3 \times (-0.6) = 20\mathrm{kN} \quad (答)$$

(5)　停止までに進む距離は次のように求められる。

$$x_2 = -\frac{1}{2} a t^2 = -\frac{1}{2} \times (-0.6) \times 25^2 = 188\mathrm{m} \quad (答)$$

問題 10

トラックの加速度を a_1，荷物の加速度を a_2，荷台と荷物との間に作用する摩擦力を f とすると運動方程式は次のようになる。

$$Ma_1 = F - f$$

$$ma_2 = f$$

荷台を滑り始めるときに摩擦力が最大となり

$$f = \mu_s mg$$

と表される。トラックに対する荷物の加速度 a_{21} は

$$a_{21} = a_2 - a_1 = \frac{f}{m} - \frac{F-f}{M} = \frac{\mu_s mg}{m} - \frac{F-\mu_s mg}{M} = \mu_s g - \frac{F-\mu_s mg}{M}$$

となり， a_{21}＞0 となれば荷物は滑らないことから次の関係が得られる。

$$F < \mu_s (M+m) g$$

よって，荷物が滑らないときの最大の推進力は次のように求められる。

$$F_{\max} = \mu_s (M+m) g = 0.3 \times (2000+100) \times 9.8 = 6174\mathrm{N}$$ ＝6.17kN　(答)

５－１　演習問題

１.

(1)　物体の運動方程式は次のようになる。

$$ma_1 = mg\sin\theta$$

物体の加速度は次のように求められる。

$$a_1 = g\sin\theta = 9.8 \times \sin 30^\circ = 9.8 \times \frac{1}{2} = 4.9\mathrm{m/s^2}$$

A から B までの距離は x_1＝5m であり、物体は初速度ゼロの等加速度直線運動を行うので、位置 B に到達するまでの時間 t_1 は次のように求められる。

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2\times 5}{4.9}} = 1.428$$ ＝1.43 s　(答)

また、この位置での速度 v_B は次のように求められる。

$$v_B = a_1 t_1 = 4.9 \times 1.428 = 6.9972$$ ＝7.00m/s　(答)

(2)　摩擦がある場合の物体の運動方程式は次のようになる。

$$ma_2 = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

物体の加速度は次のように求められる。

$$a_2 = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k\right) \quad \text{(A)}$$

A から C に到達する時間は $t_2=t_1\times1.45=2.0706$s であることから、B から C に至るまでの時間 t_3 は $t_3=t_2-t_1=0.643$s である。B から C までの距離が $x_2=5$m であるので、加速度 a_2 が次のように求められる。

$$a_2=\frac{2\left(x_2-v_B t_3\right)}{t_3^2}=\frac{2\left(5-7.000\times0.643\right)}{0.643^2}=2.414\mathrm{m/s^2}$$

これが(A)式の加速度と等しいことから、動摩擦係数 μ_k が次のように求められる。

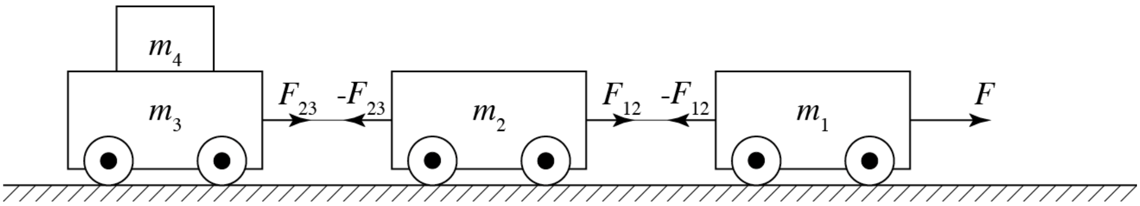
$$\mu_k=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{g}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{2.414}{9.8}\right)=0.2929=0.293 \quad (答)$$

速度 v_C は次のように求められる。

$$v_C=v_B+a_2t_3=7.000+2.414\times0.643=8.552=8.55\mathrm{m/s} \quad (答)$$

２．

糸の作用する力 F_{12}，F_{23} を図のように定める



列車の加速度を a とし，各車両の運動方程式を立てると次のようになる。

$$m_1a=F-F_{12}$$

$$m_2a=F_{12}-F_{23}$$

$$\left(m_3+m_4\right)a=F_{23}$$

これらより，加速度 a が次のように求められる。

$$a=\frac{F}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

糸に作用する力 F_{12} と F_{23} は次のように求められる。

$$F_{12}=F-m_1a=F-\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3+m_4}F=\frac{m_2+m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}F$$

$$=\frac{0.1+0.15+0.05}{0.2+0.1+0.15+0.05}F=\frac{0.3}{0.5}F=\frac{3}{5}F$$

$$F_{23}=\left(m_3+m_4\right)a=\frac{m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}F=\frac{0.15+0.05}{0.2+0.1+0.15+0.05}F=\frac{0.2}{0.5}=\frac{2}{5}F$$

$F_{12}>F_{23}$ であることから１両目と２両目の間の糸の方により大きな力が作用するので，これが糸の張力の最大値 0.9N 以下であれば糸は切れない。すなわち，

$$F_{12}=\frac{3}{5}F\le0.9$$

という関係が成り立てばよい。よって，最大の推進力 F_{max} は次のように求められる。

$$F_{max}=\frac{5}{3}\times 0.9=1.5\mathrm{N}\quad (答)$$

このときの加速度は,

$$a=\frac{F_{max}}{m_1+m_2+m_3+m_4}=\frac{1.5}{0.5}=3.0\mathrm{m/s^2}$$

列車は初速度 $v_0=0$ の等加速度直線運動を行うので、1 秒後の速度 v と移動距離 s はそれぞれ次のように求められる。

$$v=v_0+at=0+3.0\times 1=3.0\mathrm{m/s}\quad (答)$$

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2=0\times 1+\frac{1}{2}\times 3.0\times 1^2=1.5\mathrm{m}\quad (答)$$

３.

(1) トラックと荷物の質量をそれぞれ m_A，m_B とし，加速度をそれぞれ a_A，a_B とする。摩擦力を f，制動力を F として，それぞれの運動方程式を立てると次のようになる。

$$m_Aa_A=-F+f$$

$$m_Ba_B=-f$$

よって，トラックに対する荷物の相対加速度 a_{BA} は次のように表される。

$$a_{BA}=a_B-a_A=\frac{1}{m_A}F-\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)f$$

$a_{BA}>0$ となると荷物が滑ることになる。最大の制動力のときに $a_{BA}=0$ であれば，荷物が滑ることはない。よって，最大の制動力は次のように求められる。

$$F_{max}=\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)f$$

摩擦力 f は，静止摩擦係数と重力 m_Bg を用いて $f=\mu_sm_Bg$ と表されるので，運動方程式からトラックの加速度 a_A は次のように求められる。

$$a_A=\frac{1}{m_A}(-F+f)=\frac{1}{m_A}\left\{-\left(1+\frac{m_A}{m_B}\right)f+f\right\}=-\frac{f}{m_B}$$

$$=\frac{\mu_sm_Bg}{m_B}=-\mu_sg=-0.32\times 9.8=-3.136=-3.14\mathrm{m/s^2}\quad (答)$$

トラックの初速度が $v_0=72\mathrm{km/h}=20\mathrm{m/s}$ であるので, 停止するまでの移動距離 s は次のように求められる。

$$s=-\frac{{v_0}^2}{2a_A}=-\frac{20^2}{2\times(-3.14)}=63.7\mathrm{m}\ (答)$$

停止までの時間 t は次のように求められる。

$$t=-\frac{v_0}{a_A}=-\frac{20}{-3.14}=6.369=6.37\text{s}\quad(答)$$

(2)　制動距離（停止するまでの走行距離）が 50m であることから，トラックの加速度は次のように求められる。

$$a_A=-\frac{v_0^2}{2x}=-\frac{20^2}{2\times50}=-4.0\text{m/s}^2$$

停止までの時間 t は次のように求められる。

$$t=-\frac{v_0}{a}=-\frac{20}{-4.0}=5.0\text{s}$$

この加速度は(1)で求めた加速度よりも大きいので，物体は荷台上を滑る。物体が荷台上を滑るときの物体の運動方程式は，摩擦力が $f=\mu_k m_B g$ であることから，次のように表される。

$$m_B a_B=-\mu_k m_B g$$

すなわち，物体 B の加速度 a_B は次のように求められる。

$$a_B=-\mu_k g=-0.24\times9.8=-2.4\text{m/s}^2$$

トラックに対する荷物の相対加速度 a_{BA} は次のように求められる。

$$a_{BA}=a_B-a_A=-2.4-(-4.0)=1.6\text{m/s}^2$$

物体は加速度 a_{BA} にて荷台上で初速度 $v_{BA0}=0$ の等加速度直線運動を行う。衝突するときの速度，すなわち $L=4.0$m 移動したときの速度は次のように求められる。

$$v_{BA}=\sqrt{2a_{BA}L}=\sqrt{2\times1.6\times4.0}=3.577=3.58\text{m/s}\quad(答)$$

衝突までの時間 t'を求めると次のようになる。

$$t'=\frac{v-v_0}{a_{BA}}=\frac{3.6}{1.6}=2.3\text{s}$$

よって，トラックが停止するまえに荷物が壁に衝突する。(答)

このときのトラックの速度 v_A は次のように求められる。

$$v_A=v_0+a_At'=20-4.0\times2.25=11.0\text{m/s}\quad(答)$$

４．

(1)　箱と物体の自由体図を描くと図のようになる。これにもとづいて運動方程式を書くとそれぞれ次のようになる。

箱：$m_A a=m_A g+N-F$　　(1)

物体：$m_B a=m_B g-N$　　(2)

この箱は加速度をもって運動するので非慣性系である。これらの運動不定式は，箱の外で静止している観測者の視点から記述されたものである。運動方程式から，加速度 a と反力 N はそ

れぞれ次のように表されることがわかる。

$$a = g - \frac{F}{m_A + m_B} \quad (答) \tag{3}$$

$$N = \frac{m_B}{m_A + m_B} F \quad (答) \tag{4}$$

(2)　力 F の作用により全体が一定の速度で落下するときには，$a=0$ となるので，(1)式と(2)式の運動方程式が

箱　：$0 = m_A g + N - F$　(5)

物体：$0 = m_B g - N$　(6)

となり，物体が箱から受ける反力 N と力 F は次のように求められる。

$$N = m_B g \tag{7}$$

$$F = (m_A + m_B) g \tag{8}$$

この結果からわかるように，一定の速度で運動している場合，すなわち慣性系では，全体が運動していても静止した状態とまったく同様の力のつり合いの状態となる。(答)

(3)　力 F をゼロとして自由落下させるとする。このとき，(3)式から加速度は $a=g$ となり，(4)式から物体が箱から受ける反力は $N=0$ となる。よって、物体は箱の内部で浮いたような状態となり無重力状態となる。(答)

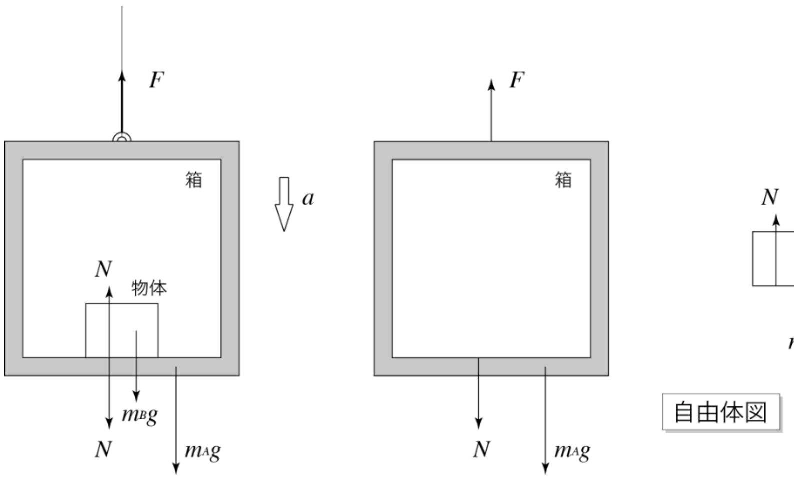
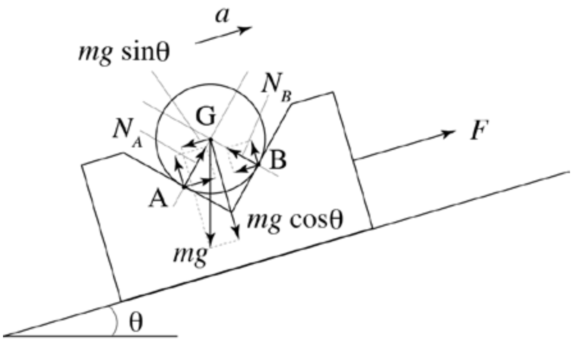


図　落下する箱とその内部に置かれた物体

５.



円柱の質量を m，接触点 A と B における反力を N_A，N_B とする。ダランベールの原理から，V ブロックとともに運動する座標系で次のような力のつり合いが成り立つ。

斜面方向 $$\frac{\sqrt{2}}{2}N_A-\frac{\sqrt{2}}{2}N_B-mg\sin\theta-ma=0$$

斜面に垂直な方向 $$\frac{\sqrt{2}}{2}N_A+\frac{\sqrt{2}}{2}N_B-mg\cos\theta=0$$

これらのつり合いの式から N_A を消去して整理すると

$$N_B=\frac{m}{\sqrt{2}}\{g(\cos\theta-\sin\theta)-a\}$$

という関係が得られる。B 点で接触が確保されるためには

$$N_B\geq 0$$

が満たされればよいので，加速度 a について

$$a\leq g(\cos\theta-\sin\theta)$$

という関係が得られる。よって、加速度の上限値 a_{max} は次のように求められる。

$$a_{max}=g(\cos\theta-\sin\theta)$$ (答)

５－２　ドリル問題

問題１

飛行機の加速度の x 方向成分 a_x と y 方向成分 a_y は次のように表される。

$$a_x=a\cos\theta,\quad a_y=a\sin\theta$$

自由体図から運動方程式は次のように書ける。

$$Ma\cos\theta=T\cos\theta-D\cos\theta-L\sin\theta$$ (答)

$$Ma\sin\theta=T\sin\theta-D\sin\theta+L\cos\theta-Mg$$ (答)

加速度が０のときは

$$L\sin\theta=(T-D)\cos\theta$$

$$Mg=(T-D)\sin\theta+L\cos\theta$$

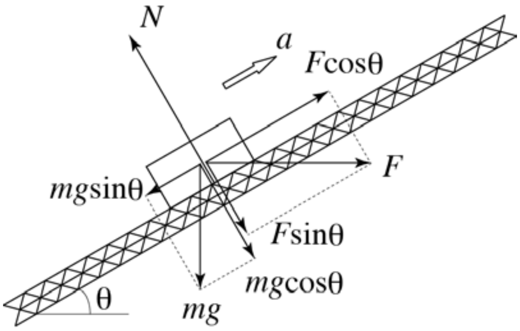
という関係が成り立つので、この２つの式から抗力 D と揚力 L を求めると次のようになる。

$L = Mg\cos\theta$　(答)

$D = T - Mg\sin\theta$　(答)

問題２

物体に作用する力をレール方向とそれに垂直な方向に分解すると次の図のようになる。



それぞれの方向の運動方程式は次のように書ける。

$$ma = F\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$0 = N - F\sin\theta - mg\cos\theta$$

よって，加速度 a と垂直抗力 N は次のように求められる。

$$a = \frac{F\cos\theta}{m} - g\sin\theta = \frac{120\times\cos 30^\circ}{10} - 9.8\times\sin 30^\circ = 5.49\mathrm{m/s^2}$$　(答)

$$N = F\sin\theta + mg\cos\theta = 120\times\sin 30^\circ + 10\times 9.8\times\cos 30^\circ = 145\mathrm{N}$$　(答)

問題３

x 方向には外力 F が，y 方向には重力が作用するので，運動方程式は次のようになる。

$$ma_x = F$$

$$ma_y = -mg$$

これらから x 方向と y 方向の加速度が次のように求められる。

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{1.0}{5.0} = 0.2\mathrm{m/s^2}$$

$$a_y = -g = -9.8\mathrm{m/s^2}$$

着地するまでの時間は，y 方向の自由落下（等加速度運動）に着目すると次のように求められる。

$$h = -\frac{1}{2}a_y t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{-a_y}} = \sqrt{\frac{2\times 19.6}{9.8}} = 2.0\mathrm{s}$$

この時間 t で x 方向に移動する距離が着地点のずれ L に相当する。x 方向の運動は等加速度運動

であることから，距離 L は次のように求められる。

$$L = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{2}\times 0.2\times 2^2 = 0.4\mathrm{m} \qquad (答)$$

物体に外力 F が作用せず，初速度 v_0 で投射される場合，物体の運動は y 方向に自由落下，水平方向に等速直線運動となり，全体として **4-1-3** で学んだ放物運動となる。落下に要する時間は上記の場合と同様に t＝2.0s である。この時間で水平方向に L＝4.0m 進めばよいので，初速度は次のように求めることができる。

$$v_0 = \frac{L}{t} = \frac{4.0}{2.0} = 2.0\mathrm{m/s} \quad (答)$$

問題４

物体 A の水平方向の運動と物体 B の斜面方向の運動について，運動方程式を書くと次のようになる。

物体 A　$m_A a = T - f$

物体 B　$m_B a = m_B g\sin\theta - T$

摩擦力 f は

$$f = \mu_k N = \mu_k m_A g$$

であることを考慮して，加速度 a と張力 T を求めると次のようになる。

$$a = \frac{m_B\sin\theta - \mu_k m_A}{m_A + m_B}g = \frac{4\times\sin 30^\circ - 0.3\times 2}{2+4}\times 9.8 = 2.29\mathrm{m/s^2} \quad (答)$$

$$T = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\left(\sin\theta + \mu_k\right)g = \frac{2\times 4}{2+4}\times\left(\sin 30^\circ + 0.3\right)\times 9.8 = 10.5\mathrm{N} \quad (答)$$

問題５

静止衛星は万有引力を向心力とする等速円運動を行うと考えられることから，静止衛星の質量を m，地球の中心から静止衛星までの距離を R とすると，運動方程式は次のように表される。ただし，G は万有引力定数である。

$$mR\omega^2 = G\frac{Mm}{R^2}$$

角速度ωを求めると

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60} = 7.272\times 10^{-5}\mathrm{rad/s}$$

となるので，運動方程式から R を求めると

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67\times 10^{-11}\times 5.97\times 10^{24}}{\left(7.272\times 10^{-5}\right)}} = 4.22\times 10^4\mathrm{km}$$

となる。これより，高度 h は次のように求められる。

$$h = R - \frac{d}{2} = 4.22\times10^4 - \frac{1.28\times10^4}{2} = 3.58\times10^4 = 35800\text{km} \quad (答)$$

問題６

鉛直方向に物体をつり下げたとき，重力 mg とばねの弾性力 kx がつり合うので，ばね定数 k が次のように求められる。

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{1.0\times9.8}{0.02} = 490\text{N/m}$$

他端を中心として回転させるとき，ばねの弾性力が向心力となって半径が $L+x$ の等速円運動をすると考えられるので，運動方程式は次のようになる。

$$m(L+x)\omega^2 = kx$$

これより，角速度ωは次のように求められる。

$$\omega = \sqrt{\frac{kx}{m(L+x)}} = \sqrt{\frac{490\times0.06}{1.0\times(0.3+0.06)}} = 9.0\text{rad/s}$$

これを回転数 n に換算すると次のようになる。

$$n = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{60\times9.037}{2\pi} = 86.3\text{rpm} \quad (答)$$

問題７

ゴンドラの質量を m，角速度をω，アームの張力を T，ゴンドラの円運動の半径を r とする。この運動をゴンドラを基準とする座標系から観測すると，水平方向にはアームの張力の水平方向成分と遠心力とのつり合いが，鉛直方向にはアームの張力の鉛直方向成分と重力とのつり合いがそれぞれ成り立つ。

水平方向　$mr\omega^2 = T\sin\theta$

鉛直方向　$mg = T\cos\theta$

回転半径 r は

$$r = a + L\sin\theta$$

であることを考慮し，力のつり合いの式から張力 T を消去すると角速度が次のように求められる。

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{a+L\sin\theta}} = \sqrt{\frac{9.8\times\tan30^\circ}{5+10\sin30^\circ}} = 0.7522\text{rad/s}$$

これを回転数 n に換算すると次のようになる。

$$n = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{60\times0.7522}{2\pi} = 7.18\text{rpm} \quad (答)$$

問題８

物体に作用する遠心力の反力が垂直抗力であるので，最大静止摩擦力 f_0 は

$$f_0 = \mu_s N = \mu_s \frac{md\omega^2}{2}$$

と表される。重力 mg が最大静止摩擦力 f_0 よりも小さければ物体は落ちないので，次の関係が成り立てばよい。

$$\mu_s \frac{md\omega^2}{2} \geq mg$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{2g}{\mu_s d}}$$

これより，最小の角速度が次のように求められる。

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{2g}{\mu_s d}} = \sqrt{\frac{2\times 9.8}{0.5\times 0.7}} = 7.48\mathrm{rad/s}$$

これを回転数に換算すると次のようになる。

$$n_{\min} = \frac{60\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{60\times 7.48}{2\pi} = 71.4\mathrm{rpm} \quad (答)$$

問題 9

オートバイの速度は v＝72km/h＝20m/s である。地面から重心までの高さを h，オートバイと人の質量を m とする。接地位置を中心として遠心力と重力のモーメントがつり合えば転倒せずに走行することができるので，次の関係が成り立てばよい（力のモーメントは，反時計まわりを正としている）。

$$mgh\sin\theta - m\frac{v^2}{R}h\cos\theta = 0$$

これより，角度を求めると次のようになる。

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{gR}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20^2}{9.8\times 50}\right) = 39.2^\circ = 0.684\ \mathrm{rad} \quad (答)$$

問題 10

飛行機の速さは v＝150m/s であるので，パイロットに作用する遠心力は次のように求められる。

$$m\frac{v^2}{r} = 60\times\frac{150^2}{1000} = 1350\mathrm{N}$$

重力は次のように求められる。

$$mg = 60\times 9.8 = 588\mathrm{N}$$

これより各位置でパイロットに作用する力は次のように求められる。

(A) $F = mg + m\frac{v^2}{r} = 588 + 1350 = 1938\mathrm{N}$（鉛直下向き） (答)

(B) $F = \sqrt{(mg)^2 + \left(m\frac{v^2}{r}\right)^2} = 1472\mathrm{N}$ (答)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{m\dfrac{v^2}{r}}{mg}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1350}{588}\right) = 66.5^\circ$$

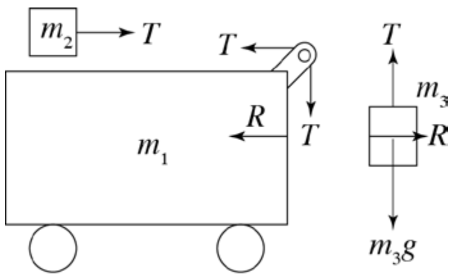
（鉛直下向きから 66.5°時計まわりの角をなす向き）（答）

(C) $F = m\dfrac{v^2}{r} - mg = 1350 - 588 = 762\,\mathrm{N}$（鉛直上向き）　(答)

５－２　演習問題

１．（解答例）

台車と物体に作用する力を描くと図のようになる(台車と物体 A は鉛直方向に運動しないので，その方向の力は割愛している）。T は糸の張力，R は台車と物体 B との接触部に作用する力である。



この図にもとづいて，台車と２つの物体について運動方程式を立てると次のようになる。物体 A の水平方向の加速度と物体 B の鉛直方向の加速度は等しいので，それを a_2 する。

台車：$m_1a_1 = -T - R$

物体 A：$m_2a_2 = T$

物体 B（水平方向）：$m_3a_1 = R$

物体 B（鉛直方向）：$m_3a_2 = m_3g - T$

張力 T と加速度 a_1，a_2 を求めると次のようになる。

$$T = \frac{m_2m_3}{m_2 + m_3}g$$

$$a_1 = -\frac{m_2m_3}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}g$$

$$a_2 = \frac{m_3}{m_2 + m_3}g$$

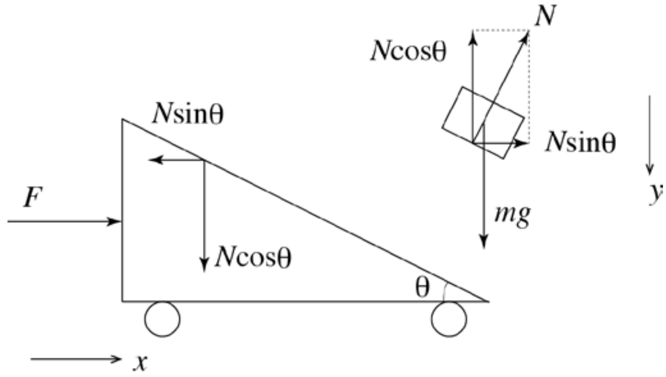
よって，台車は初速度 0 で，負の方向（左方向）に加速度の大きさが

$$\frac{m_2m_3}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}g$$

である等加速度直線運動を行う。(答)

２．

物体と斜面に作用する力は以下のようになる（斜面は鉛直方向に運動しないので，水平面からの抗力は割愛している）。



斜面と物体の運動方程式は次のようになる。

斜面：$Ma_1 = F - N\sin\theta$

物体（水平方向）：$ma_{2x} = N\sin\theta$

物体（鉛直方向）：$ma_{2y} = mg - N\cos\theta$

これらより，台車に対する相対加速度 a_{21} の x 方向成分 a_{21x} と y 方向成分 a_{21y} はそれぞれ次のようになる。

$$a_{21x} = a_{2x} - a_1 = \frac{N\sin\theta}{m} - \frac{F - N\sin\theta}{M}$$

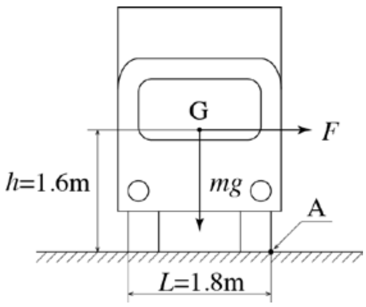
$$a_{21y} = a_{2y} = g - \frac{N\cos\theta}{m}$$

物体が斜面上で滑らないのは相対加速度が 0，すなわち $a_{21x}=a_{21y}=0$ となる場合である。これより，力 F を求めると次のようになる。

$$F = \left(1+\frac{M}{m}\right)N\sin\theta = \left(1+\frac{M}{m}\right)mg\tan\theta \quad \text{(答)}$$

３．

円軌道を走行するときのトラックの運動は等速円運動となる。トラックの速度を v とすると遠心力 F は次のように表される。



$$F=\frac{mv^2}{R}$$

地点 A を基準とする遠心力と重力の力のモーメントのバランスを考える。遠心力のモーメントが重力のモーメントよりも大きくなるとトラックはカーブの外側に転倒する。したがって，転倒しないためには次の関係が成り立てばよい。

$$F\times h\le mg\times\frac{L}{2}$$

$$\frac{mv^2h}{R}\le\frac{mgL}{2}$$

$$v\le\sqrt{\frac{gLR}{2h}}$$

よって，最大速度 v_{max} は次のように求められる。

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{gLR}{2h}}=\sqrt{\frac{9.8\times1.8\times120}{2\times1.6}}=25.7\text{m/s}=92.6\text{km/h}\quad\text{(答)}$$

４.

半径長さが $r=R$ にて一定であることから，円形面上の運動の加速度は次のように表される。

$$a_r=-R\omega^2$$

$$a_\theta=r\dot{\omega}$$

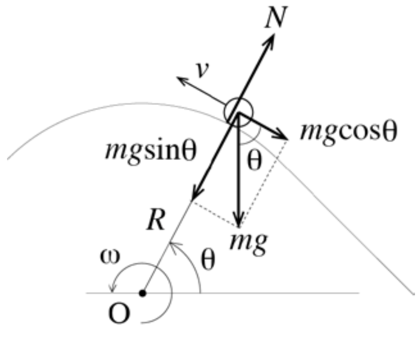
r 方向（半径方向）と θ 方向（接線方向）の運動方程式は次のように表される。

$$m\left(-R\omega^2\right)=N-mg\sin\theta$$

$$mr\frac{d\omega}{dt}=-mg\cos\theta$$

ここで，角度 θ と角速度 ω との間に

$$d\theta=\omega dt$$



という関係があることを考慮し，時間 t を消去すると，θ 方向の運動方程式を次のように書き換え

ることができる。

$$\omega d\omega = -\frac{g}{R}\cos\theta d\theta$$

さらに，経路に接する方向の速さ v と角速度ωの関係が

$$v = R\omega$$

であることから，運動方程式は次のように書き換えられる。

$$vdv = -gR\cos\theta d\theta$$

A 点（θ＝45°）において速さが v_0 であるので，B 点（θ＝90°）での速さを v とすると，上式

を積分して

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -gR\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta d\theta$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -gR\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

という関係が得られるので，B 点での速さ v は次のように求められる。

$$v = \sqrt{v_0^2 - gR\left(2-\sqrt{2}\right)} \qquad \text{（答）}$$

B 点において物体が面から離れるときには，垂直抗力が N＝0 となるので，r 方向の運動方程式から

$$mR\omega^2 = mg$$

という関係が得られる。これより速さ v を求めると

$$v = \sqrt{gR}$$

となるので，限界の速さ v_{0max} は次の関係を満たす。

$$\sqrt{gR} = \sqrt{v_{0\max}^2 - gR\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

よって，v_{0max} は次のように求められる。

$$v_{0\max} = \sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)gR} \qquad \text{(答)}$$

５．

物体の半径方向の位置は変化しないので，dr/dt＝0 である．運動方程式は次のようになる。

半径方向　$F_r = -mr\omega^2$　　　接線方向　$F_\theta = mr\dfrac{d\omega}{dt}$

この２つの力 F_r と F_θ の合力 F が最大静止摩擦力$\mu_s N$ よりも大きいと物体が動き出す。このとき，

次の関係が成り立つ。

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2} > \mu_s N = \mu_s mg$$

これより角速度ωが次の関係を満たすことがわかる。

$$\omega > \left\{ -\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\mu_s g}{r}\right)^2 \right\}^{1/4}$$

具体的に数値を代入すると，物体が動き出すときの角速度ωが次のように求められる。

$$\omega = \left\{ -(2\pi)^2 + \left(\frac{0.7 \times 9.8}{0.2}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} = 5.806 = 5.81\text{rad/s} \quad （答）$$

これを毎分の回転数 $n$rpm に換算すると

$$n = \frac{60\omega}{2\pi} = 55.4\text{rpm} \quad （答）$$

となり，1 分間に 55.4 回転するような角速度を超えて円板を回すと物体が動き出すことがわかる。

補足

物体とともに運動する座標系からこの運動を観測すると，物体には半径方向の遠心力と接線方向の慣性力が作用し，これらの合力と静止摩擦力がつり合った状態となる。このつり合いが崩れるとき，すなわち最大静止摩擦力よりも合力が大きくなったときに物体が運動を始めると考えることができる。

５－３　ドリル問題

問題１

金属球の運動方程式は次のように書ける。

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

これを t＝0 で v＝0 の初期条件の下で解くと速度 v が次のように求められる。

$$v = \frac{mg}{c}\left\{1 - \exp\left(-\frac{c}{m}t\right)\right\} = gT\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right\} = v_\infty\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right\}$$

これより，終端速度 v_∞と時定数 T が次のように求められる。

$$v_\infty = \frac{mg}{c} = \frac{2.0 \times 10^{-3} \times 9.8}{0.4} = 0.049\text{m/s} = 4.9\text{cm/s} \quad \text{(答)}$$

$$T = \frac{m}{c} = \frac{2.0 \times 10^{-3}}{0.4} = 0.005\text{s} = 5.0\text{ms} \quad \text{(答)}$$

※単位 ms はミリ秒のこと。

問題２

速度に比例する抗力を受ける物体の速度は次のように表される。

$$v=\frac{mg}{c}\left\{1-\exp\left(-\frac{c}{m}t\right)\right\}=gT\left\{1-\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right\}$$

よって，t＝5T のときの速度は次のように求められる。

$$v=gT\left\{1-\exp\left(-\frac{5T}{T}\right)\right\}=gT\left\{1-\exp(-5)\right\}=0.993gT \quad \text{(答)}$$

自由落下の速度は

$$v=gt$$

となるので，v＝0.993gT に達するまでの所要時間は

$$t=0.993T\approx T \quad \text{(答)}$$

と求められる。自由落下の場合，約 1/5 の時間で同じ速度となる。

問題３

速度に比例する抗力を受ける場合の速度は

$$v=\frac{dy}{dt}=gT\left(1-e^{-t/T}\right)$$

と表されるので，これを積分すると

$$y=\int gT\left(1-e^{-t/T}\right)dt=gT\left(t+Te^{-t/T}\right)+C$$

となり，初期条件（t＝0 で y＝0）から落下距離 y を求めることができる。

$$y=gT\left\{t-T\left(1-e^{-t/T}\right)\right\}$$

抗力を受けない自由落下では，落下距離 y は次のようになる。

$$y=\frac{1}{2}gt^2$$

よって，t＝5T までの落下距離の比は次のように求められる。

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{gT\left\{5T-T\left(1-e^{-5T/T}\right)\right\}}{\frac{1}{2}g\left(5T\right)^2}=\frac{4.01gT^2}{12.5gT^2}=0.321 \quad \text{(答)}$$

問題４

速度に比例する抗力を受ける物体の速度は，終端速度 v_∞と時定数 T を用いると次のように表される。

$$v=v_\infty\left\{1-\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right\}$$

時定数 T は次のように求められる。

$$T=\frac{m}{c}=\frac{0.5\times10^{-3}}{2.0\times10^{-3}}=0.25\text{s}$$

速度が v＝0.999v_∞に達するまでの時間は次のように求められる。

$$0.999v_\infty = v_\infty\left(1-e^{-t/T}\right)$$

$$t = -T\ln\left(1-0.999\right) = -0.25\times\ln\left(0.001\right) = 1.7267 = 1.73\mathrm{s}$$ (答)

また，初速度 0 で落下する際の移動距離 y は

$$y = gT\left\{t - T\left(1-e^{-t/T}\right)\right\}$$

となるので，T＝0.25，t=6.9 を代入すると、落下した距離を次のように求めることができる。

$$y = 9.8\times0.25\times\left\{1.7267 - 0.25\times\left(1-e^{-1.7267/0.25}\right)\right\} = 3.618 = 3.62\mathrm{m}$$ (答)

問題５

単振動の変位 x は次のように表される。

$$x = X\cos\omega_0 t$$

ただし，

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{32}{2.0}} = 4.0\mathrm{rad/s}$$

である。速度 v と加速度 a は次のように表される。

$$v = -X\omega_0\sin\omega_0 t$$

$$a = -X\omega_0^2\cos\omega_0 t$$

速度 v は

$$\sin\omega_0 t = -1$$

のときに最大値 v_{max} となる。

$$v_{max} = X\omega_0 = 0.5\times4.0 = 2.0\mathrm{m/s}$$ (答)

速度がこの半分になるのは

$$\sin\omega_0 t = -\frac{1}{2}$$

のときであり，このときの位相は

$$\omega_0 t = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\quad \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$$ （ただし，n は整数）

となるが，変位が正になるのは,

$$\omega_0 t = \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$$

の場合であるので，加速度 a は次のように求められる。

$$a=-X\omega_0{}^2\cos\left(\frac{11}{6}\pi+2n\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}X\omega_0{}^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.5\times 4.0^2=-6.93\mathrm{m/s^2}\quad(答)$$

問題６

ばね定数を k とすると，振動の周期は

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

とかける。質量 m_1 と周期 T_1 がわかっていることから，ばね定数 k が

$$k=\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 m=\left(\frac{2\pi}{1.0}\right)^2\times 0.8=31.58\mathrm{N/m}$$

と求められる。これより，質量 m_2＝1.2kg の場合の周期は次のように求められる。

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1.2}{31.58}}=1.22\ \mathrm{s}\quad(答)$$

問題７

周期 T_1 は質量 m とばね定数 k_1 を用いて次のように表される。

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$$

同様に周期 T_2 は次のように表される。

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$$

$T_2=2T_1$ であることから，k_2/k_1 を求めると次のようになる。

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}=2\times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$$

$$\frac{k_2}{k_1}=\frac{m}{4m}=\frac{1}{4}=0.25\quad(答)$$

k_2 のばねを用いて周期を T_1 とするための質量 m'は次のように求められる。

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}=2\pi\sqrt{\frac{m'}{k_2}}$$

$$m'=\frac{k_2}{k_1}m=\frac{m}{4}\quad(答)$$

問題８

(a)　物体の変位が x であるとき，ばねが物体に及ぼす力 F は次のように表される。

$$F=-k_1x+\left(-k_2x\right)=-\left(k_1+k_2\right)x$$

よって，物体の運動方程式は次のように表される。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\left(k_1+k_2\right)x$$

これより周期 T は次のように求められる。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}\quad\text{(答)}$$

(b)　物体が変位 x だけ変位しているときのばねの伸びを x_1，x_2 とする。ばねの力 F は，２つのばねに共通となるので、ばねの伸びは

$$x_1=\frac{-F}{k_1}\qquad x_2=\frac{-F}{k_2}$$

と表される。変位 x は $x=x_1+x_2$ であるので，

$$x=\frac{-F}{k_1}+\frac{-F}{k_2}=-\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}F$$

となり，ばねが物体に及ぼす力 F を変位 x で表すと次のようなる。

$$F=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x$$

よって，物体の運動方程式は次のように表される。

$$m\frac{d^2x}{dt}=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x$$

これより周期 T は次のように求められる。

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\left(k_1+k_2\right)m}{k_1k_2}}\quad\text{(答)}$$

問題９

(1)　糸の張力を F とすると，物体１と物体２に作用する力のつり合いは次のように表される。

物体１（水平方向）$F-kx_0=0$

物体２（鉛直方向）$mg-F=0$

これより，ばねの伸び x_0 は次のように求められる。

$$x_0=\frac{mg}{k}\quad\text{(答)}$$

(2)　２つの物体の運動方程式を書くと次のようになる。

物体１（水平方向）$M\dfrac{d^2x}{dt^2}=F-k\left(x_0+x\right)$

物体２（鉛直方向）$m\dfrac{d^2y}{dt^2}=mg-F$

物体１の水平方向変位 x と物体２の鉛直方向変位 y は等しいことと(1)の結果を考慮し，２つの運動方程式から糸の張力 F を消去すると次のような運動方程式が得られる。

$$\left(M+m\right)\frac{d^2y}{dt^2}=-ky$$

t＝0 で y＝X，dy/dt＝0（初速度 0）という初期条件の下で上記の運動方程式を解くと変位 y を求めることができる。

$$y=Y\cos\omega_0 t$$

ただし，固有角振動数ω_0は，次の通りである。

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

以上より，この振動の周期 T は次のように求められる。

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$ (答)

(3)　物体１の変位 x は y と等しいので

$$x=Y\cos\omega_0 t$$

であり，速度 v は

$$v=\frac{dx}{dt}=-Y\omega_0\sin\omega_0 t$$

となる。よって，$\sin\omega_0 t$＝−1，すなわち位相が

$$\omega_0 t=\frac{3}{2}\pi+2n\pi$$ （n は整数）

のときに速度 v は最大となり，最大速度 v_{max} は次のように求められる。

$$v_{max}=Y\omega_0$$ (答)

速度 v が最大となる位置は

$$x_{max}=Y\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)=0$$ (答)

となり，静止状態のときの位置であることがわかる。

(4)　物体２の運動方程式から，張力 F は次のように表される。

$$F=mg-m\frac{d^2y}{dt^2}=mg+mY\omega_0^2\cos\omega_0 t=mg+\frac{m}{m+M}kY\cos\omega_0 t$$

よって，張力 F は，$\cos\omega_0 t$＝1 のときに最大となり，最大値 F_{max} は，次のように求められる。

$$F_{max}=mg+\frac{m}{M+m}kY \quad (答)$$

このとき位相は,

$$\omega_0 t=2n\pi \quad （n は整数）$$

であることから，変位 y と速度 v を求めると次のようになる。

$$y=Y\cos\omega_0 t=Y \quad (答)$$

$$v=-Y\omega_0\sin\omega_0 t=0 \quad (答)$$

張力が最大となるのは，物体２が最下点に達したときである。

問題 10

単振り子の周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

と表されるので，質量 m と周期 T を代入すると糸の長さが次のように求められる。

$$L=\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 g=\left(\frac{1.5}{2\pi}\right)^2\times 9.8=0.5585=0.559\ \mathrm{m}\ （答）$$

振り子の周期は物体の質量に依存しないので，物体の質量を半分にしても周期は変わらない。

$$T_2=T_1=1.5\mathrm{s} \quad (答)$$

糸の長さを２倍にした場合の周期は次のように求められる。

$$T_3=2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{2\times 0.5585}{9.8}}=2.12\ \mathrm{s} \quad (答)$$

問題 11

問題の図では、次のような力のつり合いが成り立つ。

$$mg-kx_0=0$$

つり合いの位置からの物体の変位を x とすると，運動方程式は次のように書ける。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\left(x_0+x\right)$$

ここで，力のつり合いの関係を考慮すると，運動方程式は次のように書き換えられる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-kx_0-kx=-kx$$

よって，この運動は単振動であり，初期条件（t=0 で $x=X, v=0$）から変位 x は次のように求められる。

$$x = X\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$ (答)

振幅が X であることがわかる。固有角振動数ω_0，固有振動数 f，周期 T は，それぞれ次の通りとなる。

固有角振動数：$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　固有振動数：$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　周期：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　(答)

また，単振動の変位 x と速度 v は固有角振動数を用いると

$$x = X\cos\omega_0 t$$

$$v = -X\omega_0\sin\omega_0 t$$

と表される。つり合いの位置（x＝0）を通過するときは，

$$\omega_0 t = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$ （n は自然数）

となることから，速度は次のように表される。

n が奇数の場合

$$v = -X\sqrt{\frac{k}{m}}$$ (答)

n が偶数の場合

$$v = X\sqrt{\frac{k}{m}}$$ (答)

５－３　演習問題

１.

(1)　ペットボトル内部の空気の質量は$\rho_a V$ なので，ペットボトルと空気の質量の和は次のように表される。

$$M = m + \rho_a V$$ (答)

(2)　ペットボトルが押しのける水の体積が V であるので，浮力 f_B は次のように表される。

$$f_B = \rho_w V g$$ (答)

(3)　ペットボトルには，鉛直上向きに浮力が，鉛直下向きに重力と抗力が作用するので，運動方程式は次のように表される。

$$M\frac{dv}{dt} = f_B - Mg - f_D$$

$$\left(m+\rho_a V\right)\frac{dv}{dt}=\rho_w Vg-\left(m+\rho_a V\right)g-cv$$ (答)

(4)　(3) で求めた運動方程式を $t=0$ で $v=0$ という初期条件の下で解く。まず，運動方程式を次のように変形する。

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{c}{m+\rho_a V}\left\{v-\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\right\}$$

これを積分すると次のような解が得られる（C は積分定数）。

$$v=\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}+C\exp\left(-\frac{c}{m+\rho_a V}t\right)$$

初期条件から

$$C=-\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}$$

となるので，速度 v は次のように表される。

$$v=\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\left\{1-\exp\left(-\frac{c}{m+\rho_a V}t\right)\right\}$$

時刻 $t=0$ で手を離した位置を原点として鉛直上方に x 座標を定めるとペットボトルの位置 x は，速度 v を積分することにより次のように求められる。

$$\begin{aligned}x&=\int_0^t v\,dt\\&=\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\left\{t+\left(\frac{m+\rho_a V}{c}\right)\exp\left(-\frac{c}{m+\rho_a V}t\right)\right\}-\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\left(\frac{m+\rho_a V}{c}\right)\\&=\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\left[t+\left(\frac{m+\rho_a V}{c}\right)\left\{\exp\left(-\frac{c}{m+\rho_a V}t\right)-1\right\}\right]\end{aligned}$$

以上より，ペットボトルが水面に達したときの速度 v_s と沈めた深さ h は次のように求められる。

$$v_s=\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\left\{1-\exp\left(-\frac{c}{m+\rho_a V}\times\frac{m+\rho_a V}{c}\right)\right\}=\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$ （答）

$$\begin{aligned}h&=\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\left[\frac{m+\rho_a V}{c}+\left(\frac{m+\rho_a V}{c}\right)\left\{\exp\left(-\frac{c}{m+\rho_a V}\times\frac{m+\rho_a V}{c}\right)-1\right\}\right]\\&=\frac{\left(\rho_w V-\rho_a V-m\right)g}{c}\left(\frac{m+\rho_a V}{c}\right)\left(\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

(答)

２．

x 方向と y 方向の運動方程式を立てると次のようになる。

$$m\frac{dv_x}{dt}=-cv_x$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-mg-cv_y$$

初速度を考慮して，運動方程式を解くと，x 方向と y 方向の速度が次のように求められる。

$$v_x=\left(v_0\cos\theta\right)\exp\left(-\frac{c}{m}t\right)$$

$$v_y=-\frac{mg}{c}+\left(v_0\sin\theta+\frac{mg}{c}\right)\exp\left(-\frac{c}{m}t\right)$$

これらの速度を積分して変位を求めると次のようになる。

$$x=\frac{mv_0\cos\theta}{c}\left\{1-\exp\left(-\frac{c}{m}t\right)\right\}$$

$$y=-\frac{mg}{c}t+\frac{m}{c}\left(\frac{mg}{c}+v_0\sin\theta\right)\left\{1-\exp\left(-\frac{c}{m}t\right)\right\}$$

(1)　t→∞の極限を考えると，

$$x\to\frac{mv_0\cos\theta}{c}$$

となる。無限に長い時間が経過しないとこの極限値には到達しないので,

$$x_{max}<\frac{mv_0\cos\theta}{c}$$

という関係があるといえる。(答)

(2)　最高到達点では，$v_y=0$ となるので，このときの時刻 t は

$$t=-\frac{m}{c}\ln\left(\frac{\frac{mg}{c}}{v_0\sin\theta+\frac{mg}{c}}\right)$$

と求められる。これを y 方向の変位に代入すると，最高点の高さ y_p が次のように求められる。

$$y_p=-\frac{mg}{c}\times\left\{-\frac{m}{c}\ln\left(\frac{\frac{mg}{c}}{v_0\sin\theta+\frac{mg}{c}}\right)\right\}+\frac{m}{c}\left(\frac{mg}{c}+v_0\sin\theta\right)\left(1-\frac{\frac{mg}{c}}{v_0\sin\theta+\frac{mg}{c}}\right)$$

$$=\frac{m}{c}\left\{\frac{mg}{c}\ln\left(\frac{\frac{mg}{c}}{v_0\sin\theta+\frac{mg}{c}}\right)+v_0\sin\theta\right\}$$

(答)

同様に x 方向の変位に代入すると，水平方向位置 x_p が次のように求められる。

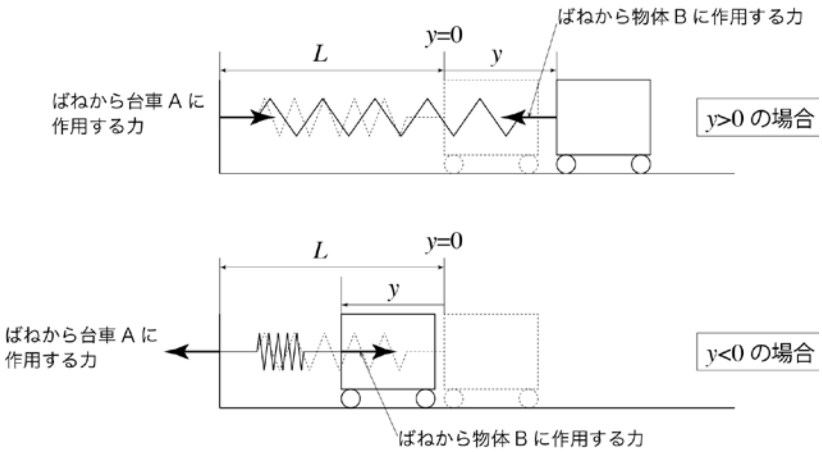
$$x_p = \frac{mv_0\cos\theta}{c}\left(1 - \frac{\frac{mg}{c}}{v_0\sin\theta + \frac{mg}{c}}\right)$$ (答)

水平方向速度 v_{xp} は次のように求められる。

$$v_{xp} = \left(v_0\cos\theta\right)\left(\frac{\frac{mg}{c}}{v_0\sin\theta + \frac{mg}{c}}\right)$$ (答)

３．

(1)　図のように，ばねの長さの変化量 y の正負によって台車 A と物体 B に作用するばねの力の向きが変化する。



これを考慮すると，運動方程式はそれぞれ次のように表される。

$$m_A\frac{d^2x_A}{dt^2} = F + ky$$ （答）

$$m_B\frac{d^2x_B}{dt^2} = -ky$$ (答)

(2)　台車 A に対する物体 B の相対加速度 aBA は，地上から見た台車 A と物体 B の加速度 a_A と a_B の差であるので、

$$a_{BA} = a_B - a_A = \frac{d^2x_B}{dt^2} - \frac{d^2x_A}{dt^2}$$

と表される。台車 A と物体 B の変位 x_A，x_B とばねの自然長 L，ばねの長さの変化量 y との間には次の関係が成り立つ。

$$x_B - x_A = L + y$$

これを時間で２回微分すると次の関係が得られる。

$$\frac{d^2x_B}{dt^2} - \frac{d^2x_A}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

よって、相対加速度は

$$a_{BA}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

と表される。台車 A 上での運動を考えるには，ばねの長さの変化量 y を用いて物体 B の運動方程式を書けばよい。(1)で得られた２つの運動方程式から x_A と x_B を消去することで、台車 A 上での物体 B の運動方程式が次のように得られる。

$$m_B\frac{d^2y}{dt^2}=-\left(\frac{m_B}{m_A}+1\right)ky-\left(\frac{m_B}{m_A}\right)F \quad (答)$$

(3)　(2)で得られた運動方程式を変形すると次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{(m_A+m_B)k}{m_Am_B}y-\frac{F}{m_A}$$

これを次のように変形する。

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{(m_A+m_B)k}{m_Am_B}\left\{y+\frac{m_BF}{(m_A+m_B)k}\right\}$$

さらに，{　}内を

$$z=y+\frac{m_BF}{(m_A+m_B)k}$$

とおいて、書き換えると

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{(m_A+m_B)k}{m_Am_B}z$$

という微分方程式が得られる。ここで，

$$\omega_0=\sqrt{\frac{(m_A+m_B)k}{m_Am_B}}$$

とおくと，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\omega_0^2z$$

となり，この微分方程式は，単振動の運動方程式と同一であることがわかる。したがって，y は

$$y=-\frac{m_BF}{(m_A+m_B)k}+A\cos\omega_0t+B\sin\omega_0t$$

と表されるので，$t=0$ で，$y=0$，$dy/dt=0$ という初期条件から A と B を求めると

$$A=\frac{m_BF}{(m_A+m_B)k},\quad B=0$$

となる。これより，y は次のように求められる。

$$y = \frac{m_B F}{(m_A + m_B)k}(\cos\omega_0 t - 1)$$

以上の結果から，台車 A 上での物体 B の運動は単振動であり，振幅，振動の中心，周期が次のようになる。(答)

振幅 $\dfrac{m_B F}{(m_A + m_B)k}$

振動の中心 $z = -\dfrac{m_B F}{(m_A + m_B)k}$

振動の周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_A m_B}{(m_A + m_B)k}}$

４．

(1)　エレベータとともに運動する座標系から観察すると物体の運動方程式は次のように表される。

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(mg + ma)\sin\theta$$

これを整理すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g+a}{L}\theta$$

となり，固有角振動数は次のように表される。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g+a}{L}}$$

初期角変位を考慮してこの運動方程式を解くと、解は次のようになる。

$$\theta = \theta_o \cos\omega_0 t = \theta_o \cos\sqrt{\frac{g+a}{L}}t$$

よって，周期と振幅は次のように表される。

周期　$T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g+a}}$　(答)

振幅　$X_1 = \theta_0$　(答)

(2)　台車とともに運動する座標系から観察すると物体の運動方程式は次のように表される。

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta - ma\cos\theta$$

これを整理すると

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\theta-ma$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{L}\theta-\frac{a}{L}=-\frac{g}{L}\left(\theta+\frac{a}{g}\right)$$

となり、固有各振動数は次のように表される。

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{L}}¥$$

初期角変位を考慮してこの運動方程式を解くと、解は次のようになる。

$$\theta=-\frac{a}{g}+\left(\theta_0+\frac{a}{g}\right)\cos\omega_0 t=-\frac{a}{g}+\left(\theta_0+\frac{a}{g}\right)\cos\omega_0\sqrt{\frac{g}{L}}t$$

よって、周期と振幅は次のように表される。

周期　$T_2=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$　(答)

振幅　$X_2=\theta_0+\frac{a}{g}$　(答)

５.

(1)　物体は円軌道に沿って運動するので,半径方向と回転方向の運動方程式は次のように書ける。

半径方向　$-mR\omega^2=mg\cos\theta-N$

回転方向　$mR\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$

角変位θが十分に小さいとき，運動方程式は次のように書き換えられる。

半径方向$-mR\omega^2=mg-N$　(答)

回転方向$mR\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\theta$　(答)

(2)　回転方向の運動方程式を次のように変形する。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{R}\theta$$

これは例題５-２０の単振り子の運動方程式と同じ形をしており，物体の運動は単振動である。その固有角振動数ω_0は

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

となる。よって，周期Ｔは次のように求められる。

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\quad(答)$$

(3)　(2)の運動方程式を解くと，式 5-39 と同じ形となるので，角変位θは次のように表される。

$$\theta=\theta_0\cos\omega_0 t=\theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t$$

角速度ωは次のように求められる。

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\theta_0\cos\omega_0 t\right)=-\theta_0\omega_0\sin\omega_0 t$$

よって，円軌道に接する方向の速度は次のように求められる。

$$v=R\omega=-R\theta_0\omega_0\sin\omega_0 t$$

速度が最大となるのは，$\sin\omega_0 t=-1$（$\cos\omega_0 t=0$）のときであり，最大値は

$$v_{max}=R\theta_0\omega_0=R\theta_0\sqrt{\frac{g}{R}}=\theta_0\sqrt{gR}\quad(答)$$

となる。

(4)　半径方向の運動方程式から，垂直抗力は次のように表される。

$$N=mg+mR\omega^2$$

速度が最大となるのは，$\sin\omega_0 t=-1$（$\cos\omega_0 t=0$）のときなので，角変位が$\theta=0$の位置である。この位置での抗力は次のように求められる。

$$N=mg+mR\omega^2=mg+mR\theta_0^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t=mg\left(1+\theta_0^2\right)\quad(答)$$