「工学系の力学」第3章　問題解答

3－1　ドリル問題

問題１

等価集中力F(上方向正）F=4－10－6+10＝－2 N　(答)

点Oまわりのモーメント　M= 4×2.5+(－10)×3+(－6)×5+10×6=10 N･m

等価集中力の作用点は，$x = M/F = -5$，よって点Oの左5の点　(答)

問題２

点 x [m]での半径 r [m]は

$$r = 0.5 \times \left(1 + \frac{x}{2}\right) \times 0.01 = 0.005 \times \left(1 + \frac{x}{2}\right)$$

断面積Aは

$$A = \pi r^2 = 25 \times 10^{-6} \times \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \quad \mathrm{m}^2$$

密度ρ=4000kg/m^{3}なので，よって重力$f(x)$ [N/m]は

$$f(x) = \rho \pi r^2 g = 0.98 \times \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \quad (答)$$

問題３

F=5×10^3×4×2=4×10^4 N　(答)

問題４

S=4×4/2=8 m^2

F=5×10^3 Pa ×8 m^2=40×10^3 N=40 kN　(答)

問題5

$F = 100 \times 10 = 1000\mathrm{N}$ （答）

一様分布力の等価集中力の作用点は分布の中心なので左端から5mの点である。（答）

点A，Bの反力をR_A，R_Bとすると

R_A+R_B=1000N

1000×5=R_B×8

R_B=625 N　(答)

R_A=1000－625=375N　(答)

問題6

等価集中力　F=100×6＝600 N（答）

等価集中力の作用点は，分布域の真中なので，Aから6mの点。（答）

反力をR_A [N], R_B[N]とすると，

R_A +R_B=600

$R_B \times 10 = 600 \times 6$

よってR_A =240N,　R_B=360N　（答）

問題 7

(1)　合力は　$F=100\times3=300$ N（答）

作用点は分布の真ん中なので，左端から4.5mの点。(答)

(2)　反力をR_A [N], R_B[N]とすると，

$R_A+R_B=300+200$

$R_B\times10=300\times4.5+200\times8=2950$

よって，R_A=205N,　R_B=295N　（答）

問題 8

反力をR_A [N]，R_B[N]とすると，力の釣り合いより

$R_A+R_B=200\times2+300\times2+500\times2=2000$ N

左支点まわりのモーメントのつり合いより，

$R_B\times6=400\times1+600\times3+1000\times5=7200$

よって，R_A=800 N,　R_B=1200 N　(答)

問題 9

左端からの距離をx[m]とすると，分布力は，

$f = 100+(300-100)x/2 = 100+100x$ N/m

合力は，

$$F = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (100+100x)dx = \left[100x+50x^2\right]_0^2 = 400\mathrm{N}$$

原点周りのモーメント

$$M = \int_0^2 f(x)xdx = \int_0^2 (100x+100x^2)dx = \left[50x^2+\frac{1}{3}100x^3\right]_0^2 = \frac{1400}{3}\mathrm{N}$$

等価集中力の大きさ　400　N　（答）

作用点は左端から　$\dfrac{\left(\dfrac{1400}{3}\right)}{400} = \dfrac{7}{6} = 1.16666 = 1.17\ \mathrm{m}$　（答）

問題10

$F=1000\times1\times2+5000\times2\times2=40000$ N　(答)

等価集中力の作用点は左端からx [m]とすると，

$Fx=20000\times0.5+20000\times2$

$x = 50000/40000 = 1.25$ m　(答)

問題11

xの点の微小幅にかかる力　$dF=pbdx$

したがって，等価集中力Fとx=0（y軸）まわりのモーメントMは

$$F=\int_0^a pbdx = p_0 b\frac{1}{a}\int_0^a xdx = \frac{1}{2}p_0 ab \qquad \text{（答）}$$

$$M=\int_0^a pbxdx = p_0 b\frac{1}{a}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}p_0 a^2 b$$

よって

作用点x_0は　$x_0=\dfrac{M}{F}=\dfrac{2}{3}a$　（答）

３－１　演習問題

１．

左右対称なので上向き反力を$R_A = R_B = R$とすると，

分布力の合力は，　$$2R=\int_0^{10} 100\sin\frac{\pi x}{10}dx = 100\frac{10}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi x}{10}\right]_0^{10} = \frac{2000}{\pi}$$

よって $R_A = R_B = 1000/\pi$ N　または318.3N　(答)

２．

左の分布力の等価集中力の大きさと作用点は，

F_1=300N 左端から1.5m

右の線形に変化する分布力の大きさと作用点は，

F_2=200×6/2=600N 左端から8m

反力をR_A，R_Bとすると，

$R_A + R_B$ =300+600=900 N

R_B ×10=300×1.5+600×8=5250

よって　R_A =375 N，　R_B =525 N　(答)

３．

xの点の幅は$a(x/h)$なので，微小幅dxに作用する力は

$dF=\{p_0\times(x/h)\}\times\{a\times(x/h)\}dx=p_0\times a\times(x/h)^2dx$

である。したがって

$$F=\int_0^h p_0 a\left(\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{p_0 a}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3}p_0 ah \qquad \text{(答)}$$

分布力の作る点Oまわりのモーメントは

$$M=\int_0^h p_0 a\left(\frac{x}{h}\right)^2 xdx = \frac{p_0 a}{h^2}\int_0^h x^3 dx = \frac{1}{4}p_0 ah^2$$

よって等価集中力の作用点はx_C

$$x_C=\frac{M}{F}=\frac{3}{4}h \qquad \text{(答)}$$

４．

$$F=\int_1^3 p_0\left(\frac{3}{r}\right)2\pi r dr=6\pi p_0\int_1^3 dr=12\pi p_0=36799=36.8\mathrm{kN}\quad (答)$$

５．

θの点の微小角を望む円弧の長さは rdθなので y 方向の力の成分は $pr\cos\theta d\theta$ である。

よって

$$F=\int_{-\alpha}^{\alpha} pr\cos\theta d\theta=2pr\sin\alpha$$

荷重分布および円弧とも y 軸に対称なので（左右方向の成分は打ち消しあい），力の作用線は対称軸上になければならない。よって

等価集中力の作用線は対称軸（y 軸）

等価集中力の向きは，y 軸の正の向き

等価集中力の大きさは $F=2pr\sin\alpha$ （答）

３－２　ドリル問題

問題１

M=8×5×5×4=800g

F=0.8×9.8=7.84 N (答)

問題２

$W=7.9\times10^3\times0.1^3=7.9$kgf(=77.4 N) (答)

問題３

$W=8\times10^{-3}\times1000\times9.8+4\times10^{-3}\times5000\times9.8=274$ N (答)

問題４

三角形の重心 G_1 は，$\left(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}b\right)$

四角形の重心 G_2 は，$\left(\frac{3}{2}a,\frac{1}{2}b\right)$

全体の重心は，G_1 と G_2 を２：１に内分する点である。

$$x_G=\frac{2}{3}a\times\frac{1}{3}+\frac{3}{2}a\times\frac{2}{3}=\frac{11}{9}a$$
$$y_G=\frac{1}{3}b\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}b\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}b$$
(答)

問題５

下の直方体は

質量が 2×4×4×2＝64g

重心は床から 1 ㎝

上の四角錐は

質量が $3\times\frac{1}{3}\times4\times4\times4=64\text{g}$

重心は床から $2+\frac{4}{4}=3\text{cm}$

よって，重力は

$(64+64)\times10^{-3}\times9.8=1.25\text{N}$ （答）

全体の重心は，正方形の中心で床から

$$\frac{64\times1+64\times3}{64+64}=2\text{cm}$$

の点である。（答）

問題 6

円筒の質量は、$V=2\pi rtl\rho=50.2$ kg (答)

重心は、円の中心で高さの半分の点である。(答)

問題 7

直線と曲線の交点は、原点と(1,1)なので、図形の面積は

$$S=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{6}\quad(\text{答})$$

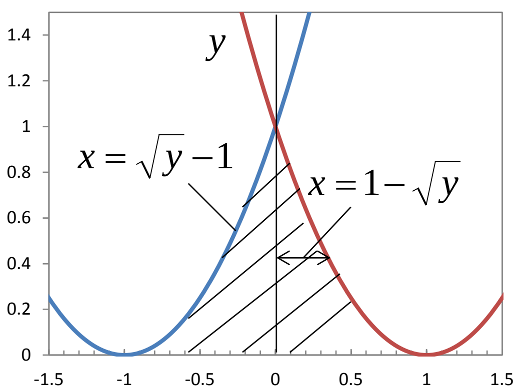
x 軸および y 軸まわりのモーメントは

$$T_x=2\int_0^1\left(\sqrt{y}-y\right)ydy=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{16}$$

$$T_x=2\int_0^1\left(x-x^2\right)xdx=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}$$

重心の座標は、$(x_G,y_G)=(1/2,\ 3/8)$ (答)

問題 8



左右対称な図形なので、図形の面積は

$$S=2\int_0^1 (x-1)^2 dx=\frac{2}{3}\left[(x-1)^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

左右対称な図形なので x_G=0。

x 軸まわりのモーメント $T_x=2\int_0^1 y\left(1-\sqrt{y}\right)dy=2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$

重心の y 座標は、$y_G=T_x/S$=3/10

したがって，重心の座標は（0, 3/10）　(答)

＜別解＞

x 軸方向に考えた場合，幅 dx 部分の長方形の面積は x^2dx，この部分の重心は x 軸から $x^2/2$ なので

$$T_x=2\int_0^1\left\{\left(x^2dx\right)\times\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right\}=\frac{1}{5}$$

問題 9

鉄球の質量は、$V=\{(4\pi r_1^3/3)-(4\pi r_2^3/3)\}\rho$=4779 kg

よって重力は　4779×9.8＝46.8×10^{3}N　(答)

問題 10

容器の質量 $m=\rho V$=(0.2×0.3+2×0.3×0.1+2×0.2×0.1)×0.002×8000 =2.56 kg　(答)

下面を軸としたときのモーメントは

S={0.2×0.3×0.002×0.001+(2×0.3+2×0.2)×0.1×0.002×0.05}×8000=0.0810

重心の下面からの距離は、S/m=0.0316 m =3.2cm　(答)

水の質量はM=0.2×0.3×0.1×1000 =6 kg

全体の質量は M=6 kg+2.56 kg=8.6kg　（答）

水の重心は下から　y=(10－0.2)/2+0.2=5.1cm

よって，水を入れたときの全体の重心は，下面から

$$y_G=\frac{6\times 5.10+2.56\times 3.16}{6.00+2.56}=4.52=4.5\,\text{cm}$$　（答）

問題 11

(1)　縦棒と横棒の重心は、(0,2)，(0,0)

2 部材は同じ質量なので重心は中点であり、(0,1)となる。(答)

(2)　縦棒と横棒の重心は、(0,1), (2,0)

$$x_G=0\times\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\,\text{m}$$

$$y_G=1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\,\text{m}$$

(答)

３－２　演習問題

１．

(1)　棒 1, 2, 3, 4 の重心は、(1,2), (0,1), (2,0), (4,2)

$$x_G = \frac{1}{12}\{1\times 2 + 0\times 2 + 2\times 4 + 4\times 4\} = \frac{26}{12} = 2.17\ \mathrm{m}$$

$$y_G = \frac{1}{12}\{2\times 2 + 1\times 2 + 0\times 4 + 4\times 2\} = \frac{14}{12} = 1.67\ \mathrm{m}$$

(答)

(2)　棒 1, 2, 3, 4 の重心は、(1,2), (0,1), (2,0), (6,2)

$$x_G = \frac{1}{8+4\sqrt{2}}\left\{1\times 2 + 0\times 2 + 2\times 4 + 6\times 4\sqrt{2}\right\} = \frac{10+24\sqrt{2}}{8+4\sqrt{2}} = 3.22\ \mathrm{m}$$

$$y_G = \frac{1}{8+4\sqrt{2}}\left\{2\times 2 + 2\times 1 + 4\times 0 + 2\times 4\sqrt{2}\right\} = \frac{6+8\sqrt{2}}{8+4\sqrt{2}} = 1.27\ \mathrm{m}$$

(答)

２.

(1)　$S(x) = \left(a\dfrac{x}{h}\right)^2 = \dfrac{a^2}{h^2}x^2$　[m²]　(答)

(2)　頂点を通り下面に平行な直線を軸としたときのモーメントは

$$T = \int_0^h S(x)x\,dx = \frac{1}{4}a^2h^2$$

よって，x軸上で頂点から重心 x_Gまでの距離は

$$x_G = \frac{T}{V} = \frac{3}{4}h$$　(答)

３.

底面積をAとする。

円柱の体積　2A　重心位置は下面から1cm

円錐の体積　2A　重心位置は下面から3.5cm

よって重心は、下面から $x_G = \dfrac{2A\times 1 + 2A\times 3.5}{2A+2A} = \dfrac{9}{4}$ =2.25cm　(答)

４.

球形殻の質量は　　$m_1 = \rho\dfrac{4}{3}\pi\left\{(R+t)^3 - R^3\right\}$＝78.45g

金属球の質量は　　$m_2 = \rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$＝37.70 g

よって重心は、球の中心から金属球の中心に向かって,

$$s = \frac{m_2}{m_1+m_2}\times 4$$=1.298・・・＝1.30 cm　(答)

５.

全体の重心は，境界を基準として座標をとると，

$$x_G = \frac{ax \times \left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{ah}{2} \times \frac{h}{3}}{ax + \frac{ah}{2}} = 0$$

$$x^2 = \frac{h^2}{3} = 0$$
(答)
$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}h$$

6．

(1)　縦と横の部分の面積は同じなので，重心は，各部分の重心を結ぶ線分の中点となる。

上の部分の重心は底面から8+40/2 cm

下の部分の重心は底面から8/2 cm

よって　全体の重心は底面から

$$x_G = \frac{28+4}{2} = 16\,\mathrm{cm} \quad (答)$$

(2)　各部分の重心位置（底面からの距離）と面積は

上の部材　S_1＝40×16，y_{G1}=56cm

中の部材　S_2= 8×40，y_{G2} = 28cm

下の部材　S_2= 8×40，y_{G2} = 4cm

全体の重心は

$$y_G = \frac{640 \times 56 + 320 \times 28 + 320 \times 4}{640 + 320 + 320} = 36\,\mathrm{cm} \quad (答)$$

7．

(1)　直線部の重心は(l/2，0)　（答）

曲線部の重心は，θを図のようにとると，θの点の微小要素の微小質量は

$dm=\rho Rd\theta A$

全質量は

$$m = \int_0^{\pi/2} dm = \int_0^{\pi/2} \rho RAd\theta = \frac{\pi}{2}\rho RA$$

交点まわりのモーメントは

$$S_x = \int_0^{\pi/2} xdm = \int_0^{\pi/2} -R\sin\theta \rho RAd\theta = -\rho R^2 A\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = -\rho R^2 A[-\cos\theta]_0^{\pi/2} = -\rho R^2 A$$

$$S_y = \int_0^{\pi/2} ydm = \int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta)\rho RAd\theta = \rho R^2 A\int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)d\theta = \rho R^2 A[\theta - \sin\theta]_0^{\pi/2} = \rho R^2 A\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

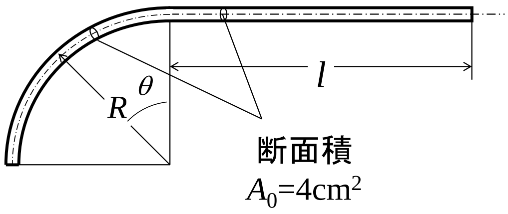
よって重心位置(x_G,y_G)= $\left(-\frac{2}{\pi}R, \left(1-\frac{2}{\pi}\right)R\right)$　(答)

(2)全体の重心は，

$$x_G = \frac{\rho l A \times \frac{l}{2} - \rho R^2 A}{\rho l A + \frac{\pi}{2}\rho R A} = \frac{\frac{1}{2}l^2 - R^2}{l + \frac{\pi}{2}R} = \frac{\pi^2 - 2}{3\pi}R$$

(答)

$$y_G = \frac{\rho R^2 A\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\rho l A + \frac{\pi}{2}\rho R A} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\frac{3\pi}{2}}R = \frac{\pi - 2}{3\pi}R$$



３－３　ドリル問題

問題 1

F=1000×100=100000 N　(答)

問題 2

P=1000×1000×10÷100000=100 気圧　(答)

問題 3

底面にかかる圧力は，P=100000+(1000×1.5×9.8) =114700 Pa

したがって，水圧の合力は　114700×10m×25m=28675000=28700 kN　（答）

側面に働く圧力は，深さをx[m]とすると，P=100000+(1000×x×9.8)=100000+9800x [Pa]

したがって，水圧の合力は

$$25 \times \int_0^{1.5} (100000 + 9800x)dx = 25 \times \left[100000x + 4900x^2\right]_0^{1.5}$$ =4025625=4030 kN　(答)

問題 4

P=1000㎏/m^3×5m×π ×0.2^{2}m^2 ×9.8m/s^2 =6158=6.16 kN　(答)

問題 5

球の中央断面の上方向に働く圧力の合力は，圧力×断面積なので，

F=100×100000×(π/4)=7.85×10^{6}N　(答)

問題 6

棒の質量　m_w=500×10×10^{-4}×50×10^{-2}=0.25

鉄の質量　m_s=7800×10×10^{-6}=7.8×10^{-2}

全質量は　m=0.328kg

よって　押しのける水の体積は$328 cm^3$

水に沈む木材の長さは　$l=(328-10)/10=31.8$㎝

よって水面に出る長さは　$50-31.8=18.2$cm　(答)

問題 7

合金の体積は　$100/20+100/10=15 cm^3$

よって合金の質量密度は，　$200/15=13.33\cdots=13.3 g/m^3$　(答)

水中での重さは，$200-15=185$gf　(答)

問題 8

合金の体積は　$50/20+150/10=17.5 cm^3$

よって合金の質量密度は，　$200/17.5=11.43\cdots=11.4 g/m^3$　(答)

水中での重さは，$200-17.5=182.5$gf　(答)

問題 9

気球の体積はV=$V=\dfrac{4\pi}{3}10^3=4189\,m^3$

500㎏fの質量を上げるために必要な，空気の重量減αは，$1.3\alpha V$ [kgf]

よって　$\alpha=500/(1.3V)=0.09182$

よって体積が$1/(1-\alpha)$倍になればよい。温度は$T/T_0=1/(1-\alpha)$。したがって

$T=T_0/(1-\alpha)=325.9\cdots=326$ K=53°C　(答)

問題10

$P=100000+900\times1\times9.8+1000\times2\times9.8=128420$Pa=128 kPa　(答)

３－３　演習問題

１．

おもりと容器の全質量は16kg，したがって水面下の全体積は16000 cm^3になればよい。したがって容器の水面下の深さをx[cm]とすると，底面の一辺の長さaは

$a=50x/100=0.5x$

よって，

$$\frac{1}{3}x\times(0.5x)^2=\frac{0.25}{3}x^3=16000-1000$$

$$x^3=180000$$

$x=56.5$cm　(答)

２．

1000m での圧力は，$9.8\times1000\times1000+100000=9.9\times10^6$ Pa

$100000\times20^3=r^3\times9.9\times10^6$

これより半径は$r=4.323$cm。したがって，直径は$d=8.65$ cm　(答)

３．

$$V=\frac{4\pi}{3}1^3=4.189\,\mathrm{m}^3$$

浮力はこの容器が押しのけた水の重力なので

F=4.189×1000×9.8=4.11×10^4 N　(答)

４．

左右対称なので下向きの力のみかかる。(r,θ)の点の微小要素$rdrd\theta$に働く力の下向きの力は

$p_0r/R\ rdrd\theta\cos\theta$

である。よって

$$F=\int_0^R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}p_0r^2\cos\theta drd\theta=p_0\int_0^R r^2dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta=\frac{2}{3}p_0R^3 \quad (答)$$

５．

体積は20cm^3，質量密度は300/20=15g/cm^3，金の体積割合をxとすると

19.32×x+10.5×(1－x)=15

8.82x=4.5

x=0.510

金の量は $20\times0.51\times19.32=197.14=197\,\mathrm{g}$　(答)

銀の量は $20\times0.49\times10.50=102.86=103\,\mathrm{g}$　(答)