

「工学系の力学」第7章 問題解答

7-1 ドリル問題

問題1 速さ 10m/s で運動している質量 50kg の物体のもつ運動量は
 $50\text{kg}\times 10\text{m/s}=500\text{kg}\cdot\text{m/s}$

である。よってこの物体を停止させるのに必要な力積も

$$500\text{kg}\cdot\text{m/s}=500\text{N}\cdot\text{s}$$

である。よって求める力は

$$\frac{500}{10}=50\text{N} \quad (\text{答})$$

問題2 質点 A, B の衝突後の速度をそれぞれ v'_A, v'_B とすると、
運動量保存の法則より

$$100\times 1+50\times(-2)=100v'_A+50v'_B$$

$$0=100v'_A+50v'_B$$

すなわち

$$0=2v'_A+v'_B \quad \text{よって} \quad v'_B=-2v'_A \quad \cdots\text{①}$$

反発係数を e とすると

$$e=-\frac{v'_B-v'_A}{(-2)-1}$$

①を代入して

$$e=-\frac{-2v'_A-v'_A}{-3}=-v'_A$$

$$e=1 \quad \text{のとき,} \quad v'_A=-1\text{m/s} \quad v'_B=2\text{m/s}$$

$$e=0.5 \quad \text{のとき,} \quad v'_A=-0.5\text{m/s} \quad v'_B=1\text{m/s} \quad (\text{答})$$

問題3 人が飛び出す前のボートと人の運動量の和は 0 である。求めるボートの速度を v_B とすると、全運動量保存の法則より

$$0=200\times v_B+60\times 3$$

$$v_B=\frac{-180}{200}=-0.9$$

よって、人の飛び出した向きとは逆に 0.9m/s (答)

問題4 角運動量の定義より、求める大きさは

$$\begin{aligned} & 3\text{m}\times 1\text{kg}\times 5\text{m/s}\times \sin 30^\circ \\ & =7.5\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

問題 5 両質点の質量を m とし、質点 A, B の衝突後の速度を v_1' , v_2' とすると、運動量保存の法則より

$$\begin{aligned}m \times 5 + m \times 3 &= m \times v_1' + m v_2' \\8 &= v_1' + v_2' \\v_2' &= 8 - v_1' \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

反発係数を e とすると

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{3 - 5}$$

①を代入し、また完全弾性衝突であることから $e=1$ として

$$\begin{aligned}1 &= -\frac{8 - v_1' - v_1'}{-2} \\8 - 2v_1' &= 2 \\v_1' &= 3\text{m/s}, v_2' = 5\text{m/s} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

問題 6 受けた力積は、運動量の変化に等しいことより

$$\text{質点 A の受けた力積} = 2\text{kg}(3\text{m/s} - 5\text{m/s}) = -4\text{kg}\cdot\text{m/s} = -4\text{N}\cdot\text{s} \quad (\text{答})$$

$$\text{質点 B の受けた力積} = 2\text{kg}(5\text{m/s} - 3\text{m/s}) = 4\text{kg}\cdot\text{m/s} = 4\text{N}\cdot\text{s} \quad (\text{答})$$

問題 7 完全塑性衝突より、衝突後のそれぞれの質点の速度は等しい。
その速度を v' とすると、運動量保存の法則より

$$\begin{aligned}4\text{kg} \times 8\text{m/s} + 1\text{kg} \times 4\text{m/s} &= 4 \times v' + 1 \times v' \\5v' &= 36 \\v' &= 7.2\text{m/s} \quad \text{どちらも } 7.2\text{m/s} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

問題 8 質点 A の受けた力積 $= 4\text{kg}(7.2\text{m/s} - 8\text{m/s}) = -3.2\text{kg}\cdot\text{m/s} = -3.2\text{N}\cdot\text{s} \quad (\text{答})$

$$\text{質点 B の受けた力積} = 1\text{kg}(7.2\text{m/s} - 4\text{m/s}) = 3.2\text{kg}\cdot\text{m/s} = 3.2\text{N}\cdot\text{s} \quad (\text{答})$$

問題 9 求める角運動量は、 $10\text{kg}\cdot\text{m}^2 \times 0.2\text{rad/s} = 2\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \quad (\text{答})$

角運動量の時間変化率が力のモーメントに等しいから、求める力のモーメントは

$$\frac{10\text{kg}\cdot\text{m}^2 \times 0.1\text{rad/s}}{1\text{s}} = 1\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \quad (\text{答})$$

問題 10 全角運動量保存の法則より、求める角速度を ω [rad/s] とすると

$$\begin{aligned}5\text{kg}\cdot\text{m}^2 \times 0.3\text{rad/s} &= 5\text{kg}\cdot\text{m}^2 \times \omega + 10\text{kg}\cdot\text{m}^2 \times \omega \\ \omega &= 0.1\text{rad/s} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

7-1 演習問題

1.

はじめに落下した際、床に衝突する直前の速度 v_1 は、重力加速度を g とすると

$$v_1 = \sqrt{2g \times 1\text{m}} = \sqrt{2g}$$

1 回目のバウンド直後の速度 v_1' は反発係数を e とすると $v_1' = -e\sqrt{2g}$

よって、2 回目のバウンド直前の速度 $v_2 = e\sqrt{2g}$ となり

2 回目のバウンド直後の速度は $v_2' = -e^2\sqrt{2g}$

この時のはね返り高さが $64\text{cm} = 0.64\text{m}$ であるから

$$100g \times g \times 0.64\text{m} = \frac{1}{2} \times 100g \ e^4 \times 2g$$
$$e = 0.894 \quad (\text{答})$$

2.

運動量保存の法則より

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad \cdots \textcircled{1}$$

反発係数の定義より

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (e+1)(v_1 - v_2) \quad (\text{答})$$

$$v_2' = v_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (e+1)(v_1 - v_2) \quad (\text{答})$$

3.

運動量保存の法則より、求める板の速度を \mathbf{V} とすると

$$\mathbf{0} = M\mathbf{V} + m\mathbf{v}$$

$$\text{より } \mathbf{V} = -\frac{m\mathbf{v}}{M} \quad (\text{答})$$

板が受けた力積は運動量の変化に等しいから

$$M \times \left(-\frac{m\mathbf{v}}{M} \right) - \mathbf{0} = -m\mathbf{v} \quad (\text{答})$$

4.

$$mr^2\omega \quad (\text{答})$$

5.

角運動量は $mP\dot{\theta}$ で表される。

その変化率 ($=mP\ddot{\theta}$) が力のモーメント ($=-mgl\sin\theta$) に等しいことから、

$$mP \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

より, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ (答)

7-2 ドリル問題

問題 1 10mm=0.01m 伸ばすのに 100N の力を要するから,

ばね定数 k は $k = \frac{100\text{N}}{0.01\text{m}} = 10000\text{N/m}$ (答)

よって, 求める仕事は $\frac{1}{2}(10000\text{N/m})(0.01\text{m})^2 = 0.5\text{J}$ (答)

問題 2 ばね定数 k は $k = \frac{0.5\text{N}}{0.1\text{m}} = 5\text{N/m}$

自然長から 0.02m 伸ばすのに要する仕事は

$$\frac{1}{2} \times 5\text{N/m}(0.02\text{m})^2 = 0.001\text{J} \quad (\text{答})$$

自然長から 0.06m 伸ばすのに要する仕事は

$$\frac{1}{2} \times 5\text{N/m}(0.06\text{m})^2 = 0.009\text{J}$$

よって, 0.02m 伸ばしたところからさらに 0.04m 伸ばして合計 0.06m の伸びにするのに要する仕事は $0.009 - 0.001 = 0.008\text{J}$ (答)

この時ばねの持つポテンシャルエネルギーは 0.009J (答)

問題 3 動摩擦力は $\mu mg = 0.1 \times 10\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 = 9.8\text{N}$

この力がした仕事は $9.8\text{N} \times 1\text{m} = 9.8\text{J}$ (答)

動摩擦力がした仕事は $9.8\text{N} \times (-1\text{m}) = -9.8\text{J}$ (答)

問題 4 質量 2kg で重心まわりの慣性モーメントが $1\text{kg} \cdot \text{m}^2$ より, 半径は 1m である。重心の速さが 1m/s のとき, 回転の角速度 ω は

$$\omega = \frac{1\text{m}}{2 \times \pi \times 1\text{m}} = 0.159\text{rad/s}$$

よって, 求める運動エネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 &= \frac{1}{2} \times 2\text{kg} \times (1\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(1\text{kg} \cdot \text{m}^2)(0.159\text{rad/s})^2 = 1.0126 \\ &= 1.01\text{J} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

問題 5 1 分間 30m の速さであるので 0.5m/s

求める動力は $500\text{N} \times 0.5\text{m/s} = 250\text{W}$ (答)

問題 6 (1) 必要な力は質点に作用する重力の $\frac{0.3}{0.9} = \frac{1}{3}$ 倍

移動距離は 3 倍となるから,

$$\text{てこに作用させる力は } 10\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \times \frac{1}{3} = 32.6\text{N} \quad (\text{答})$$

$$\text{移動距離は } 0.12\text{m} \times 3 = 0.36\text{m} \quad (\text{答})$$

$$(2) \text{ てこにした仕事は } 10\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \times \frac{1}{3} \times 0.12\text{m} \times 3 = 11.76\text{J} \quad (\text{答})$$

これが質点のもつポテンシャルエネルギー増加分に等しい。

$$\text{ポテンシャルエネルギー増加分は } 11.76\text{J} \quad (\text{答})$$

問題 7 毎秒水流が失うポテンシャルエネルギーを求めればよい。

$$\frac{5000 \times 1000\text{kg}}{60} \times 9.8\text{m/s}^2 \times 50\text{m}$$
$$= 4.08 \times 10^7 \text{W} = 4.08 \times 10^4 \text{kW} \quad (\text{答})$$

$$\text{問題 8} \quad \frac{50 \times 1000\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \times 10\text{m}}{5000\text{W}} = 980\text{s} \quad (\text{答})$$

問題 9 $1500\text{rpm} = 25 \times 2\pi = 50\pi \text{rad/s}$
求める力のモーメント N は

$$N = \frac{90000\text{W}}{50\pi} = 573\text{N} \cdot \text{m} \quad (\text{答})$$

問題 10 力積は運動量の差に等しいから

$$0.2\text{kg} \times \left\{ \frac{80000\text{m}}{3600\text{s}} - \left(-\frac{100000\text{m}}{3600\text{s}} \right) \right\} = 10\text{kg} \cdot \text{m/s} = 10\text{N} \cdot \text{s} \quad (\text{答})$$

$$\text{平均衝撃力は } \frac{10\text{kg} \cdot \text{m/s}}{0.05\text{s}} = 200\text{N} \quad (\text{答})$$

$$\text{問題 11} \quad \frac{1}{2} \times 0.2\text{kg} \times \left\{ \left(\frac{100000\text{m}}{3600\text{s}} \right)^2 - \left(\frac{80000\text{m}}{3600\text{s}} \right)^2 \right\} = 27.8\text{J} \quad (\text{答})$$

7-2 演習問題

1.

ポテンシャルエネルギーは

$$100 \times 100\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \times 100\text{m} = 9.8 \times 10^7 \text{J} \quad (\text{答})$$

1kg の灯油の燃焼エネルギーは

$$45\text{kcal/g} \times 1000\text{g} = 45 \times 1000 \times 4.2\text{J} \times 1000$$
$$= 1.89 \times 10^8 \text{J}$$

$$\text{よって } \frac{9.8 \times 10^7 \text{J}}{1.89 \times 10^8 \text{J}} = 0.519\text{kg} \quad (\text{答})$$

2.

$$\frac{100\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \times 3600\text{m}}{3600} \times \sin 10^\circ = 1.7052 \times 10^4 \text{W}$$

$$1\text{PS} = 735.5\text{W} \text{より} \quad 23.2\text{PS} \quad (\text{答})$$

3.

(1) 運動量保存の法則より, 衝突後の速さを v' とすると

$$1\text{kg} \times 5\text{m/s} + 2\text{kg} \times 2\text{m/s} = (1\text{kg} + 2\text{kg}) \times v' \quad v' = 3\text{m/s} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}(1\text{kg}) \times (5\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(2\text{kg}) \times (2\text{m/s})^2 - \frac{1}{2}(3\text{kg}) \times (3\text{m/s})^2$$

$$= 12.5 + 4 - 13.5 = 3\text{J} \quad (\text{答})$$

4.

$$100\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \times 100\text{m} = 9.8 \times 10^5 \text{J} \quad (\text{答})$$

$$\frac{9.8 \times 10^5 \text{J}}{120\text{s}} = 8166\text{W} = 8.17\text{kW} \quad (\text{答})$$

5.

$$(1) \quad \frac{1}{2}(0.2\text{kg}) \times \left(\frac{150000\text{m}}{3600\text{s}} \right)^2 = 174\text{J} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad 1\text{cal} = 4.2\text{J} \text{ とすると} \quad \frac{174}{100 \times 4.2} = 0.414^\circ\text{C} \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad \frac{1}{2}(0.2\text{kg}) \left\{ \left(\frac{150000\text{m}}{3600\text{s}} \right)^2 - \left(\frac{20000\text{m}}{3600\text{s}} \right)^2 \right\} = 170.5 = 171\text{J} \quad (\text{答})$$

$$(4) \quad 0.2\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 \left\{ \frac{20000\text{m}}{3600\text{s}} - \left(\frac{150000\text{m}}{3600\text{s}} \right) \right\} = 555\text{kg} \cdot \text{m/s} \quad (\text{答})$$

$$(5) \quad \frac{555\text{kg} \cdot \text{m/s}}{0.001\text{s}} = 5.55 \times 10^5 \text{N} \quad (\text{答})$$

7-3 ドリル問題

問題1 つり合いの位置を重力によるポテンシャルエネルギーの基準にとると, 力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}mv^2 \text{より} \quad v = l\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{答})$$

問題2 最下点の位置を重力によるポテンシャルエネルギーの基準にとると, 力学的エネルギー保存の法則より

$$mgl(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_0)} \quad (\text{答})$$

問題 3 ばね定数 k は $k = \frac{100\text{N}}{0.01\text{m}} = 10000\text{N/m}$

力学的エネルギー保存の法則より，ばねの最大縮み量を x とすると

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(1\text{kg})(0.1\text{m/s})^2$$

$$x = 0.001\text{m} \quad (\text{答})$$

問題 4 $\frac{1}{2}kx^2 = mgx$ より $x = \frac{2mg}{k}$

ばね定数 k は $k = \frac{75\text{N}}{0.005\text{m}} = 15000\text{N/m}$

$$x = \frac{2 \times 0.5\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2}{15000} = 6.53 \times 10^{-4}\text{m} \quad (\text{答})$$

問題 5 問題 2 の結果を用いる。

$$1\text{m/s} = \sqrt{2 \times 9.8\text{m/s}^2 \times 1\text{m} \times (1 - \cos\theta_0)}$$

より $\theta_0 = 18.4^\circ \quad (\text{答})$

問題 6 式 7-95 より

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{1\text{kg} \times 2\text{kg}}{1\text{kg} + 2\text{kg}} (1 - 0.5^2) (3\text{m/s} - 2\text{m/s})^2$$

$$= 0.25\text{J} \quad (\text{答})$$

問題 7 $\frac{2}{3} \sqrt{3 \times 9.8\text{m/s}^2 \times 1\text{m}} = 3.61\text{m/s} \quad (\text{答})$

問題 8 $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8\text{m/s}^2 \times 1\text{m}} = 4.43\text{m/s} \quad (\text{答})$$

問題 9 $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

$$h = \frac{v^2}{2g} = 1.2755\text{m}$$

斜面方向には $\sqrt{2}h = 1.80\text{m}$ 進む。 (答)

問題 10 $\frac{1}{2}m\left(\frac{150000}{3600}\right)^2 = mgh$ より $h = 88.57 = 88.6\text{m}$ (答)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh' + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 \quad \text{より} \quad h' = \frac{3}{4}h = 66.42 = 66.4\text{m} \quad (\text{答})$$

7-3 演習問題

1.

7-1 演習問題 2 の結果を用いて

$$v_1' = 4\text{m/s} - \frac{1}{2}(0.8+1)2\text{m/s} = 2.2\text{m/s}$$

$$v_2' = 2\text{m/s} + \frac{1}{2}(0.8+1)2\text{m/s} = 3.8\text{m/s}$$

$$\frac{1}{2}(1\text{kg})\times(4\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(1\text{kg})\times(2\text{m/s})^2 - \left\{ \frac{1}{2}(1\text{kg})\times(2.2\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(1\text{kg})(3.8\text{m/s})^2 \right\}$$

$$= 0.36\text{J} \quad (\text{答})$$

式 7-95 を用いてもよい。

2.

例題 7-33 の解答の $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$ において, $h = s \sin \alpha$

$$\text{として} \quad v = \frac{2}{3}\sqrt{3gs \sin \alpha} \quad (\text{答})$$

3.

求める仕事は,

$$\int_R^\infty F dr = \int_R^\infty \frac{mgR^2}{r^2} dr = mgR^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = mgR \quad (\text{答})$$

$$\text{初速度を } v \text{ とすると} \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgR \quad \text{より} \quad v = \sqrt{2gR} \quad (\text{答})$$

4.

(1) α 回転することによりばねに蓄えられる弾性エネルギー U は、

$$U = \frac{1}{2}k\alpha^2 \quad (\text{答})$$

(2) 錘と棒のポテンシャルエネルギー V_1, V_2 は、

$$V_1 = -mg \cdot \left(\sqrt{(2l)^2 + (2l)^2} - \sqrt{(2l \cos \alpha)^2 + \{2l(1 - \sin \alpha)\}^2} \right)$$

$$= -2\sqrt{2}mgl \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$V_2 = Mg \cdot l \sin \alpha$$

全ポテンシャルエネルギー

$$\Pi = U + V_1 + V_2 = \frac{1}{2}k\alpha^2 + Mgl \sin \alpha - 2\sqrt{2}mgl \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{答})$$

(3) ポテンシャル極小の定理より, x の満たすべき方程式は

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = k\alpha + Mgl \cos \alpha - \sqrt{2}mgl \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad (\text{答})$$

5.

床を基準に半球の重心 $\frac{5}{8}R$

円錐の重心 $R + \frac{h}{4}$

半球の体積 $\frac{2}{3}\pi R^3$, 円錐の体積 $\frac{1}{3}\pi R^2 h$

全体の重心は

$$y_G = \frac{\frac{5}{8}R \times \frac{2}{3}\pi R^3 + \left(R + \frac{h}{4}\right) \frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}R^2 + \left(R + \frac{h}{4}\right)h}{2R + h}$$

θ 傾いた時の重心位置 y は

$$y = R + (y_G - R)\cos\theta$$

となる。ポテンシャルエネルギーは

$$V = mgy = mg\{R + (y_G - R)\cos\theta\}$$

つりあい位置は $\frac{dV}{d\theta} = -(y_G - R)\sin\theta = 0$ より $\theta = 0$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -(y_G - R)\cos\theta \quad \text{より}$$

$y_G > R$ ($h < \sqrt{3}R$) $\frac{d^2V}{d\theta^2} < 0 \rightarrow$ 不安定

$y_G < R$ ($h > \sqrt{3}R$) $\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0 \rightarrow$ 安定 (答)