「工学系の力学」第４章　問題解答

４－１　ドリル問題

問題１

一定の割合で加速が行われるとする。加速度が一定値 a [m/s^2]である場合，初速度を v_0 [m/s]，初期位置を x_0 [m]とすれば，位置 x [m]は次のように表される（式 4-10）。

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

いま，加速度 a は次のように求められる。

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100\times 10^3}{3600\times 3} = 9.26\,\mathrm{m/s^2} \quad （答）$$

この値と，初速度 $v_0 = 0$，初期位置 $x_0 = 0$ を用いて，走行距離 x_1 [m]は式 4-10 に $t = 3\mathrm{s}$ を代入して次のように求められる。

$$x_1 = 0 + 0\times 3 + \frac{1}{2}\times 9.26\times 3^2 = 41.7\,\mathrm{m} \quad （答）$$

問題２

一定割合で加速が行われるとする。初速度 $v_0 = 0$，初期位置 $x_0 = 0$ であるから，等加速度運動の位置 x の式 4-10 より，終了時の時刻 t_1 [s]と位置 x_1 [m]の間に次の関係が成り立つ。

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}at_1^2$$

これを加速度 a について解いて，$t_1 = 11\mathrm{s}$，$x_1 = 400\mathrm{m}$ を代入すると

$$a = \frac{2x_1}{t_1^2} = \frac{2\times 400}{11^2} = 6.61\,\mathrm{m/s^2} \quad （答）$$

となる。最高速度 v_1 [m/s]となるのは終了時であるから，等加速度運動の速度 v の式 4-9 に $t = t_1$ を代入して

$$v_1 = v_0 + at_1 = 0 + 6.61\times 11 = 72.7\,\mathrm{m/s} = \frac{72.7\times 3600}{1000}\mathrm{km/h} = 262\mathrm{km/h} \quad （答）$$

問題３

重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ による等加速度運動である。地上到達時刻を t_1 [s]，到達距離を x_1 [m]とすると，初速度 $v_0 = 0$，初期位置 $x_0 = 0$ であるから，等加速度運動の位置 x の式 4-10 より次の関係が成り立つ。

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}gt_1^2$$

これより，地上到達時の時刻 t_1 [s]は

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 634}{9.8}} = 11.4\mathrm{s} \quad （答）$$

となる。地上到達時の速度 v_1 [m/s]は，等加速度運動の速度 v の式 4-9 に $t=t_1$ を代入して

$$v_1 = v_0 + at_1 = 0 + 9.8\times 11.4 = 111\mathrm{m/s}$$ （答）

問題 4

初速度は $v_0 = 45\times 10^3/3600 = 12.5\,\mathrm{m/s}$ である。停止までに要する時間を t_1 [s] とすると，等加速度運動の速度 v の式 4-9 より

$$0 = v_0 + at_1$$

が成り立つため，これより

$$t_1 = -\frac{v_0}{a} = -\frac{12.5}{-2.5} = 5\,\mathrm{s}$$

と求められる。停止までに走行する距離 x_1 [m]は，等加速度運動の位置 x の式 4-10 に $t=t_1$ を代入して

$$x_1 = 0 + 12.5\times 5 + \frac{1}{2}\times(-2.5)\times 5^2 = 31.3\,\mathrm{m}$$ （答）

問題 5

初速度を v_0 [m/s]，初期位置を x_0 [m]とすれば，速度 v [m/s]，および，位置 x [m]は，それぞれ次のようになる（式 4-7，4-8 参照）．

$$v = v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t = v_0 + \int_0^t(-t)\mathrm{d}t = v_0 - \frac{1}{2}t^2$$

$$x = x_0 + \int_0^t v\,\mathrm{d}t = x_0 + \int_0^t (v_0 - \frac{1}{2}t^2)\mathrm{d}t = x_0 + v_0 t - \frac{1}{6}t^3$$

停止までに要する時間を t_1 [s]とすると，速度 v の式より，

$$0 = v_0 - \frac{1}{2}t_1^2$$

が成り立つ．初速度は $v_0 = 45\times 10^3/3600 = 12.5\,\mathrm{m/s}$ であるから，上式より

$$t_1 = \sqrt{2v_0} = \sqrt{2\times 12.5} = 5\,\mathrm{s}$$ (答)

と求められる．停止までに走行する距離 x_1 [m]は，位置 x の式に $t=t_1$ を代入して

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{6}t_1^3 = 0 + 12.5\times 5 - \frac{1}{6}\times 5^3 = 41.7\,\mathrm{m}$$ （答）

問題 6

速度が 15m/s になる時間を t_1 [s]とすると，次の関係

$$15 = 20 - 10e^{-0.25t_1}$$

が成り立つことから

$$t_1 = \frac{1}{-0.25}\ln\frac{15-20}{-10} = -4\ln\frac{1}{2} = 2.77\,\mathrm{s}$$ (答)

位置 x [m]は，初期位置 $x_0=0$ のもとで速度 v [m/s]を積分して

$$x = x_0 + \int_0^t v\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t (20 - 10e^{-0.25t})\mathrm{d}t = \left[20t - \frac{10}{-0.25}e^{-0.25t}\right]_0^t = 20t + 40(e^{-0.25t_1} - 1)$$

走行距離 x_1 [m]は，上式に $t=t_1$ を代入して

$$x_1 = 20t_1 + 40(e^{-0.25t_1} - 1) = 20\times 2.77 + 40\times(e^{-0.25\times 2.77} - 1) = 35.5\,\mathrm{m}$$ （答）

問題 7

速度 v [m/s]，加速度 a [m/s^2]は，位置 x [m]を時間 t [s]で逐次微分することにより，次のように得られる。

$$v = \dot{x} = e(0 - (-\omega \sin \omega t)) = e\omega \sin \omega t$$ （答）

$$a = \dot{v} = e(1\sin \omega t + \omega \cdot \omega \cos\omega t) = e(\sin\omega t + \omega^2 \cos\omega t)$$ (答)

問題 8

ゴルフボールは鉛直下向きの加速度が重力加速度 $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である放物運動を行う。打ち出し地点を原点にして，水平方向前向きに x 軸，垂直方向上向きに y 軸をとり，打ち出しの瞬間を $t=0$ として，初速度の大きさを V [m/s]，向きを水平より上方 α [°]と表すと，例題 4-3 の結果がそのまま利用できる。すなわち，初速度，初期位置の x，y 成分は

$$x_0 = 0,\quad y_0 = 0$$

$$v_{x0} = V\cos\alpha,\quad v_{y0} = V\sin\alpha$$

であり，加速度の x，y 成分は

$$a_x = 0,\quad a_y = -g$$

であるから，速度，位置の x，y 成分はそれぞれ次の通り求められる。

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x\,\mathrm{d}t = V\cos\alpha + \int_0^t 0\,\mathrm{d}t = V\cos\alpha$$

$$v_y = v_{y0} + \int_0^t a_y\,\mathrm{d}t = V\sin\alpha + \int_0^t (-g)\,\mathrm{d}t = V\sin\alpha + \left[-gt\right]_0^t = V\sin\alpha - gt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t V\cos\alpha\,\mathrm{d}t = \left[Vt\cos\alpha\right]_0^t = Vt\cos\alpha$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t (V\sin\alpha - gt)\,\mathrm{d}t = 0 + \left[Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right]_0^t = Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

ホールまでの水平距離を L [m]と表し，ゴルフボールがホールに入る時刻を t_1 [s]とすると，位置 x，y について次の関係が成り立つ。

$$L = Vt_1\cos\alpha$$

$$0 = Vt_1\sin\alpha - \frac{1}{2}gt_1^2$$

この 2 式より t_1 を消去して，$L\neq 0$ に注意して V について解くと次式が得られる。

$$V=\sqrt{\frac{gL}{2\sin\alpha\cos\alpha}}$$

これに定数を代入して

$$V=\sqrt{\frac{9.8\times 180}{2\times\sin 45°\times\cos 45°}}=42\,\mathrm{m/s}$$ （答）

問題 9

ボールは鉛直下向きの加速度が重力加速度 $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である放物運動を行う。投球者の足元を原点にし，水平前方に x 軸，垂直上方に y 軸をとる。投球の瞬間を $t=0$ とし，初速度の大きさを V [m/s]，向きを水平より上方 α [°]と表すと，ボールの初速度，初期位置の x，y 成分は

$$x_0=0,\quad y_0=2$$

$$v_{x0}=V\cos\alpha,\quad v_{y0}=V\sin\alpha$$

加速度の x，y 成分は

$$a_x=0,\quad a_y=-g$$

速度，位置の x，y 成分は，成分ごとに時間 t [s]で積分することで，次のようになる。

$$v_x=v_{x0}+\int_0^t a_x\,\mathrm{d}t=V\cos\alpha+\int_0^t 0\,\mathrm{d}t=V\cos\alpha$$

$$v_y=v_{y0}+\int_0^t a_y\,\mathrm{d}t=V\sin\alpha+\int_0^t(-g)\,\mathrm{d}t=V\sin\alpha+\left[-gt\right]_0^t=V\sin\alpha-gt$$

$$x=x_0+\int_0^t v_x\,\mathrm{d}t=0+\int_0^t V\cos\alpha\,\mathrm{d}t=\left[Vt\cos\alpha\right]_0^t=Vt\cos\alpha$$

$$y=y_0+\int_0^t v_y\,\mathrm{d}t=2+\int_0^t(V\sin\alpha-gt)\,\mathrm{d}t=2+\left[Vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2\right]_0^t=2+Vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

ボールが最も遠くまで飛ぶためには，最高点がちょうど天井の高さになればよいと考えられる（注）。最高点となる時刻を t_1 [s]とすれば，位置 y が天井の高さ H [m]となり，速度の y 成分が 0 となることから，次の式が成り立つ。

$$H=2+Vt_1\sin\alpha-\frac{1}{2}gt_1^2$$

$$0=V\sin\alpha-gt_1$$

この 2 式より t_1 を消去して $\sin\alpha$ について解き，定数を代入すると

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2g(H-2)}}{V}=\frac{\sqrt{2\times 9.8\times(4.5-2)}}{28}=0.25$$

角度 α は $0\le\alpha\le 90°$ の範囲で次のように求められる。

$$\alpha=\sin^{-1}0.25=14.5°$$ （答）

注：これが成り立つには，厳密には，ボールの最高点が天井の高さに到達する解が存在することと，求められた角度より小さい角度でより遠くまで飛ぶことがないことの確認が必要である。上の例において，前者は，実際に矛盾のない角度が得られていることから確認できる。後者は，天井に当たらない角度の範囲に，天井がない場合の最大飛距離を示す角度 45°（例題 4-4 参照）が含まれていないことから，おおむね問題ないことが判断できる。

問題 10

速度・加速度の x, y 成分は，位置の x, y 成分をそれぞれ時間 t で微分することによって得られる（式 4-15，4-16 参照）。

$$v_x = \dot{x} = -R\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = -R\omega \cos \omega t \quad (答)$$

$$a_x = \dot{v}_x = -R\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = \dot{v}_y = R\omega^2 \sin \omega t \quad (答)$$

注：例題 4-5 の結果と比べて位置・速度・加速度の y 成分の符号が逆になっている。例題 4-5 が左まわりの円運動であるのに対して，本問題は右まわりの円運動を表す。

問題 11

速度・加速度の x, y 成分は，位置の x, y 成分をそれぞれ時間 t で微分することによって得られる（式 4-15，4-16 参照）。

$$v_x = \dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = -b\omega \cos \omega t \quad (答)$$

$$a_x = \dot{v}_x = -a\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = \dot{v}_y = b\omega^2 \sin \omega t \quad (答)$$

注：例題 4-5 の結果と比べて，位置・速度・加速度それぞれにおいて x, y 成分の係数が異なっている。例題 4-5 が円運動であるのに対して，本問題はだ円運動を表す。

問題 12

速度・加速度の x, y 成分は，位置の x, y 成分をそれぞれ時間 t で微分することによって得られる（式 4-15，4-16 参照）。

$$v_x = \dot{x} = -R\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}), \quad v_y = \dot{y} = -R\omega \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) \quad (答)$$

$$a_x = \dot{v}_x = -R\omega^2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}), \quad a_y = \dot{v}_y = -R\omega^2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) \quad (答)$$

参考：この運動は，座標軸の 45°回転による座標変換を行うと

$$x' = x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}R\cos\omega t$$

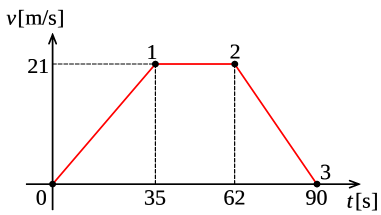
$$y' = -x\sin 45^\circ + y\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}R\sin\omega t$$

となり，だ円運動であることがわかる。

４－１　演習問題

１．

出発から t [s]後の電車の速度 v [m/s]は図のようなグラフで表される。また，出発，加速終了，一定速度終了，減速終了の各時刻における状態を 0，1，2，3 と表すことにする。



加速度 a [m/s^2]は各期間で一定であるので，速度変化を時間間隔で除した平均加速度として次のように求められる。

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{21-0}{35-0} = 0.6\,\mathrm{m/s^2} \qquad (0 \le t \le 35)$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{21-21}{62-35} = 0\,\mathrm{m/s^2} \qquad (35 \le t \le 62)$$

$$a = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{0-21}{90-62} = -0.75\,\mathrm{m/s^2} \qquad (62 \le t \le 90)$$

速度 v [m/s]は，各期間の初期状態（開始時刻，初速度）が前期間の最終状態であることに注意して次のように求められる。

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t 0.6\,\mathrm{d}t = [0.6t]_0^t = 0.6t\,\mathrm{m/s} \qquad (0 \le t \le 35)$$

$$v = v_1 + \int_{t_1}^{t} a\,\mathrm{d}t = 21 + \int_{35}^{t} 0\,\mathrm{d}t = 21\,\mathrm{m/s} \qquad (35 \le t \le 62)$$

$$v = v_2 + \int_{t_2}^{t} a\,\mathrm{d}t = 21 + \int_{62}^{t} (-0.75)\,\mathrm{d}t = 21 + [-0.75t]_{62}^{t} = -0.75t + 67.5\,\mathrm{m/s} \qquad (62 \le t \le 90)$$

位置 x [m]についても，各期間の初期状態（開始時刻，初期位置）は前期間の最終状態である。前期間の最終位置は，最終時刻を代入して計算する。

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t = x_0 + \int_0^t 0.6t\,\mathrm{d}t = 0 + \left[\frac{0.6}{2}t^2\right]_0^t = 0.3t^2\ \mathrm{m} \qquad (\ 0 \le t \le 35\ )$$

$$x = x_1 + \int_{t_1}^{t} v\,\mathrm{d}t = x_1 + \int_{35}^{t} 21\mathrm{d}t = 0.3\times 35^2 + \left[21t\right]_{35}^{t} = 21t - 367.5\,\mathrm{m} \qquad (\ 35 \le t \le 62\ )$$

$$x = x_2 + \int_{t_2}^{t} v\,\mathrm{d}t = x_2 + \int_{62}^{t} (-0.75t + 67.5)\,\mathrm{d}t = 21\times 62 - 367.5 + \left[-\frac{0.75}{2}t^2 + 67.5t\right]_{62}^{t}$$

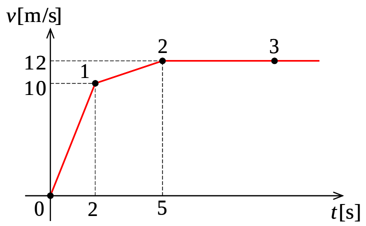
$$= -0.375t^2 + 67.5t - 1809\mathrm{m} \qquad (\ 62 \le t \le 90\ )$$

2 駅間の距離は，減速終了時の位置 x_3 [m]として求められる。

$$x_3 = -0.375\times 90^2 + 67.5\times 90 - 1809 = 1230\mathrm{m} \quad (答)$$

２．

スタートから t [s]後の走者の速度 v [m /s]は図のようなグラフで表される．また，スタート，2 秒後，5 秒後，ゴールの各時刻における状態を 0, 1, 2, 3 と表すことにする。



加速度 a [m /s^2]は各期間で一定であるので，速度変化を時間間隔で除した平均加速度として次のように求められる。

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{10-0}{2-0} = 5\,\mathrm{m/s^2} \qquad (\ 0 \le t \le 2\ )$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{12-10}{5-2} = 0.667\,\mathrm{m/s^2} \qquad (\ 2 \le t \le 5\ )$$

$$a = 0\,\mathrm{m/s^2} \qquad (\ t \ge 5\ )$$

速度 v [m /s]は，各期間の初期状態（開始時刻，初速度）が前期間の最終状態であることに注意して次のように求められる。

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt = 0 + \int_0^t 5\,dt = \left[5t\right]_0^t = 5t\,\mathrm{m/s} \qquad (\ 0 \le t \le 2\ )$$

$$v = v_1 + \int_{t_1}^{t} a\,dt = 10 + \int_2^t 0.667\,dt = 10 + \left[0.667t\right]_2^t = 0.667t + 8.67\,\mathrm{m/s} \quad (\ 2 \le t \le 5\ )$$

$$v = v_2 + \int_{t_2}^{t} a\,dt = 12 + \int_5^t 0\,dt = 12\,\mathrm{m/s} \qquad (\ t \ge 5\ )$$

位置 x [m]についても，各期間の初期状態（開始時刻，初期位置）は前期間の最終状態である。前期間の最終位置は，最終時刻を代入して計算する。

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt = x_0 + \int_0^t 5t\,dt = 0 + \left[\frac{5}{2}t^2\right]_0^t = 2.5t^2\,\mathrm{m} \qquad (0 \le t \le 2)$$

$$x = x_1 + \int_{t_1}^{t} v\,dt = x_1 + \int_2^t (0.667t + 8.67)\,dt = 2.5\times 2^2 + \left[\frac{0.667}{2}t^2 + 8.67t\right]_2^t$$

$$= 0.333t^2 + 8.67t - 8.67\,\mathrm{m} \qquad (2 \le t \le 5)$$

$$x = x_2 + \int_{t_2}^{t} v\,dt = x_2 + \int_5^t 12\,dt = 0.333\times 5^2 + 8.67\times 5 - 8.67 + [12t]_5^t = 12t - 17.0\,\mathrm{m}$$

$$(t \ge 5)$$

ゴールの時刻を $t_3 (> 5\mathrm{s})$ とすると，位置 x について次の関係が成り立つ。

$$100 = 12t_3 - 17.0$$

これより

$$t_3 = \frac{100+17.0}{12} = 9.75\mathrm{s}$$ （答）

３．

速度 v [m/s]，加速度 a [m/s^2]は，位置 x [m]を時間 t [s]で逐次微分することにより，次のように得られる。

$$v = \dot{x} = R\{(0 + \omega\sin\omega t) + \frac{R}{4L}(0 + 2\omega\sin 2\omega t)\} = R\omega(\sin\omega t + \frac{R}{2L}\sin 2\omega t)$$ (答)

$$a = \dot{v} = R(\omega\cos\omega t + \frac{R}{2L}2\omega\cos 2\omega t) = R\omega^2(\cos\omega t + \frac{R}{L}\cos 2\omega t)$$ (答)

４．

加速度 a [m/s^2]は，速度 v [m/s]を時間 t [s]で微分することにより得られる。

$$a = \dot{v} = (v_0 - v_t)(-\frac{1}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}} + 0 = -\frac{v_0 - v_t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$ (答)

位置 x [m]は，初期位置（水面の位置）を $x_0 = 0$ として，速度 v [m/s]を時間 t [s]で積分することにより得られる。

$$x = x_0 + \int_0^t v\,dt = 0 + \int_0^t \{(v_0 - v_t)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_t\}dt = \left[(v_0 - v_t)(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_t t\right]_0^t$$

$$= (v_0 - v_t)\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + v_t t$$ (答)

深さが最大となる時刻 t_1 [s]は速度 $v = 0$ となる条件から求められる。

$$0 = (v_0 - v_t)e^{-\frac{t_1}{\tau}} + v_t$$

$$t_1 = -\tau \ln \frac{-v_t}{v_0 - v_t} = -1 \times \ln \frac{-(-1)}{2-(-1)} = \ln 3 = 1.10\mathrm{s} \quad (答)$$

そのときの深さ x_1 [m]は，位置 x の式に $t = t_1$ を代入して求められる。

$$x_1 = (v_0 - v_t)\tau(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}) + v_t t_1 = (2-(-1)) \times 1 \times (1 - e^{-\frac{\ln 3}{1}}) - 1 \times \ln 3 = 2 - \ln 3 = 0.901\mathrm{m} \quad (答)$$

５．

ボールの運動は鉛直下向きの加速度が重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である放物運動である。ボールを構えた位置を原点にして，水平前方に x 軸，垂直上方に y 軸をとる。シュートの瞬間を $t = 0$ とし，初速度の大きさを V [m/s]，向きを水平より上方 α [°]と表すと，ボールの初速度，初期位置の x，y 成分は

$x_0 = 0$，　$y_0 = 0$

$v_{x0} = V\cos\alpha$，　$v_{y0} = V\sin\alpha$

加速度の x，y 成分は

$a_x = 0$，　$a_y = -g$

速度，位置の x，y 成分はそれぞれ次のとおり求められる。

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x\,\mathrm{d}t = V\cos\alpha + \int_0^t 0\,\mathrm{d}t = V\cos\alpha$$

$$v_y = v_{y0} + \int_0^t a_y\,\mathrm{d}t = V\sin\alpha + \int_0^t (-g)\,\mathrm{d}t = V\sin\alpha + \left[-gt\right]_0^t = V\sin\alpha - gt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t V\cos\alpha\,\mathrm{d}t = \left[Vt\cos\alpha\right]_0^t = Vt\cos\alpha$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t (V\sin\alpha - gt)\,\mathrm{d}t = \left[Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right]_0^t = Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

ゴールまでの水平距離を L [m]，垂直距離を H [m]と表し，ボールがゴールを通る時刻を t_1 [s]とすると，位置 x，y について次の関係が成り立つ。

$L = Vt_1\cos\alpha$

$H = Vt_1\sin\alpha - \frac{1}{2}gt_1^2$

この 2 式より t_1 を消去して V について解き，定数を代入すると

$$V = \sqrt{\frac{gL^2}{2(L\tan\alpha - H)\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{9.8 \times 6^2}{2 \times (6 \times \tan 45° - 1) \times \cos^2 45°}} = 8.4\mathrm{m/s} \quad （答）$$

６．

踏み切り後の競技者の運動は鉛直下向きの加速度が重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である放物運動である。踏み切り地点を原点に，水平前方に x 軸，垂直下方に y 軸をとる．踏み切りの瞬間を $t = 0$ とし，初速度の大きさを V [m/s]と表すと，競技者の初速度，初期位置の x，y 成分は

$$x_0 = 0,\quad y_0 = 0$$

$$v_{x0} = V,\quad v_{y0} = 0$$

加速度の x，y 成分は

$$a_x = 0,\quad a_y = g$$

速度，位置の x，y 成分はそれぞれ次のとおり求められる。

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x\,\mathrm{d}t = V + \int_0^t 0\,\mathrm{d}t = V$$

$$v_y = v_{y0} + \int_0^t a_y\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t g\,\mathrm{d}t = V\sin\alpha + \left[gt\right]_0^t = gt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t V\,\mathrm{d}t = \left[Vt\right]_0^t = Vt$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^t gt\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}gt^2\right]_0^t = \frac{1}{2}gt^2$$

着地の時刻を t_1 [s]とする．斜面の傾斜角を α [°]と表し，斜面に沿った飛距離を D [m]とすると，着地点までの水平距離は $D\cos\alpha$，垂直距離は $D\sin\alpha$ と表されるため，位置 x，y について次の関係が成り立つ。

$$D\cos\alpha = Vt_1$$

$$D\sin\alpha = \frac{1}{2}gt_1^2$$

この 2 式より t_1 を消去して D について解き，定数を代入すると

$$D = \frac{2V^2\tan\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{2\times(100\times10^3/3600)^2\times\tan30^\circ}{9.8\times\cos30^\circ} = 105\,\mathrm{m}$$ （答）

7．

打ち出し後のボールの運動は，鉛直下向きの加速度が重力加速度 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である放物運動である。設問にしたがって，打ち出し点を原点とし，斜面に沿って下向きに x 軸，斜面に垂直な上向きに y 軸をとる。打ち出しの瞬間を $t = 0$ とし，初速度の大きさを V [m/s]と表すと，この座標系では，初速度，初期位置の x，y 成分は次のようになる。

$$x_0 = 0,\quad y_0 = 0$$

$$v_{x0} = 0,\quad v_{y0} = V$$

加速度の x，y 成分は，重力加速度の向きが斜面の傾斜角 α [°]だけ y 軸から傾いていることを考慮して

$$a_x = g\sin\alpha,\quad a_y = -g\cos\alpha$$ （答）

速度，位置の x，y 成分はそれぞれ次のとおり求められる．

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x \, \mathrm{d}t = 0 + \int_0^t g\sin\alpha \, \mathrm{d}t = \left[gt\sin\alpha\right]_0^t = gt\sin\alpha \qquad (答)$$

$$v_y = v_{y0} + \int_0^t a_y \, \mathrm{d}t = V + \int_0^t (-g\cos\alpha) \, \mathrm{d}t = V + \left[-gt\cos\alpha\right]_0^t = V - gt\cos\alpha \qquad (答)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x \, \mathrm{d}t = 0 + \int_0^t gt\sin\alpha \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\right]_0^t = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha \qquad (答)$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y \, \mathrm{d}t = 0 + \int_0^t (V - gt\cos\alpha) \, \mathrm{d}t = \left[Vt - \frac{1}{2}gt^2\cos\alpha\right]_0^t = Vt - \frac{1}{2}gt^2\cos\alpha \qquad (答)$$

ボールが再び斜面上に落ちる時刻を t_1 [s]，落下点の打ち出し点からの距離を L [m]とすると，落下点は斜面上の点であるから，位置 x，y について次の関係が成り立つ。

$$L = \frac{1}{2}gt_1^2\sin\alpha$$

$$0 = Vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2\cos\alpha$$

$t_1 \neq 0$ に注意して上の 2 式より t_1 を消去すると，距離 L は次のように求められる。

$$L = \frac{2V^2\tan\alpha}{g\cos\alpha}$$

最後に定数を代入して

$$L = \frac{2\times 20^2\tan 30°}{9.8\times\cos 30°} = 54.4\,\mathrm{m} \quad （答）$$

４－２　ドリル問題

問題 1

ジャンプ中の角速度 ω [rad/s]は一定であり，角度変化を時間間隔で除した平均角速度として次のように求められる。

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{4\times 2\pi}{0.75} = 33.5\,\mathrm{rad/s} \quad （答）$$

問題 2

角加速度が一定値 α [rad/s^2]である場合，初期角速度を ω_0 [rad/s]，初期角度を θ_0 [rad]とすれば，角速度 ω [rad/s]，および，角度 θ [rad]は，それぞれ次のような形となる（式 4-25，4-26 参照）。

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha \mathrm{d}t = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega \mathrm{d}t = \theta_0 + \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\mathrm{d}t = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

いま，初期角速度 $\omega_0 = 0$，初期角度 $\theta_0 = 0$ としてよいから，角度 θ の式より，終了時の時刻 t_1[s]と位置 θ_1[rad]の間に次の関係が成り立つ。

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2$$

これを α について解いて，$t_1 = 0.25\mathrm{s}$，$\theta_1 = 3\pi/2\,\mathrm{rad}$ を代入すると，角加速度は

$$\alpha = \frac{2\theta_1}{t_1^2} = \frac{2\times 3\times \pi/2}{0.25^2} = 48\pi = 151\mathrm{rad/s^2} \quad (答)$$

となる。打撃の瞬間の角速度 ω_1[rad/s]は，角速度 ω の式に $t = t_1$ を代入して

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t_1 = 0 + 48\pi \times 0.25 = 12\pi = 3.82\mathrm{rad/s} \quad （答）$$

問題 3

角加速度一定の回転運動であるから，初期角速度 $\omega_0 = 0$ として，規定回転数 n_1[rpm]に到達する時刻 t_1[s]と角速度 ω_1[rad/s]の間には次の関係が成り立つ（問題２参照）。

$$\omega_1 = \alpha t_1$$

これを角加速度 α[rad/s^2]について解いて，回転数 n_1[rpm]と角速度 ω_1[rad/s]の関係に注意しながら，数値を代入すると

$$\alpha = \frac{\omega_1}{t_1} = \frac{2\pi n_1}{60 t_1} = \frac{2\times \pi \times 5400}{60\times 0.4} = 450\pi = 1410\mathrm{rad/s^2} \quad (答)$$

この間の回転角度 θ_1[rad]は，一定角加速度の場合の角度 θ の式（問題２参照）に，初期角速度 $\omega_0 = 0$，初期角度 $\theta_0 = 0$ として，$t = t_1$[s]を代入して次のように求められる。

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = 0 + 0\times 0.4 + \frac{1}{2}\times 450\pi \times 0.4^2 = 36\pi = 113\mathrm{rad} \quad （答）$$

問題 4

初期角速度は $\omega_0 = \frac{2\pi}{60}\times 540 = 18\pi = 56.5\mathrm{rad/s}$ である。停止する時刻を t_1[s]と表すと，角速度 ω[rad/s]について次の関係が成り立つ（問題２参照）。

$$0 = \omega_0 + \alpha t_1$$

これより角加速度 α [rad/s^2]は

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t_1} = -\frac{18\pi}{18} = -\pi = -3.14\text{rad/s}^2 \quad (答)$$

停止するまでの回転角度 θ_1[rad]は，一定角速度の場合の θ の式に $t = t_1$[s]を代入して

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = 0 + 18\pi \times 18 + \frac{1}{2} \times (-\pi) \times 18^2 = 162\pi = 509\text{rad} \quad (答)$$

問題 5

角加速度 α [rad/s^2]は，角速度 ω [rad/s]を時間 t [s]で微分して

$$\alpha = \dot{\omega} = 100(0 - (-0.8)e^{-0.8t}) = 80e^{-0.8t}$$

角度 θ [rad]は，初期角度 $\theta_0 = 0$ のもとで，角速度 ω [rad/s]を時間 t [s]で積分して

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega \, \mathrm{d}t = 0 + \int_0^t (100(1 - e^{-0.8t}))\mathrm{d}t = 100\left[t - \frac{1}{-0.8}e^{-0.8t}\right]_0^t = 100(t + 1.25(e^{-0.8t} - 1))$$

と表される。角速度が 90 rad/となる時刻を t_1 [s]とすると

$$90 = 100(1 - e^{-0.8t_1})$$

が成り立つことから

$$t_1 = \frac{1}{-0.8}\ln\frac{100-90}{100} = -1.25\ln 0.1 = 2.88\text{s}$$

回転開始直後，上記時刻それぞれの角加速度 α_0，α_1 [rad/s^2]は，角加速度 α の式に $t = 0$，t_1 をそれぞれ代入して

$$\alpha_0 = 80 \times e^{-0.8\times 0} = 80\text{rad/s}^2 \quad (答)$$

$$\alpha_1 = 80e^{-0.8t_1} = 80 \times e^{-0.8\times 2.88} = 8\text{rad/s}^2 \quad (答)$$

2 つの時刻の間の回転角度は，初期角度 $\theta_0 = 0$ であるから，$t = t_1$ となる角度 θ_1 [rad]として次のように求められる。

$$\theta_1 = 100(t_1 + 1.25(e^{-0.8t_1} - 1)) = 100 \times (2.88 + 1.25 \times (e^{-0.8\times 2.88} - 1)) = 175\text{rad} \quad (答)$$

問題 6

角速度 ω[rad/s]は回転数 n[rpm]を換算して

$$\omega = \frac{2\pi}{60}n = \frac{2 \times \pi \times 20}{60} = \frac{2\pi}{3} = 2.09\text{rad/s} \quad (答)$$

羽根先端の点の速度は周方向にのみ成分を持ち，その大きさは

$$v = v_\theta = r\omega = \frac{80}{2} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{80\pi}{3} = 83.8\,\text{m/s} \quad (答)$$

角加速度は 0 であるから，加速度の周方向成分も 0 である。したがって加速度は半径方向（回転軸に向かう向き）にのみ成分を持ち，その大きさは

$$a = |a_r| = r\omega^2 = \frac{80}{2} \times \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \frac{160\pi^2}{9} = 175\,\mathrm{m/s^2} \quad \text{（答）}$$

問題 7

角速度 ω[rad/s]は回転数 $n = 1/15\,\mathrm{rpm}$であることから

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = \frac{2 \times \pi}{60 \times 15} = \frac{\pi}{450} = 6.98 \times 10^{-3}\ \mathrm{rad/s} \quad \text{(答)}$$

ゴンドラの速度は周方向にのみ成分を持ち，その大きさは

$$v = v_\theta = r\omega = \frac{100}{2} \times \frac{\pi}{450} = \frac{\pi}{9} = 0.349\,\mathrm{m/s} \quad \text{(答)}$$

角加速度は 0 であるから，加速度の周方向成分も 0 である。したがって加速度は半径方向（回転軸に向かう向き）にのみ成分を持ち，その大きさは

$$a = |a_r| = r\omega^2 = \frac{100}{2} \times \left(\frac{\pi}{450}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4050} = 2.44 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2} \quad \text{（答）}$$

問題 8

例題 4-6 より，投射直前のハンマーの角速度 $\omega_1 = 5.6\pi = 17.59\,\mathrm{rad/s}$，角加速度 $\alpha = 1.12\pi = 3.52\,\mathrm{rad/s^2}$である。

速度の半径方向成分，周方向成分は

$$v_r = 0$$

$$v_\theta = r\omega_1 = 1.8 \times 5.6\pi = 31.7\,\mathrm{m/s}$$

したがって，速度は周方向を向き，その大きさは

$$v = v_\theta = 31.7\,\mathrm{m/s} \quad \text{(答)}$$

加速度の半径方向成分，周方向成分は

$$a_r = -r\omega_1^2 = -1.8 \times (5.6\pi)^2 = -557\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_\theta = r\alpha = 1.8 \times 1.12\pi = 6.33\,\mathrm{m/s^2}$$

したがって，加速度は，大きさが

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(-557)^2 + 6.33^2} = 557\,\mathrm{m/s^2}$$

であり，その向きは，中心へ向かう向きから進行方向へ

$$\tan^{-1} \frac{a_\theta}{-a_r} = \tan^{-1} \frac{6.33}{557} = 0.651^\circ$$

の角度だけ傾く向きである。（答）

問題 9

問題 2 より，打撃の瞬間のゴルフクラブ先端の角速度 $\omega_1 = 12\pi = 3.82\,\mathrm{rad/s}$，角加速度 $\alpha = 48\pi = 151\,\mathrm{rad/s^2}$である。

速度の半径方向成分，周方向成分は

$v_r = 0$

$v_\theta = r\omega_1 = 1.2 \times 12\pi = 45.2\,\mathrm{m/s}$

したがって，速度は周方向を向き，その大きさは

$v = v_\theta = 45.2\,\mathrm{m/s}$ (答)

加速度の半径方向成分，周方向成分は

$a_r = -r\omega_1^2 = -1.2 \times (12\pi)^2 = -1710\,\mathrm{m/s^2}$

$a_\theta = r\alpha = 1.2 \times 48\pi = 181\,\mathrm{m/s^2}$

したがって，加速度は，大きさが

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(-1710)^2 + 181^2} = 1720\,\mathrm{m/s^2}$$

であり，その向きは，中心へ向かう向きから進行方向へ

$$\tan^{-1}\frac{a_\theta}{-a_r} = \tan^{-1}\frac{181}{1710} = 6.04°$$

の角度だけ傾く向きである。（答）

問題 10

角加速度 $\ddot{\theta}$ は，角速度 $\dot{\theta}$ を時間 t で微分して得られる。

$$\ddot{\theta} = -\omega_0 p \sin pt$$

角度 θ は，初期位置 $\theta_0 = 0$ のもとで，角速度 $\dot{\theta}$ を時間 t で積分して得られる。

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \dot{\theta} dt = 0 + \left[\frac{\omega_0}{p}\sin pt\right]_0^t = \frac{\omega_0}{p}\sin pt$$

速度の半径方向成分 v_r，周方向成分 v_θ は次のとおり。

$v_r = 0$

$v_\theta = l\dot{\theta} = l\omega_0 \cos pt$ (答)

加速度の半径方向成分 a_r，周方向成分 a_θ は次のとおり。

$a_r = -l\dot{\theta}^2 = -l\omega_0^2 \cos^2 pt$

$a_\theta = l\ddot{\theta} = -l\omega_0 p \sin pt$ (答)

おもりがはじめに最下点にあるのは，$\theta = 0$ より $t = 0$ のときであり，これを代入すると

$v_r = 0$，$v_\theta = l\omega_0$，$a_r = -l\omega_0^2$，$a_\theta = 0$

となる。速度は大きさが $l\omega_0$ で，向きは周方向（接線方向）で角度が正となる向きである。加速度は大きさが $l\omega_0^2$ で，回転中心に向かう向きになっている。(答)

おもりがはじめて最大変位を示すのは $\dot{\theta} = 0$，つまり $t = \pi/(2p)$ のとき

であり，これを代入すると

$$v_r = 0,\quad v_\theta = 0,\quad a_r = 0,\quad a_\theta = -l\omega_0 p$$

となる。速度は 0 である．加速度は大きさが $l\omega_0 p$ であり，向きは周方向（接線方向）で角度が負になる向きとなる。（答）

問題 11

例題 4-10 より，加速度の周方向成分 $a_\theta = -1\,\mathrm{m/s^2}$，速度の周方向成分 $v_\theta = 10 - t\,[\mathrm{m/s}]$，位置（カーブに沿って進行した距離） $s = 10t - \frac{1}{2}t^2\,[\mathrm{m}]$ である。

停止する時刻 t_1 では v_θ について $0 = 10 - t_1$ が成り立つことより

$$t_1 = 10\mathrm{s}$$

とわかる。そのときの位置 s_1 は

$$s_1 = 10t_1 - \frac{1}{2}t_1^2 = 10\times10 - \frac{1}{2}\times10^2 = 50\mathrm{m} \quad (答)$$

速度は， $v_r = 0\,\mathrm{m/s}$， $v_\theta = 0\,\mathrm{m/s}$ より

$$v = \sqrt{v_v^2 + v_\theta^2} = 0\,\mathrm{m/s} \quad (答)$$

である。加速度は， $a_r = -\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{0}{50} = 0\,\mathrm{m/s^2}$ より

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1\,\mathrm{m/s^2}$$

の大きさを持ち，その向きはコースの中心へ向かう向きである。（答）

４－２　演習問題

１．

角加速度 $\ddot{\theta}$ は，角速度 $\dot{\theta}$ を時間 t で微分して得られる。

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega_0 p}{2}(e^{pt} - e^{-pt})$$

角度 θ は，初期位置 $\theta_0 = 0$ のもとで，角速度 $\dot{\theta}$ を時間 t で積分して得られる。

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \dot{\theta}dt = 0 + \left[\frac{\omega_0}{2p}(e^{pt} - e^{-pt})\right]_0^t = \frac{\omega_0}{2p}(e^{pt} - e^{-pt})$$

速度の半径方向成分 v_r，周方向成分 v_θ は次の通り。

$$v_r = 0$$

$$v_\theta = l\dot{\theta} = \frac{l\omega_0}{2}(e^{pt} + e^{-pt})$$ (答)

加速度の半径方向成分 a_r，周方向成分 a_θ は次の通り。

$$a_r = -l\dot{\theta}^2 = -\frac{l\omega_0^2}{4}(e^{pt} + e^{-pt})^2$$

$$a_\theta = l\ddot{\theta} = \frac{l\omega_0}{2p}(e^{pt} - e^{-pt})$$ (答)

$t = 0$ のときは

$$v_r = 0, \quad v_\theta = l\omega_0, \quad a_r = -l\omega_0^2, \quad a_\theta = 0$$

となる。速度は大きさが $l\omega_0$ で，向きは周方向（接線方向）で角度が正となる向きである。加速度は大きさが $l\omega_0^2$ で，回転中心に向かう向きになっている。(答)

$t = 1/p$ のときは

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{l\omega_0}{2}(e + \frac{1}{e}), \quad a_r = -\frac{l\omega_0^2}{4}(e + \frac{1}{e})^2, \quad a_\theta = \frac{l\omega_0}{2p}(e - \frac{1}{e})$$

となる。速度は大きさが $\frac{l\omega_0}{2}(e + \frac{1}{e})$ で，向きは周方向（接線方向）で角度が正となる向きである。加速度は，半径方向成分が負，周方向成分が正になっている。（答）

注：この運動では $v_\theta = 0$ となる時刻はなく，時間とともに v_θ，$|a_r|$，a_θ は単調に増大する。

２．

円運動では，速度の大きさ v [m/s]が速度の周方向成分 $v_\theta = r\dot{\theta}$ [m/s]に等しく，また，加速度の半径方向成分 $a_r = -r\dot{\theta}^2$ [m/s^2]であることより

$$a_r = -\frac{v^2}{r}$$

の関係がある。

自動車が 20m/s の速度で減速せずに進入する場合は

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{20^2}{100} = -4\,\mathrm{m/s^2}, \quad a_\theta = 0\,\mathrm{m/s^2}$$ より

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4\,\mathrm{m/s^2} < 4.9\,\mathrm{m/s^2}$$

であるから，自動車はスリップしない。(答)

自動車が 20m/s の速度で毎秒 3m/s の割合で減速しながら進入する場合は

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{20^2}{100} = -4\,\mathrm{m/s^2}, \qquad a_\theta = -3\,\mathrm{m/s^2}$$

より

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5\,\mathrm{m/s^2} > 4.9\,\mathrm{m/s^2}$$

となり，自動車はスリップする。（答）

３．

円運動では，速度の大きさ v が速度の周方向成分 $v_\theta = r\dot{\theta}$ に等しく，加速度の半径方向成分の大きさが $|a_r| = r\dot{\theta}^2$ であることより

$$v = \sqrt{|a_r| r}$$

の関係がある。v を最大にするためには $|a_r|$ を最大にする必要があるが，加速度の大きさ $a = \sqrt{|a_r|^2 + a_\theta^2}$ がスリップを起こさない限度の一定値の場合は，加速度の周方向成分 $a_\theta = 0$ を考えればよく，$|a_r| = a$ より

$$v = \sqrt{ar}$$

となる。経路の長さ s は

$$s = \pi r$$

であることより，通過するのに必要な時間 T は

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\pi r}{\sqrt{ar}} = \pi\sqrt{\frac{r}{a}}$$

と表される。

半径 $r = 75\mathrm{m}$ の場合，通過に必要な時間 T は

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{a}} = \pi \times \sqrt{\frac{75}{3.92}} = 13.74\mathrm{s}$$

半径 $r = 80\mathrm{m}$ の場合，通過に必要な時間 T は

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{a}} = \pi \times \sqrt{\frac{80}{3.92}} = 14.19\mathrm{s}$$

したがって，内側を走行したほうが 0.45s 短い。（答）

４．

スープの器の加速度 $a\,[\mathrm{m/s^2}]$ は

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{r^2\dot{\theta}^4 + r^2\ddot{\theta}^2}$$

で与えられるが，いまの場合は加速・減速の角加速度の大きさ $|\ddot{\theta}|$ が一定であることから，角速度 $\dot{\theta}$ [rad/s]が最大となる中間位置（加速・減速の切り替え位置）で加速度 a が最も大きくなることがわかる。最短時間でスープを送るためには，この加速度が許容値 0.2m/s^2 に等しくなるように考えればよい。

前半の行程において一定の角加速度を α [rad/s^2]とすると，テーブルの初期角速度 $\omega_0 = 0$，初期角度 $\theta_0 = 0$ であるから，角速度 ω [rad/s]，角度 θ [rad]は次のように表される。

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt = \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt = \theta_0 + \int_0^t (\alpha t) dt = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

中間位置に到達する時刻を t_1 [s]とすると，角度 θ について

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\alpha t_1^2$$

が成り立つことから

$$t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

とわかる。このときの角速度 ω_1 [rad/s]は，角速度 ω の式に $t = t_1$ を代入して

$$\omega_1 = \alpha t_1 = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\pi\alpha}$$

である。したがって，このときの加速度 a_1 [m/s^2]は次のようになる。

$$a_1 = \sqrt{r^2\omega_1^4 + r^2\alpha^2} = r\sqrt{(\sqrt{\pi\alpha})^4 + \alpha^2} = r\alpha\sqrt{\pi^2 + 1}$$

これが許容値に等しいことから角加速度は次のように求められる。

$$0.2 = r\alpha\sqrt{\pi^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{0.2}{r\sqrt{\pi^2 + 1}} = \frac{0.2}{1 \times \sqrt{\pi^2 + 1}} = 6.07 \times 10^{-2}\ \mathrm{rad/s^2} \quad (答)$$

最大速度 v_1 [m/s]は中間位置（$t = t_1$）において起こり，角速度 ω_1 から次のように求められる。

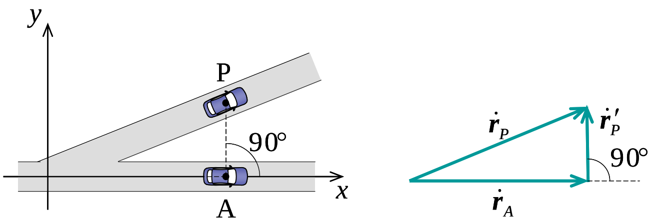
$$v_1 = r\omega_1 = r\sqrt{\pi\alpha} = 1 \times \sqrt{\pi \times 6.07 \times 10^{-2}} = 0.437\mathrm{m/s} \quad (答)$$

後半の行程は，切り替え時刻を境に全く対称な変化が起こるため，所要時間 t_2 [s]は中間位置に到達する時間 t_1 の 2 倍と考えてよい．したがって

$$t_2 = 2t_1 = 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 2\times\sqrt{\frac{\pi}{6.07\times10^{-2}}} = 14.4\,\mathrm{s}$$ （答）

４－３　ドリル問題

問題１



図のように，自動車Ａの進行方向を x 軸に直角座標系をとる。自動車Ａの絶対速度は

$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 12\boldsymbol{i}$ m，

また，自動車Ａに対する自動車Ｐの相対速度は

$\dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = 5\boldsymbol{j}$ m，

これより，自動車Ｐの絶対速度は

$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} + \dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = 12\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ m/s

とわかる。この速度の大きさは

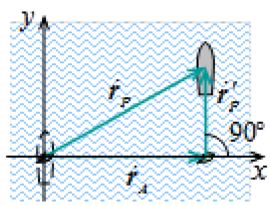
$$v = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\,\mathrm{m/s}$$

であり，向きは自動車Ａの進行方向（x 軸）に対して

$$\tan^{-1}\frac{5}{12} = 22.6^\circ$$

となる角度である。（答）

問題２



川の流れの向きを x 軸に直角座標系をとる。川の流れの絶対速度は

$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 1.5\boldsymbol{i}$ m，

である。また，川の流れに対するボートの相対速度は，静水上の速度の大きさを v[m/s]とすると

$\dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = v\boldsymbol{j}$ m，

と書ける。ボートの絶対速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = \dot{\boldsymbol{r}}_A + \dot{\boldsymbol{r}}'_P = 1.5\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}\ \text{m/s}$$

であるが，この大きさが 3m/s であることから

$$3 = \sqrt{1.5^2 + v^2}$$

の関係があることがわかる。これより

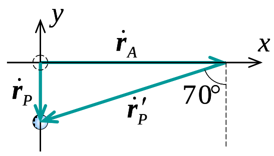
$$v = \sqrt{3^2 - 1.5^2} = 2.60\text{m/s} \quad (\text{答})$$

であり，ボートの実際の進行方向が流れの方向（x軸）となす角度は

$$\tan^{-1}\frac{1.5}{2.60} = 30°$$

となる。（答）

問題 3



電車の進行方向を x軸に直角座標系をとる。電車 A の絶対速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}}_A = 25\boldsymbol{i}\ \text{m}\ ,$$

である。また，雨粒 P の絶対速度は，その大きさを v[m/s]とすると

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = -v\boldsymbol{j}\ \text{m/s}$$

と書ける。電車 A に対する雨粒 P の相対速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_P = \dot{\boldsymbol{r}}_P - \dot{\boldsymbol{r}}_A = -25\boldsymbol{i} - v\boldsymbol{j}\ \text{m}\ ,$$

であるが，これが垂直と 70°の角度をなすことから，図のようなベクトルの大きさの関係となる。これより

$$\frac{v}{25} = \tan 20° \quad \Rightarrow \quad v = 25\tan 20° = 9.10\text{m/s}\ (\text{答})$$

問題 4

自動車 P の速度，加速度は次の通り。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P = 30\boldsymbol{j}\ \text{m/s}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_P = 3\boldsymbol{j}\ \text{m/s}^2$$

円運動している自動車 A については，速度は 0 である。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_A = \boldsymbol{0}$$

また，このとき，円運動の角速度も $\dot{\theta} = 0$ となることより，加速度の半径方向成分 $a_{Ar} = -r\dot{\theta}^2 = 0$ となり，加速度は周方向成分 $a_{A\theta} = -1\text{m/s}^2$ のみをもつ。

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = -1\boldsymbol{e}_\theta \ \mathrm{m/s^2}$$

今の座標系では $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{j}$ であることを考慮して，自動車 A に対する自動車 P の相対速度と相対加速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} - \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 30\boldsymbol{j} - \boldsymbol{0} = 30\boldsymbol{j} \ \mathrm{m/s}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} - \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 3\boldsymbol{j} - (-1\boldsymbol{e}_\theta) = (3+1)\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{j} \ \mathrm{m/s^2} \quad （答）$$

問題 5

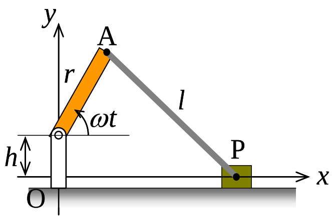
例題 4-14 より，荷物の位置 x [m]，速度 $\dot{x}$ [m/s] の式は求められている。ここでは，$\omega t = 120°$ を代入して

$$x = \sqrt{l^2 - (r\sin\omega t)^2} + r\cos\omega t = \sqrt{6^2 - (4\times\sin 120°)^2} + 4\times\cos 120° = 2.90\mathrm{m} \quad (答)$$

$$\dot{x} = -\frac{r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t}{x - r\cos\omega t} - r\omega\sin\omega t$$

$$= -\frac{4^2\times 0.25\times\sin 120°\times\cos 120°}{2.90 - 4\times\cos 120°} - 4\times 0.25\times\sin 120° = -0.512\mathrm{m/s} \quad (答)$$

問題 6



クレーン先端 A と荷物 P の位置 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ [m] はそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = r\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + (h + r\sin\omega t)\,\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = x\,\boldsymbol{i}$$

と表されるので，拘束条件は

$$(x - r\cos\omega t)^2 + (h + r\sin\omega t)^2 = l^2$$

と書かれる。これより，荷物の位置 x [m] は

$$x = \sqrt{l^2 - (h + r\sin\omega t)^2} + r\cos\omega t = \sqrt{6^2 - (1 + 3\times\sin 60°)^2} + 3\times\cos 60° = 6.30\mathrm{m} \quad (答)$$

拘束条件を時間 t で微分すると

$$2(x - r\cos\omega t)(\dot{x} + r\omega\sin\omega t) + 2(h + r\sin\omega t)(r\omega\cos\omega t) = 0$$

となることより，荷物の速度 $\dot{x}$ [m/s] は

$$\dot{x} = -\frac{(h + r\sin\omega t)r\omega\cos\omega t}{x - r\cos\omega t} - r\omega\sin\omega t$$

$$= -\frac{(1 + 3\times\sin 60°)\times 3\times 0.25\times\cos 60°}{6.30 - 3\times\cos 60°} - 3\times 0.25\times\sin 60° = -0.931\mathrm{m/s} \quad (答)$$

問題 7

自動車 A の原点からの距離を s[m]と表す。自動車 A, 荷車 P の位置 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ [m]はそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = s\sin 45^\circ \boldsymbol{i} - s\cos 45^\circ \boldsymbol{j} = \frac{s}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{s}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} = y\boldsymbol{j}$$

であり，自動車 A に対する荷車 P の相対位置 $\boldsymbol{r}'_{\mathrm{P}}$ [m]は

$$\boldsymbol{r}'_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = -\frac{s}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + (y + \frac{s}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j}$$

であるから，拘束条件は次のようになる。

$$|\boldsymbol{r}'_{\mathrm{P}}|^2 = (-\frac{s}{\sqrt{2}})^2 + (y + \frac{s}{\sqrt{2}})^2 = s^2 + \sqrt{2}sy + y^2 = l^2$$

荷車 P の位置 y [m]は上式を y について解いて

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}s + \sqrt{l^2 - \frac{1}{2}s^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\times 6 + \sqrt{10^2 - \frac{1}{2}\times 6^2} = 4.81\mathrm{m} \qquad (答)$$

拘束条件を時間 t で微分すると

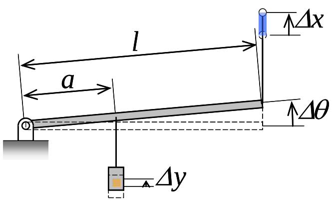
$$2s\dot{s} + \sqrt{2}(\dot{s}y + s\dot{y}) + 2y\dot{y} = 0$$

となることより，荷物の速度 $\dot{y}$ [m/s]は

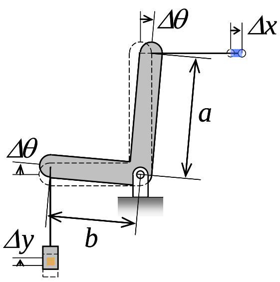
$$\dot{y} = -\frac{\dot{s}(2s + \sqrt{2}y)}{\sqrt{2}s + 2y} = -\frac{2\times(2\times 6 + \sqrt{2}\times 4.81)}{\sqrt{2}\times 6 + 2\times 4.81} = -2.08\mathrm{m/s} \qquad (答)$$

問題 8

(1)



(2)



ロープをわずかに引いた状態を考え，ロープ先端とおもりのはじめの位置からの変位をそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ とし，てこの角変位を $\Delta\theta$ とする。この問題では $\Delta\theta$ が小さい場合のみを考えることとする。

(1) ロープを引いた長さ Δx は $l\sin\Delta\theta$ で表される。この長さは，角変位 $\Delta\theta$ が小さい範囲では，てこの先端が移動した円弧の長さ $l\Delta\theta$ で近似できる。

$$\Delta x = l\Delta\theta$$

また，おもりの上昇量 Δy は，てこの支点から距離 a の点が角変位

$\Delta\theta$によって移動した円弧の長さ$a\Delta\theta$にほぼ等しい。

$\Delta y = a\Delta\theta$

これらの関係より，拘束条件は

$$\frac{\Delta x}{l} = \frac{\Delta y}{a} (= \Delta\theta) \quad (答)$$

(2)　ロープを引いた長さΔxは，支点から距離aの先端が角変位$\Delta\theta$によって移動した円弧の長さ$a\Delta\theta$にほぼ等しい。

$\Delta x = a\Delta\theta$

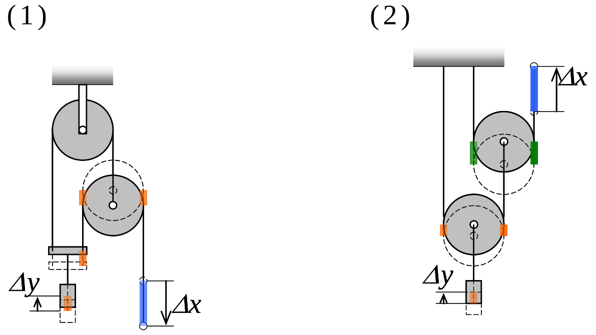
また，おもりの上昇量Δyは，支点から距離bの先端が描く円弧の長さ$b\Delta\theta$にほぼ等しい。

$\Delta y = b\Delta\theta$

これらの関係より，拘束条件は

$$\frac{\Delta x}{a} = \frac{\Delta y}{b} (= \Delta\theta) \quad (答)$$

問題 9



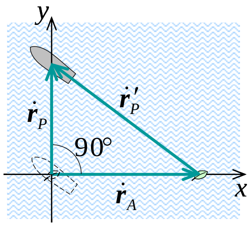
ロープをわずかに引いた状態を考え，ロープ先端とおもりのはじめの位置からの変位をそれぞれ$\Delta x, \Delta y$とする。

(1)　この組み合わせ滑車では，おもりの上昇分Δyだけ，定滑車のロープが移動し動滑車が下降する。その結果，動滑車にかかるロープは，動滑車両側とロープ端部でそれぞれおもりの上昇分Δyだけ短くなり，その和がロープを引いた長さΔxに等しいので，拘束条件は$\Delta x = 3\Delta y$となる。(答)

(2)　この組み合わせ滑車では，おもりの上昇分Δyだけ下側の動滑車の両側でロープが短くなり，その和が上側の動滑車の上昇量に等しくなる。ロープを引いた長さΔxは，上側の動滑車の上昇量の 2 倍に等しくなるため，拘束条件は$\Delta x = 4\Delta y$となる。（答）

４－３　演習問題

１．



川の流れの向きを x 軸に直角座標系をとる。川の流れの絶対速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 2\boldsymbol{i}\ \ \mathrm{m}\ \ ,$$

また，ボートの絶対速度は，その大きさを v[m/s]とすると

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} = v\boldsymbol{j}\ \ \mathrm{m/s}$$

と書ける。川の流れに対するボートの相対速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} - \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = -2\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}\ \ \mathrm{m/s}$$

となるが，この大きさが静水上の速度の大きさに等しいことから

$$2.5 = \sqrt{(-2)^2 + v^2}$$

の関係がある。これより，ボートの実際の速度の大きさ v は

$$v = \sqrt{2.5^2 - (-2)^2} = 1.5\mathrm{m/s} \quad (答)$$

と求められる。ボートの実際の進行方向が流れに対する向き（x 軸の負の向き）となす角度は

$$\tan^{-1}\frac{1.5}{-(-2)} = 36.9° \quad (答)$$

となる。

２．

トラック円弧の中心を原点とし，バトンの受け渡し地点が x 軸上にくるような極座標系を考える。

前走者 A の速度は周方向成分 $v_{\mathrm{A}\theta} = 8\mathrm{m/s}$ だけをもつ。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 8\boldsymbol{e}_\theta\ \ \mathrm{m/s}$$

このときの円運動の角速度は $\dot{\theta}_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{A}\theta} / R = 8/36 = 0.222\mathrm{rad/s}$ である。

加速度は，半径方向成分 $a_{\mathrm{A}r} = -R\dot{\theta}^2 = -36 \times 0.222^2 = -1.78\mathrm{m/s^2}$ だけをもつ。

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = -1.78\boldsymbol{e}_r\ \ \mathrm{m/s^2}$$

次走者 P の速度は，前走者 A と同じく，周方向成分 $v_{\mathrm{P}\theta} = 8\mathrm{m}/$ だけをもつ。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} = 8\boldsymbol{e}_\theta\ \ \mathrm{m/s}$$

円運動の角速度 $\dot{\theta}_{\mathrm{P}} = v_{\mathrm{P}\theta} / R = 8/36 = 0.222\mathrm{rad/s}$ も前走者 A と同一である。

加速度は，半径方向成分 $a_{\mathrm{P}r} = -R\dot{\theta}^2 = -36 \times 0.222^2 = -1.78\mathrm{m/s^2}$ に加えて，周

方向成分 $a_{\mathrm{P}\theta} = 4\,\mathrm{m/s^2}$ をもつ。

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} = -1.78\boldsymbol{e}_r + 4\boldsymbol{e}_\theta \ \mathrm{m/s^2}$$

以上より，前走者 A に対する次走者 P の相対速度 $\dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}}$，相対加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}}$ は次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} - \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 8\boldsymbol{e}_\theta - 8\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{0}$$ （答）

$$\ddot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} - \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = -1.78\boldsymbol{e}_r + 4\boldsymbol{e}_\theta - (-1.78\boldsymbol{e}_r) = 4\boldsymbol{e}_\theta \ \mathrm{m/s^2}$$ （答）

注：両走者は同じ半径の円運動で，同一点にあり，速度も同じであるので，違いはコースに沿った加速度（周方向成分）のみとなる。

３．

円弧状道路の中心を原点とし，2 台の並んだ自動車が x 軸上にくるような極座標系を考える。

４－２演習問題３より，スリップしない加速度の限度が $a_{\mathrm{lim}}\,[\mathrm{m/s^2}]$ であるとき，半径 $R\,[\mathrm{m}]$ の円弧状道路をスリップしないで走行できる速度は $v_{\mathrm{lim}} = \sqrt{a_{\mathrm{lim}} R}\,[\mathrm{m/s}]$ であることがわかっている。

外側自動車 A の速度の周方向成分は $v_{\mathrm{A}\theta} = \sqrt{a_{\mathrm{lim}} R_{\mathrm{A}}} = \sqrt{3.92 \times 80} = 17.71\,\mathrm{m/s}$。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 17.71\boldsymbol{e}_\theta \ \mathrm{m/s}$$

このときの円運動の角速度は $\dot{\theta}_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{A}\theta} / R_{\mathrm{A}} = 17.71/80 = 0.221\,\mathrm{rad/s}$ である。

加速度は，半径方向成分 $a_{\mathrm{A}r} = -R_{\mathrm{A}}\dot{\theta}_{\mathrm{A}}^2 = -80 \times 0.221^2 = -3.92\,\mathrm{m/s^2}$ だけをもつ。

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = -3.92\boldsymbol{e}_r \ \mathrm{m/s^2}$$

内側自動車 P の速度の周方向成分は $v_{\mathrm{P}\theta} = \sqrt{a_{\mathrm{lim}} R_{\mathrm{P}}} = \sqrt{3.92 \times 75} = 17.15\,\mathrm{m/s}$。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} = 17.15\boldsymbol{e}_\theta \ \mathrm{m/s}$$

円運動の角速度は $\dot{\theta}_{\mathrm{P}} = v_{\mathrm{P}\theta} / R_{\mathrm{P}} = 17.15/75 = 0.229\,\mathrm{rad/s}$。

加速度は，半径方向成分 $a_{\mathrm{P}r} = -R_{\mathrm{P}}\dot{\theta}_{\mathrm{P}}^2 = -75 \times 0.229^2 = -3.92\,\mathrm{m/s^2}$ だけをもつ。

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} = -3.92\boldsymbol{e}_r \ \mathrm{m/s^2}$$

以上より，外側の自動車 A に対する内側の自動車 P の相対速度 $\dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}}$，相対加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}}$ は次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} - \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = 17.15\boldsymbol{e}_\theta - 17.71\boldsymbol{e}_\theta = -0.56\boldsymbol{e}_\theta \ \mathrm{m/s}$$ （答）

$$\ddot{\boldsymbol{r}}'_{\mathrm{P}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{P}} - \ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{A}} = -3.92\boldsymbol{e}_r - (-3.92\boldsymbol{e}_r) = \boldsymbol{0}$$ （答）

注：両自動車ともスリップしない限界の加速度で走行しているので，加速度は同一である。内側の自動車の方が速度が小さいが，それにもかかわらずコースを通過する時間が短い（４－２演習問題３参照）のは興味深い。

４．

糸を引く人の走る向きを x 軸とする直角座標系を取ると，人 A の運動の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A}$，加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A}$ は次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A} = 3\boldsymbol{i} \text{ m/s}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A} = \boldsymbol{0}$$

凧の運動は，糸を引く人に対する相対運動が円運動となる。人を原点とする極座標系を考え，人が走る向きを角度の基準とすると，凧の角速度 $\dot{\theta}$，角加速度 $\ddot{\theta}$ は

$$\dot{\theta} = -15 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{12} = -0.262 \text{rad/s}$$

$$\ddot{\theta} = 0 \text{ rad/s}^2$$

となることから，人 A に対する凧 P の相対速度 $\dot{\boldsymbol{r}}'_\mathrm{P}$ と相対加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}'_\mathrm{P}$ は次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_\mathrm{P} = l\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta = 20 \times (-\frac{\pi}{12})\boldsymbol{e}_\theta = -\frac{5\pi}{3}\boldsymbol{e}_\theta = -5.24\boldsymbol{e}_\theta \text{ m/s}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}'_\mathrm{P} = -l\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + l\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta = -20 \times (-\frac{\pi}{12})^2\boldsymbol{e}_r + 20 \times 0\boldsymbol{e}_\theta = -\frac{5\pi}{36}\boldsymbol{e}_r = -0.436\boldsymbol{e}_r \text{ m/s}^2$$

ここで，極座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ は，直角座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ を角度 θ だけ回転させたものである。いまは，糸の角度 60°（$\theta = 120° = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$）であることから，次の関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} = \cos\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{i} + \sin\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{j} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} = -\sin\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{i} + \cos\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j}$$

凧 P の絶対運動の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{P}$，加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{P}$ は，上の関係を用いて，次のように水平成分と垂直成分によって表すことができる。

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{P} = \dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A} + \dot{\boldsymbol{r}}'_\mathrm{P} = 3\boldsymbol{i} - \frac{5\pi}{3}\boldsymbol{e}_\theta = 3\boldsymbol{i} - \frac{5\pi}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j}) = (3 + \frac{5\sqrt{3}\pi}{6})\boldsymbol{i} + \frac{5\pi}{6}\boldsymbol{j}$$

$$= 7.53\boldsymbol{i} + 2.62\boldsymbol{j} \text{ m/s}$$（答）

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{P} = \ddot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A} + \ddot{\boldsymbol{r}}'_\mathrm{P} = -\frac{5\pi}{36}\boldsymbol{e}_r = -\frac{5\pi}{36}(-\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}) = -\frac{5\pi}{72}\boldsymbol{i} + \frac{5\sqrt{3}\pi}{72}\boldsymbol{j}$$

$$= -0.218\boldsymbol{i} + 0.378\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2$$（答）

５．

トラック A，荷物 P，定滑車 M の位置 $\boldsymbol{r}_\mathrm{A}$，$\boldsymbol{r}_\mathrm{P}$，$\boldsymbol{r}_\mathrm{M}$ [m]はそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{A} = x\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{r}_\mathrm{P} = y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_\mathrm{M} = h\boldsymbol{j}$$

である。拘束条件は

$$|\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}}|+|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}}|=l$$

となるが，成分を代入して

$$\sqrt{x^2+h^2}+h-y=l$$

と書くことができる。これより，荷物の高さ y [m]は

$$y=\sqrt{x^2+h^2}+h-l=\sqrt{2.5^2+6^2}+6-12=0.5\,\mathrm{m} \quad (答)$$

拘束条件を時間 t で微分すると

$$\frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{x^2+h^2}}-\dot{y}=0$$

これより，荷物の速度 $\dot{y}$ [m/s]は

$$\dot{y}=\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{2.5\times1.3}{\sqrt{2.5^2+6^2}}=0.5\,\mathrm{m/s} \quad （答）$$

６．

クレーン先端 A，荷物 P，定滑車 M の位置 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$， $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$， $\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}}$ [m]はそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}=r\cos\omega t\,\boldsymbol{i}+r\sin\omega t\,\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}=d\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{M}}=d\,\boldsymbol{i}$$

である。拘束条件は

$$|\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}}|+|\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}-\boldsymbol{r}_{\mathrm{M}}|=l$$

となるが，成分を代入して

$$\sqrt{(r\cos\omega t-d)^2+(r\sin\omega t)^2}-y=l$$

と書くことができる。これより，荷物の位置 y [m]は

$$y=\sqrt{(r\cos\omega t-d)^2+(r\sin\omega t)^2}-l=\sqrt{(4\times\cos60^\circ-4)^2+(4\times\sin60)^2}-6=-2\,\mathrm{m} \quad (答)$$

拘束条件を時間 t で微分すると

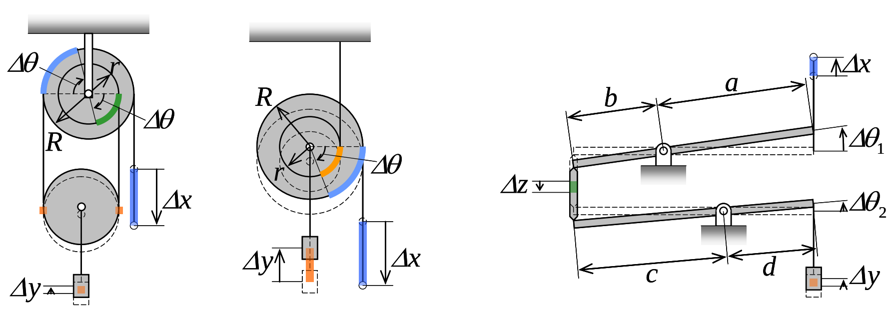
$$\frac{2(r\cos\omega t-d)(-r\omega\sin\omega t)+2(r\sin\omega t)(r\omega\cos\omega t)}{2\sqrt{(r\cos\omega t-d)^2+(r\sin\omega t)^2}}-\dot{y}=0$$

これより，荷物の速度 $\dot{y}$ [m/s]は

$$\dot{y}=\frac{dr\omega\sin\omega t}{\sqrt{(r\cos\omega t-d)^2+(r\sin\omega t)^2}}=\frac{4\times4\times0.25\times\sin60^\circ}{\sqrt{(4\times\cos60^\circ-4)^2+(4\times\sin60)^2}}$$

$$=0.866\mathrm{m/s} \quad （答）$$

7．



ロープをわずかに引いた状態を考え，ロープ先端とおもりのはじめの位置からの変位をそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ とする。また，それぞれの図のとおり，対応して回転した輪軸の角変位を $\Delta\theta$，てこの角変位を $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$ と表す。

(1)　ロープを引いた長さ Δx は，輪軸の半径 R の滑車にロープが巻きついた長さ $R\Delta\theta$ に等しい。

$$\Delta x = R\Delta\theta$$

また，動滑車の両側でおもりの上昇分 Δy だけロープが短くなっているが，その和は，半径 R の滑車にロープが巻きついた長さ $R\Delta\theta$ と半径 r の滑車からロープが繰り出された長さ $r\Delta\theta$ の差に等しい。

$$2\Delta y = R\Delta\theta - r\Delta\theta = (R-r)\Delta\theta$$

これらを考え合わせて，拘束条件は

$$\frac{\Delta x}{R} = \frac{2\Delta y}{R-r} (= \Delta\theta) \quad \text{(答)}$$

(2)　おもりの上昇量 Δy は半径 r の滑車にロープが巻きついた長さ $r\Delta\theta$ に等しい。

$$\Delta y = r\Delta\theta$$

ロープを引く長さ Δx は，半径 R の滑車からロープが繰り出された長さ $R\Delta\theta$ から滑車の上昇量 Δy を引いたものになる。

$$\Delta x = R\Delta\theta - \Delta y = (R-r)\Delta\theta$$

これらより，拘束条件は

$$\frac{\Delta x}{R-r} = \frac{\Delta y}{r} (= \Delta\theta) \quad \text{(答)}$$

(3)　ロープを引いた長さ Δx は，上のてこにおける支点から距離 a の先端が描く円弧の長さ $a\Delta\theta_1$ にほぼ等しい。

$$\Delta x = a\Delta\theta_1$$

おもりの上昇量 Δy は，下のてこにおける支点から距離 d の先端が描く円弧の長さ $d\Delta\theta_2$ にほぼ等しい。

$$\varDelta y = d\varDelta\theta_2$$

2 つのてこの左端の下降量 $\varDelta z$ は，上のてこの支点から距離 b の先端が描く円弧の長さ $b\varDelta\theta_1$ と，下のてこの支点から距離 c の先端が描く円弧の長さ $c\varDelta\theta_2$ に等しい。

$$\varDelta z = b\varDelta\theta_1 = c\varDelta\theta_2$$

これらの関係より，拘束条件は

$$\frac{b\varDelta x}{a} = \frac{c\varDelta y}{d}(=\varDelta z)$$ （答）