じっきょう
数学資料 No. 68

自然は数学という言葉で書かれている

芝浦工業大学　学長　村上雅人

1. 数学は万国共通語

1972 年に筆者は，アメリカに渡った。高校 3 年生の夏である。留学は，それほどポピュラーではない時代で，1 ドルが 360 円であったことを覚えている。無謀であったのは，英会話の能力がほとんどなかったことである。難関の AFS 留学試験であったが，いろいろな偶然が重なって，なんとか合格した。

当然ながら，アメリカの高校の授業についていくのには苦労した。先生の言っていることがまったく分からない。当然，質問されても答えられない。まわりからは，日本から出来の悪い生徒がやってきたと思われていたようだ。

ところが，そんな学生がまわりを驚かせた。先生でさえ苦労している数学の問題を黒板でいとも簡単に解いてみせたのである。日本の大学入試問題に取り組んでいた身からすれば，当時のアメリカの高校で扱っている数学の問題は，そんなに難しくなかったのであるが，まわりは驚いたようだ。このことをきっかけに周囲の目が明らかに変わった。

この時，はたと気づいたのは「数学は万国共通語である」という事実である。日本で学んでいる数学は，アメリカでもそのまま通じる。いや，ヨーロッパでも，アフリカでも，中国，韓国でも通じるのである。こんな素晴らしい学問は数学だけであろう。英語ができなくとも，数学は通じる。これをきっかけに，物理も化学もすぐにクラスのトップになった。英語のほうも上達し，電話で話しているとホームステイ先の家族と間違われるまでになった。

当時の思い出は，数学の得意な友人たちとチームを組んで，カリフォルニア州の数学コンテストに参加したことである。残念ながら，チーム戦では入賞できなかったが，個人戦では準グランプリに輝いた。当時の新聞に，顔写真入りで大きく取り上げられたことを覚えている。

2. 自然は数学という言葉で書かれている

帰国後，日本の大学に入り，いったん数学への情熱を失った時期もあったが，理工学の専門課程に進んで，その素晴らしさを再認識することとなった。「自然は数学という言葉で書かれている」"The book of Nature is written in the language of mathematics."とはガリレイ (Galileo Galilei) の言葉であるが，まさに，理工学は数学という言葉で書かれている。しかも，長い歴史のなかで，数学を実に賢く利用しているの

もくじ

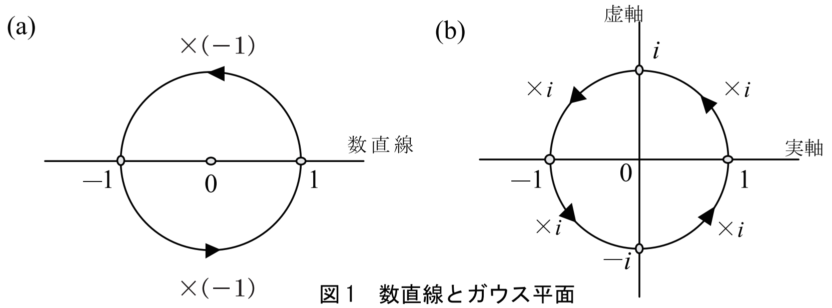

図1　数直線とガウス平面

である。

まず，驚いたことは，理工学では虚数をうまく利用していることであった。ご存知のように虚数は実在しない数である。これを通常は i と表記し，

$$i^2 = -1 \qquad \text{あるいは} \qquad i = \sqrt{-1}$$

と定義される。英語では imaginary number とされ，頭文字の"i"をとって虚数は i と表記する。直訳すれば想像数である。もちろん，こんな数は存在しない。偉大な数学者たちも「虚数は何の役にも立たないであろう」と言っている。そんな数が何の役に立つのだろうか。それが多くのひとの思いであろう。

実は，虚数には「1 次元から 2 次元への拡張」と「回転演算子」という機能がある。実数は，数直線と呼ばれる 1 本の線上ですべて表現することができる。整数も，分数も，無理数もすべてひとつの直線上の点である。

しかし，虚数はこの直線上にはないのである。では，どこにあるか。これを考えるために，つぎの計算をみてみよう。

$$1 \times (-1) = -1 \qquad 1 \times (-1) \times (-1) = 1$$

このように $\times(-1)$ という操作は，1 を -1 に変換し，2 回作用させると，もとの 1 に戻る。よって，図 1(a) に示すように，数直線の原点である 0 を中心として 180° 回転する操作とみなせるのである。2 回の操作で 360° 回転し，もとに戻る。

それでは $\times i$ という操作はどうであろうか。1 に作用させると

$$1 \times i = i \qquad 1 \times i \times i = i \times i = -1$$
$$1 \times i \times i \times i = -1 \times i = -i$$
$$1 \times i \times i \times i \times i = -i \times i = 1$$

となる。このように 1 に $\times i$ を 2 回作用させると -1 となり，$\times(-1)$ と同じ働きをする。そして，4 回作用させると，もとに戻る。つまり，4 回の操作で 360° 回転することになる。

したがって，$\times i$ という操作は，図 1(b) に示すように，数直線における 90° の回転とみなせるのである。しかし，直線のみでは，この作用は表現できない。このため，実軸と 90° 向きの異なる虚軸と呼ばれる新たな軸が必要となる。つまり，2 次元平面が必要で，これをガウス平面 (Gaussian plane) と呼んでいる。虚数を表現するには，2 次元の世界が必要となるのである。そして，虚数は実数とは 90° だけずれた世界なのである。

この機能が，理工学において利用価値の高い応用を生んでいる。例えば，電気回路において，交流という現象を解析すると，入力と出力にずれが生じることが多い。このずれは，遅れ成分と呼ばれ，入力に追随できない成分である。電場や磁場，力学などにおいて物理量が振動する現象には必ず見られる。実は，虚数を使えば，この遅れ成分をうまく表現できるのである。複素電流や複素帯磁率と聞くと，はじめは驚くが，ひとつの表式で同期成分と遅れ成分を表示しているのである。

そして，遅れ成分がゼロになった状態，すなわち虚数部が 0 となった状態を共振 (resonance) と呼んでいる。テレビで電波を受信する時に，各放送局から送られてくる電波（振動する電磁波）の周波数を調整して共振点に併せることで混線することなく，きれいな画像が受信できる。これをチューニング (tuning) と称する。

3. オイラーの公式

虚数が，物理の本質にもっとも大きな影響を与えたのは，オイラーが発見した次の等式であろう。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

これは指数(e)と三角関数を結びつける式であり，オイラーの公式 (Euler's formula) と呼ばれている。試しに，$\theta = \pi$を代入してみると

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$　となるので，

$e^{i\pi} + 1 = 0$　という式が得られる。

たった，ひとつの等式に数学で重要な 5 つの数，e, i, π, 1, 0 がすべて含まれている。奇跡の式と言われる所以である。私も，この式に出会った時に，神の天啓に触れたような感動を覚えた。

しかし，オイラーの公式が持つ神秘は，数学的な面白さだけではなかったのだ。まさに森羅万象の根源に関係していたのである。

20 世紀の初頭に，人類は，それまでの物理とはまったく異なるミクロの世界を記述する量子力学の建設を迫られる。しかし，その道のりは平坦ではなかった。なにしろ，電子の運動を，人間は見ることができない。それを明らかにするのは至難の業である。

この時，威力を発揮したのが数学であった。論理性に破綻のない数学を使うことで，少しずつ，目に見えない原子のなかの電子の運動を記述する数式が作られていくのである。その過程もまさに壮大な物語であり，数学の勝利の物語でもある。

しかし，その結果，人類が見たのは，常識では受け入れがたいものであった。それは，電子は粒子でもあり，波でもあるという二面性である。粒子と波は明らかに違うものである。物理的実態である電子が両方の性質を持っているとは到底考えられない。

実は，ここで，大活躍したのが，オイラーの公式であった。それは，電子のようなミクロ粒子は$e^{i\theta}$という衣をまとっているということである。

実数で波を表現しようとすると，$\sin\theta$ や $\cos\theta$を使うことになるが，これらの衣では，大きさが0から 1 まで変化してしまう。つまり，衣とともに物理量が変化するのである。ところが，簡単な計算で分かるように$e^{i\theta}$の大きさは常に 1 である。

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1$$

しかも，この表式は $\sin\theta$と$\cos\theta$を含んでいて，波の性質を与える。大きさを変えずに波の性質を付与する。そんな神業ができるのである。つまり，$e^{i\theta}$ は量子の世界の波を表現する魔法の道具なのである。

そして，量子力学では，電子を表す関数，すなわち波動関数を$\psi e^{i\theta}$と表記する。

普段，われわれが観察できるのはψのほうである。実際には，その絶対値の 2 乗をとり，

$\left|\psi e^{i\theta}\right|^2 = |\psi|^2$ として，これが電子の存在確率を与えるとしている。この操作で，$e^{i\theta}$ は消えてしまう。

このため，$\psi e^{i\theta}$に異を唱える研究者も多かった。なにしろ，物理的実体の $|\psi|^2$に対して，なんら影響を与えないうえ，$e^{i\theta}$ の θ を見たひとが誰もいなかったからである。

ところが θが電子波の位相という物理現象に対応することが，その後の研究で明らかになった。例えば，超伝導とは，電子の波がそろったコヒーレントな状態であり，すべての電子波の位相 θ が同じであることが分かったのである。そして，位相 θ の違いを利用したデバイスであるジョセフソン素子も開発された。いまや，θ の存在を疑うものはいない。

4. マックスウェル方程式

森羅万象を語るうえで忘れてはならないものに電磁気学もある。当初は，電気と磁気は別なものと考えられていたが，ファラデーやマックスウェルらの功績により，表裏一体のものであることが分かってきた。

ただし，電気ではプラスとマイナスの電荷は独立に存在しうるが，磁気では，プラスとマイナスの磁荷に相当するN極とS極は分離できないことが知られている。いまでも，N極あるいはS極だけからなる単極，すなわちモノポールの探索が行われているが，いまのところ見つかっていない。

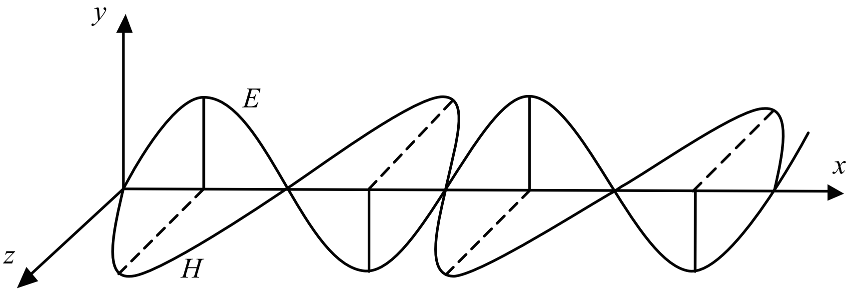

図 2　数学によって明らかとなった光の正体：電場と磁場が互いに振動して進む波

電磁気学も，まさに数学によって発展した学問である。そして，いまでは，複雑な電磁現象が，たった4個の方程式にまとめられている。

$$\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{D}} = \rho \qquad \mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}$$

$\vec{\boldsymbol{D}}\left[\mathrm{C/m^2}\right]$: 電束密度ベクトル；
$\vec{\boldsymbol{B}}\left[\mathrm{Wb/m^2}\right]$: 磁束密度ベクトル；
$\vec{\boldsymbol{E}}\left[\mathrm{V/m}\right]$: 電場ベクトル；$\vec{\boldsymbol{H}}\left[\mathrm{A/m}\right]$: 磁場ベクトル；
$\vec{\boldsymbol{i}}\left[\mathrm{A/m^2}\right]$: 電流密度ベクトル；
$\rho\left[\mathrm{C/m^3}\right]$: 電荷密度

また，空間の誘電率を$\varepsilon\left[\mathrm{F/m}\right]$，透磁率を$\mu\left[\mathrm{N/A^2}\right]$とすると　$\vec{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\vec{\boldsymbol{E}}$　$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}}$
という関係にある。

複雑な電磁現象が，たった 4 個の方程式にまとめられるということも驚きであるが，これらの方程式を解くことで，謎であった光の正体が明らかになったのである。

実際に，真空におけるマックスウェル方程式を解法すると，それを満足する電場ベクトルと磁場ベクトルの組み合わせとして

$$\vec{E} = A\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{H} = A\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

という解が得られる。ただし，ε_0 と μ_0 は，それぞれ真空の誘電率と，透磁率である。

これが真空における電磁波，すなわち，光の方程式である。この結果をイメージとして図示すると，図 2 のようになる。

ここでは，電場も磁場も同じ角振動数$\omega\,[\mathrm{rad/s}]$で振動していることが分かる。さらに，マックスウェル方程式から，光速が

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\left[\mathrm{m/s}\right]$$

によって与えられることが導出でき，数値を代入すると

$$c = \frac{1}{\sqrt{1.112 \times 10^{-17}}} \cong 3 \times 10^8\left[\mathrm{m/s}\right]$$

となる。

マックスウェル方程式は，初学者にはなじみのないベクトル演算を含んでおり，一見，近寄りがたい印象を与えるが，順序だてて取り組めば，高校生でも解法が可能である。そして，その先には，「人類最大の謎であった光の正体の解明」という大きな科学的成果が待っていたのである。

これも数学の勝利であろう。大学時代に，この方程式を解いて，光が電磁波であるということを自分で確かめたときの感激はいまでも忘れない。まさに，数学の威力を実感した瞬間であった。

ところで，波と考えられている光にも，粒子の性質があることが明らかとなっている。電子と同じように，光も二面性を有するのである。これも常識では受け入れがたい事実である。このため，電子も光も本質は，同じではないかという議論もあったが，明らかな違いがある。それは，数学的な視点で眺めれば，電子は虚数の波であり，光は実数の波であるという点である。

まさに，自然という偉大な本は，数学という人類の共通言語によって書かれているのである。