「工業系の力学」第 6 章　問題解答

６－１　ドリル問題

問題１

$I\ddot{\theta} = N$ （答）

問題２

$\ddot{\theta} = \dfrac{N}{I} = \dfrac{1}{5} = 0.2$ rad/s² （答）

問題３

$\ddot{\theta} = \dfrac{N}{I} = \dfrac{1}{10} = 0.1$ rad/s²　よって，問題２の 1/2 となる。（答）

問題４

$N = I\alpha_1$ [N･m]（答）

問題５

$N = I\alpha_1$ ＝0.1×2＝0.2 N･m（答）

問題６

$I\alpha_1 = F_1 \dfrac{d}{2}$ より，$F_1 = \dfrac{2I\alpha_1}{d}$ [N]（答）

問題７　（解答例）

回転軸が重心の位置からずれていること。（答）

問題８　（解答例）

振動が発生し，部品破損の原因となることがある。（答）

問題９

$F = me\omega^2$ ＝12×3×10^{-3}×6^2＝1.30 N　（答）

問題１０

つり合いおもりの質量を m_0，取り付け位置を e_0 とすると，$me\omega^2 = m_0 e_0 \omega^2$ より

$$m_0 = \frac{me}{e_0} = \frac{12 \times 3 \times 10^{-3}}{200 \times 10^{-3}} = 0.18\text{kg} = 180\text{g}$$　（答）

６－１　演習問題

１．

$\ddot{\theta} = \frac{N}{I}$

$\dot{\theta} = \frac{N}{I} t$

$\theta = \frac{N}{I} t + 31.4$

$0 = \frac{N}{I} t + 31.4$

$0 = -31.4 \frac{0.1}{5} = -0.628$N･m

回転と反対向きに 0.628N･m（答）

２．

式６－９：N＝ $I\alpha$ より，N＝0.1×2＝0.2 N･m

$N = fr$ より，摩擦力は，$f = \frac{N}{r} = \frac{0.2}{0.15}$ ＝1.33N（答）

停止するまでの時間は，$\dot{\theta} = \ddot{\theta} t$ より $t = \frac{1}{0.2}$ ＝5s　（答）

押しつけ力を F_1 として，$f = \mu F_1$ より

$F_1 = \frac{f}{\mu} = \frac{1.33}{0.4}$ ＝3.33N　（答）

３．

$I\dot{\omega}_1 = N$

ω_1 が一定なので，$\dot{\omega}_1 = 0$ より

N＝0（答）

４．

遠心力による力のつり合いより

$$m_A r\omega^2 \cos\theta + m_B r\omega^2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4} + \pi\right) + m_C r\omega^2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$m_A r\omega^2 \sin\theta + m_B r\omega^2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4} + \pi\right) + m_C r\omega^2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

したがって

$$m_{\mathrm{B}}=\frac{\sqrt{2}}{2}m_{\mathrm{A}}=14.14\mathrm{g}$$（答）

$$m_{\mathrm{C}}=\frac{\sqrt{2}}{2}m_{\mathrm{A}}=14.14\mathrm{g}$$（答）

６－２　ドリル問題

問題１

単位長さあたりの質量を ρ とすると，$dm=\rho\, dy$ で表せる。

$$I=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\rho dy\times y^2$$

$$=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{M}{l}y^2dy$$

$$=\frac{M}{12}l^2$$

これに数値を代入して，$I=\dfrac{2}{12}2^2=0.667\ \mathrm{kg\cdot m^2}$（答）

問題２

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{M}{2\pi R}\times Rd\theta\times R^2=MR^2$$（答）

問題３

(1)　棒が2本なので，　$I_G=2\times\dfrac{\mu l\times l^2}{12}=\dfrac{1}{6}\mu l^3$　（答）

(2)　(1)を45°回転しただけなので解答は(1)と同じ。（答）

(3)　重心は縦棒の真ん中なので，横棒の寄与は

$$I_{\text{横棒}}=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\mu l}{l}\left\{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\}dx=\frac{\mu l^3}{12}+\frac{\mu l^3}{4}=\frac{\mu l^3}{3}$$

（これは平行軸の定理を使っても求めてもよい）

よって

$$I_{\mathrm{G}}=\frac{\mu l^3}{12}+2\times\frac{\mu l^3}{3}=\frac{3}{4}\mu l^3$$（答）

(4)　平行軸の定理を用いて

$$I_{\mathrm{G}} = 2\times\left\{\frac{\mu l^3}{12} + \mu l\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{(\mu l/2)(l/2)^2}{12} + \frac{\mu l}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right\} = \frac{9}{16}\mu l^3 \qquad \text{（答）}$$

(5)　重心位置は，2つの棒の中点なので，横棒上$l/4$の位置にある。平行軸の定理を用いて

$$I_{\mathrm{G}} = \frac{\mu l^3}{12} + \mu l\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{\mu l^3}{12} + \mu l\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{24}\mu l^3 \qquad \text{（答）}$$

問題４

半円の中心点Oまわりの慣性モーメントは円板の半分なので

$$I_O = \frac{\pi}{4}\mu a^4 \qquad \text{（答）}$$

円板の重心Gは円の中心から $x_c = \dfrac{4}{3\pi}a$ なので平行軸の定理より

$$I_{\mathrm{G}} = \frac{\pi}{4}\mu a^4 - \frac{\pi}{2}\mu a^2 \times\left(\frac{4}{3\pi}a\right)^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}\right)\mu a^4 \qquad \text{（答）}$$

問題５

重心位置は，2つの長方形は等しいので，長方形の境界からxc=(5-3)/2=1cm。長方形の慣性モーメントは，$I = \dfrac{1}{12}\mu ab\left(a^2 + b^2\right)$なので，(長さの単位をmに統一する)

$$I_G = 2\times\left(\frac{1}{12}\mu ab\left(a^2+b^2\right) + \mu abx_c{}^2\right) = \frac{1}{6}\mu ab\left(a^2 + b^2 + 12x_c{}^2\right)$$

$$= \frac{1}{6}100\times0.1\times0.06\times\left(0.1^2 + 0.06^2 + 12\times0.01^2\right) = 0.00148\ \mathrm{kgm}^2$$

＝0.00148 kg･m^2　　（答）

問題６

単位面積あたりの質量は$\dfrac{M}{bh}$であり，$dm = \dfrac{M}{bh}bdy$ で表せる。ただし，bdy は微小質量からなる体積である。

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{M}{bh} y^2 bdy = \frac{M}{12}h^2 \quad \text{（答）}$$

問題７

正方形における z 方向の慣性モーメントは，密度 $\rho = \dfrac{M}{a^2h}$ より

$$I_{z'} = 2I_{x'} = 2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{M}{a^2h} y^2 ady = \frac{M}{6h}a^2$$

したがって

$$I_z = 2\int_0^h \frac{Ma^2}{6h}dz = \frac{Ma^2}{3} \qquad \text{（答）}$$

問題８

$$I_{z'} = I_z + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7Ma^2}{12}$$ （答）

６－２　演習問題

１．

$R^2 = x^2 + z^2$ より

$$dI_x = \frac{\rho\pi z^2}{2} z^2 = \frac{\rho\pi}{2}\left(R^2 - x^2\right)^2$$

したがって

$$I_x = \int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2} \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\left(R^2 - x^2\right)^2 dx = \frac{2}{5}MR^2$$ （答）

２．

$$I_z = \int_{-l}^{l} \frac{M}{2l}\left(x\sin\alpha\right)^2 dx = \frac{M}{3} l^2 \sin^2\alpha$$ （答）

３．

$$I_x = I_{x'} - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = 2\int_0^h \frac{M}{\frac{lb}{2}} \frac{h-y}{h} l y^2 dy - M\frac{h^2}{9} = \frac{h^2 M}{18}$$ （答）

４．

重心の位置を求める。

$$y_{\mathrm{G}} = \frac{\int_0^h \rho\left(\frac{h-y}{h}a + \frac{y}{h}b\right) y dy}{M} = \frac{a+2b}{3\left(a+b\right)}h$$

したがって

$$I_x = \int_0^h \rho\left(\frac{h-y}{h}a + \frac{y}{h}b\right) y^2 dy - M{y_{\mathrm{G}}}^2 = \frac{\left(a^2 + 4ab + b^2\right)h^2 M}{18\left(a+b\right)^2}$$ （答）

５．

x 軸からの距離を r とすると

$$I_x = \int_{\frac{D}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}+\frac{d}{2}} \rho 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - r\right)^2} \cdot 2\pi r^3 dr = \frac{M}{4}\left(D^2 + \frac{3}{4}d^2\right)$$ （答）

ここで，$M = \rho D\left(\dfrac{\pi}{2}d\right)^2$，$\rho$ はリングの密度を表す。

６－３　ドリル問題

問題１

転倒するのは，Oを中心として傾いたときに，重心Gが真上に来た時なので

$$\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{20}{10} = 26.6^\circ$$ （答）

問題２

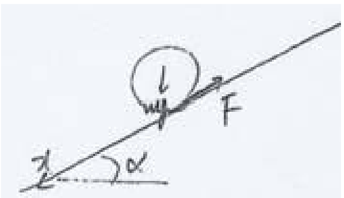
$$I\ddot{\theta} = N$$ （答）

問題３

$0.1 \times 0.1 \times 9.8 = 0.1\ddot{\theta}$　　$\ddot{\theta} = 0.98\ \mathrm{rad/s^2}$　（答）

$r\ddot{\theta} = 0.098\ \mathrm{m/s^2}$（答）

問題４



$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - F$$ （答）

問題５

$$\frac{2}{5}Mr^2\ddot{\theta} = Fr$$ （答）

問題６

$x = r\theta$（答）　$\left(\dfrac{dx}{dt} = r\dfrac{d\theta}{dt}\right)$

問題７

問題６の両辺を時間微分して，$\dot{x} = r\dot{\theta}$，$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$ より

$$\ddot{x} = \frac{5}{14}g$$

$$F = \frac{\mu g}{7}$$

$$\dot{x} = \frac{5}{14}gt \qquad \text{（答）}$$

問題８

(1)　棒の重心にμl がかかると考えられるので，復元モーメントは$N = -\dfrac{1}{2}\mu l^2 g\sin\theta$　（答）

(2)　点Oまわりの慣性モーメントは

$$I_{\mathrm{O}} = \frac{\mu l^3}{12} + \frac{\mu l^3}{4} = \frac{1}{3}\mu l^3$$

運動方程式は

$$\frac{1}{3}\mu l^3\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}\mu l^2 g\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta \quad \text{（答）}$$

問題９

(1)　点Oまわりのモーメント（復元モーメント）Nは，

$$N = -\frac{1}{2}\mu l^2 g\sin\theta - \mu l^2 g\sin\theta = -\frac{3}{2}\mu l^2 g\sin\theta \qquad \text{（答）}$$

なお，点Oまわりの慣性モーメントは

$$I_{\mathrm{O}} = \frac{\mu l^3}{12} + \frac{\mu l^3}{4} + \mu l^3 = \frac{4}{3}\mu l^3$$

(2)　運動方程式は

$$\frac{4}{3}\mu l^3\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\mu l^2 g\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{9}{8}\frac{g}{l}\sin\theta \quad \text{（答）}$$

６－３　演習問題

１．

並進と回転の運動方程式は，それぞれ

$$M\ddot{x} = F$$

$$I\ddot{\theta} = zF$$

球の慣性モーメントは

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

さらに滑らずに転がる条件は

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta}$$

これらの式から z について解くと，

$$z = \frac{2R}{5} \quad \text{（答）}$$

２．

$$\frac{M}{2}R^2\omega_1\sin\theta_1\omega_2 = Mgl\sin\theta_1$$ （答）

３．

⑴　$I_{\mathrm{A}} = MR^2$ より

$$I = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

運動方程式は

$$I\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta\cdot R$$

リングの慣性モーメント I を代入し，角度 θ が微小であるとして

$$2MR^2\ddot{\theta} = -Mg\theta$$ （答）

⑵　⑴の運動方程式に，$\theta = A\sin\omega_0 t$ を代入して解くと

角振動数　$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{2R}}$

周期　$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$　　（答）

を得る。