紙を折って数理を楽しむオリガミクス
―１枚の用紙を，素手で奇数等分する―

芳賀サイエンスラボ所長（元筑波大学教授，理学博士）　芳賀和夫

紙を折ったときに現れる数理事象に気を惹かれてから，はや 40 年を経過した。今でも，新幹線や飛行機の座席とか病院の待合室などでは，時間つぶしにたいていは紙を折っている。ただし，色とりどりの正方形の紙は使わず，ただの白い紙を使って，作品づくりではなく数理を楽しむことにしている。

もともと生物学を専攻していた私は，顕微鏡で何百枚もの組織切片を観察しているとき，疲れた目を癒し，気分転換を図るために机上にあったメモ用紙をよく折っていた。そうするうちに，いくつかのおもしろいことに気づき，その１つを，当時，月刊「数学セミナー」誌に折り紙の幾何学を寄稿されていた伏見康治先生（物理学者，先年亡くなられた）にお話ししたところ，同誌 No.206(1979) に私の発見を「芳賀氏の定理」としてご紹介くださった。これが契機となって，教員研修講座に声がかかったり，大学の公開講座を持ったり，高校や中学校の授業もするようになった。たとえば栃木県立宇都宮高校では SSH に呼ばれ，それが終わったあとも毎年オリガミクス講座を続けていて，今回紹介する奇数等分などもその授業で取り上げるテーマになっている。

実は，以前，じっきょう数学資料の No.33, 34, 35(1995) に「コピー用紙でオリガミクス」を書かせていただいたが，大分年数も経ったし，その頃にはまだ発想していなかった今回のテーマで，再登場することになった。

◇ 興味の発端

今回のテーマは『１枚の用紙を，素手で奇数等分する』である。ここでいう用紙とは無地の長方形の紙で，幅広なものも細長いものも，あるいは辺の比が１：１の正方形の用紙もふくむ。また，素手で，というのは目盛り付きの定規，コンパス，分度器などの差し測ることができる道具は一切使わないということで，便宜的に直定規*1 や折り線を細く明瞭に付けるための固いプラスチック片*2 は使うことにしている。奇数等分とは，紙を折ることによってできる折り線によって，用紙を縦にも横にも紙の幅を奇数に等分割する作図をいう。いわば折り線作図である。

上記の最初の発見は，図１のように正方形折り紙で上辺中点に右下の頂点を移動させて紙を折ると，辺の比が３：４：５の直角三角形，いわゆるエジプト三角形が３つできて，辺の相似比から左辺が交点で２：１に分割されるということである。この折り方で３等分点が得られるのだ。

上辺に中点ではなく右から４分の１の点をとって同様のことをやってみると，左辺の交点は５等分点になる（図２）。上辺の点の位置と左辺の分割の間には一定の関係があって，いろいろな奇数等分を楽しむ事ができる（表１）。

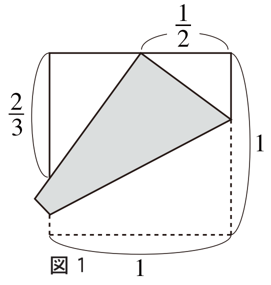


図１

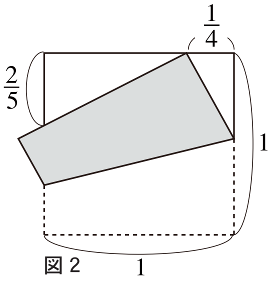
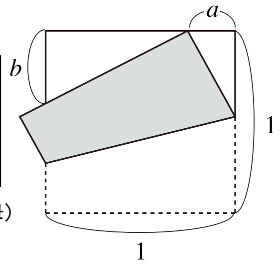


図２

a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
b	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{14}{15}$



右図の a に偶数をとると b は奇数になる（分母）

表１　定理折りによる奇数分割

*1　目盛りなし定規として，無地のアクリル板を細長く切ったものを使っている。

*2 小さい数の場合は爪を使うが，折る回数が増えると爪が痛くなるので，鍵などにつける小判の形のプラスチックの札を使う。これをコバン (coban) と呼ぶことにしている。交番と読み違えるので k ではなく c にしてある。英語の動詞として使うこともある。

◇定理折りによる奇数等分

紙を折ってできる奇数等分は，他にも方法がいろいろあるので，図３に例を示しておこう。これらを知っておくと人を驚かせたり，手品みたいに喝采を浴びたり，もちろん実用にも供することができる。特に，Ａ４やＢ５などの規格紙（辺の長さの比が $1:\sqrt{2}$，シルバー長方形ともいう）で，図３ｄの７等分がおもしろく，白紙を７等分に折ってみせると，なにかトリックを使ったと思われたりする。この７等分の数理を証明するのは良い練習題になる（証明略)。

このように，用紙の１つの辺上に定めた点をもとに紙を折る手法を，私は「定理折り」と呼んでいるが，これによって，さまざまな長さや形が得られるので，紙１枚で十分楽しむことができるのである。しかし，定理折りによる奇数等分は正方形とか規格紙とか辺の長さの比が定まった用紙でのみできることで，どのような比の長方形にも適用できるものではない。また，奇数についても３や５や７などに等分できるということで，17 等分とか 31 等分とか，さらに大きな数には展開できない。そこで次の方法を紹介しよう。

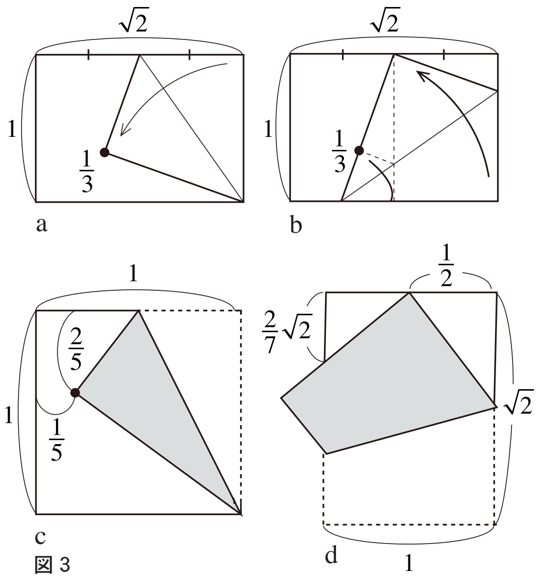


図３

◇振り子法

長方形の紙は，定規やコンパスなどの道具を使わずとも，半分に折って２等分，そのまた半分を折って４等分など，2^n 等分するのは簡単である。３等分，５等分など奇数に紙を折ることも少しずつすりあわせを加減すればできるかも知れないが不正確で，大きな奇数ではすり合わせもできない。十年ほど前，検査のためひと晩だけ病院に入院したことがあり，いろいろなセンサーのコードにつながれた状態で眠りが訪れるまで紙を折っていた。ベッド上をスライドする台を机にして，無地のレポート用紙を奇数に等分できる一般的で簡便な方法を探っていたのだが。試行錯誤的に試すうちに１つの方法を思いついた。自分勝手に「振り子法 Pendulum system」と呼んでいる方法である。以下に，この方法を記述するので，計算用紙やコピー用紙など，無地の白紙で試していただきたい。

◇振り子法による３等分

長方形の紙を机に置き，手始めにその紙を縦にも横にも３つに等分してみよう。まず，上の辺に中点のしるしをつける。辺の左右の端を会わせて中間点を指でちょっとつぶすだけでよく，紙全体を２つに折ってはいけない。折り線があとで邪魔になるからである。左の辺にも同様にして中点のしるしを付ける。この上辺と左辺の２か所の中点は，３等分に限らず，５等分，７等分や 17 等分でも，さらに大きな奇数等分でも，まず必要になるしるしである（図４)。

つぎに，左辺中点のしるしと上辺右端のかどを結ぶ線を，紙を折って折り線を付けたり直定規を当てて線を引く。この線は奇数等分の『共通線』である。どの奇数等分でも基準になる点がこの直線上に並ぶからである（図５)。線はもう１本，上辺が必要で，定規で引いても良いし，紙を折ってもよい。３等分の場合は上辺の中点を始点とし，下辺の左端に着地する線で，これも定規で引くか紙を折るかする。この線は，どの奇数にするかによって着地点が異なるので『個別線』と呼ぶ（図６)。

この共通線と個別線の交点が奇数等分の基準になる点（ノード，N）になる。こうして得られた３等分点N(3)を使って紙を横方向に３等分するには，まず，紙の右辺を，上辺と下辺から紙がはみ出さないように注意しながらその点まで平行に移動させ，その位置で紙を折り，次に，その折り線に左辺を重ねた状態で紙を折る。つづいて紙を縦方向に３等分するには，下辺を，紙が左右にはみ出していないことを確認しながら，N(3)まで移動させて，その位置で紙を折り，その新しい線に上辺を合わせて折る。これで紙を広げてみると，縦横にそれぞれ３等分する線ができている（図７）。

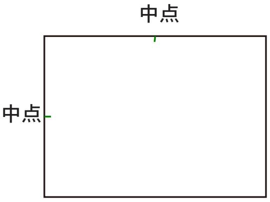


図４

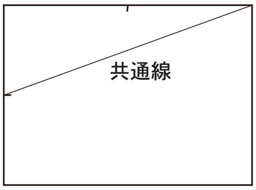


図５

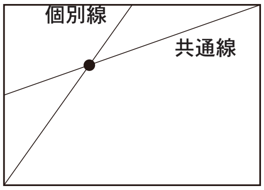


図６

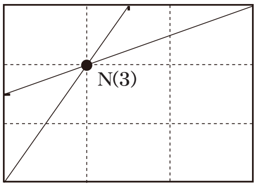


図７

◇振り子法による５等分

用紙の上辺と左辺にそれぞれの中点をマークすることと左辺中点と右辺上端を結ぶ共通線を描く，あるいは折り線作図するのは３等分の場合と同じで，上辺の中点を始点とする個別線については着地点（終点）が異なる。５等分の場合の着地点は下辺の右端になる。そして，この個別線が交わる共通線上の交点が５等分点N(5)である（図８）。このN(5)をもとにして実際に用紙を５等分する場合，用紙の横方向ではN(5)の右と左がどのような比になっているか，縦方向でもN(5)の上と下の比はどうかを考えなければならない。この方式では必ず整数比になるので，指をコンパスがわりに当て見当をつける。N(5)では，横は左と右が３：２，縦は上と下が１：４になっているので，偶数の方から紙を折って５等分にしていく。数が大きい奇数等分になると，この折り手順を探すのもパズルを解く気分になる。

ここで気づかれた方も多いと思うが，３等分の場合と５等分の場合は，上辺中点からの個別線が，３等分の場合は左に，５等分の場合は右に振れていて，その振れ幅は同じである。直線のグラフとしてみた場合はプラス／マイナスの符号は変わるが傾きは同値になっている。この関係は，７等分と９等分，11等分と13等分，15等分と17等分，…というように隣りあう奇数が，振り幅の同じ振り子よろしく対を成しているのだ（図９）。

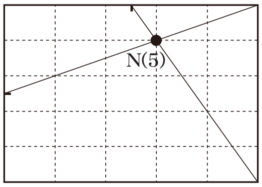


図８

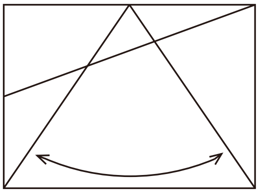


図９

◇７等分とその数理

７等分の場合は共通線は３等分や５等分の場合と共通だが，個別線の着地点は下辺左から下辺の長さの４分の１のところである。そして共通線上にできる個別線との交点が７等分の基準点N(7)になる（図10）。N(7)では，横は左右に３：４，縦は上下に２：５の位置になっている。

このことを確かめるため，用紙の左辺をy軸，下辺をx軸，下辺左端を原点とする座標を考えて，用紙の短い辺の長さを１，長い辺をLとすると，

共通線は，　$y=\dfrac{1}{2L}x+\dfrac{1}{2}$　…①

個別線(7)は，　$y=\dfrac{4}{L}x-1$　…②

と表される。７等分点はこれら２本の直線の交点なので，この①，②の式を連立方程式にして解を求め，座標が分かればよい。解いてみると，

$x=\dfrac{3L}{7}$ となるので，したがって $y=\dfrac{5}{7}$，つまり，共通線と個別線の交点の座標は$\left(\dfrac{3L}{7}, \dfrac{5}{7}\right)$となって（図11），その位置が紙を横方向に３：４に，縦方向に２：５に分割することが確かめられる。

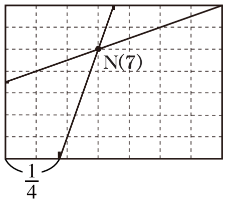


図 10

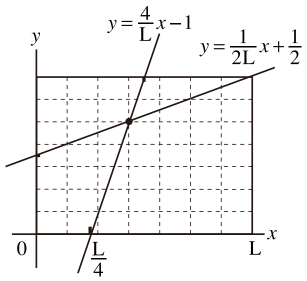


図 11

◇一般化を考える

さて，２本の直線の交点が奇数等分の基準点（ノード）になることが分かり，隣り合う奇数の個別線がまるで振り子のように右と左に変わるだけというおもしろさがあるのだから，個別線の着地点をどこに取ればどのような奇数の基準点ができるのだろうか，あるいは，ある奇数の等分をしたいと思ったときに，個別線の着地点をどこに取ればよいのだろうか，一般式を立ててみる。

図 12 で，個別線の着地点が下辺左端から mL(ただし, $0<m<\frac{1}{2}$)という距離にあるとすると，

共通線は，$y=\dfrac{x}{2L}+\dfrac{1}{2}$ …①(上記と同じ)

個別線は，$y=\dfrac{2x}{L(1-2m)}-\dfrac{2m}{1-2m}$ …②

となって，この①と②の２直線の交点は，連立方程式を解いて，

$$x=\frac{L(1+2m)}{3+2m},\quad y=\frac{2+2m}{3+2m}$$

つまり奇数分割のノード（基準点）の座標はこの (x, y) になるわけで，分母が奇数になるように m の値を考えたり，m の値を変えて設定したときに得られる奇数が分かったりできる。

上記の７等分の着地点が下辺左端から下辺の長さの４分の１だったから，９等分では右端から４分の１になるはずで，実際に紙を折ってみるとその通りになった。隣り合う奇数が２つずつペアになっていて，このような法則性が成り立つとすれば，11 等分と 13 等分がペア，15 等分と 17 等分もペア，…とつづいていく可能性が高い。紙を折ってみた結果では，着地点が下辺左端から下辺の長さの３分の１では 11 等分，右端から３分の１では 13 等分の基準点が得られ，左端から８分の３では 15 等分，右端から８分の３では 17 等分のそれぞれの基準点ができることを確かめることができた。

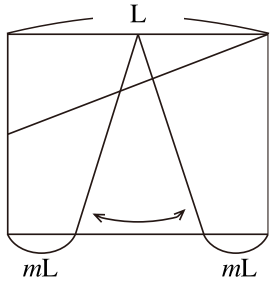


図 12

◇振り子法のおもしろみ

この振り子法の奇数等分のおもしろみは，“振り子” に加えて，１つのノード（基準点）が得られれば用紙を縦にも横にも奇数等分できることと，直角の四角であれば，どのような形にでも適用でき，たとえば，長方形用紙をこの挿図のように横置きにした場合に限らず，縦置きにしても成り立つことである。一般式の中で，用紙の辺の長さの比１：Lが全く数値に関係していないのだ。

現在，３桁の奇数に挑むことにして 101 等分（着地点は下辺左端から $\frac{5}{64}$ ）と格闘中である*3。

用紙を奇数等分しても賞品がでるわけでも飾り物ができるわけでもない。ただただ，そこに紙があるから折ってみたくなるのである。

*3 今年 2014 年８月に東大で行われる「第６回折り紙の科学・数学・教育国際会議」で成果を発表予定。

参考文献

芳賀和夫(1999) オリガミクス Part １：1-153 日本評論社

芳賀和夫(2005) オリガミクス Part ２：1-155 日本評論社

芳賀和夫(2011) 折り紙と数学〔オリガミクス〕数学教育 No.640:24-27 明治図書

Haga, K. (2011) Precise Division of Rectangular Paper into an Odd Number of Equal Psrts without Tools: An Origamics Exercise. Origami 5, CRC Press: 519-529