実践記録

複素数平面上における 2 次方程式の虚数解の存在位置について

− 3D grapes を活用して −

福岡県立小倉工業高等学校　野田賀宣

1．はじめに

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解は，実平面上における $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標である。$ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，数学Ⅰでは $D<0$ のとき，共有点をもたないので,「実数解なし」ということは理解しやすい。ところが，数学Ⅱになると，$D<0$ のとき,「異なる 2 つの虚数解をもつ」となり，どこに虚数解が存在しているのか理解しにくい。

今回，数学支援ソフト 3D grapes*1 を用いて，3 次元空間で複素数平面上の虚数解を可視化することで，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の存在位置を明らかにし，生徒の虚数解への理解につなげたい。

2．2 次方程式の解の存在位置について

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ の解を $x=u+vi$（u, v は実数，$i^2=-1$）とする。

$x=u+vi$ を $y=ax^2+bx+c$ に代入して整理すると, $y=\left(au^2-av^2+bu+c\right)+v(2au+b)i$

y が実数になる場合を考えると，虚部が 0 になればよい。ゆえに $v(2au+b)=0$

$\therefore\quad v=0$ 　または　 $u=-\dfrac{b}{2a}(=p)$ 　・・・①

このとき, y の実数部分　Real y は,

Real $y=au^2-av^2+bu+c$ 　・・・②

となる。

$x=u+vi$ は u, v を両座標軸にとった複素数平面上の点 (u, v) で表される。

そして，その原点からこの平面に垂直に実平面を立てた空間で，$y=f(u, v)$ のグラフを考える。

$a>0$ のとき，②の Real $y=au^2-av^2+bu+c$ のグラフは〔図 1〕のようになる。

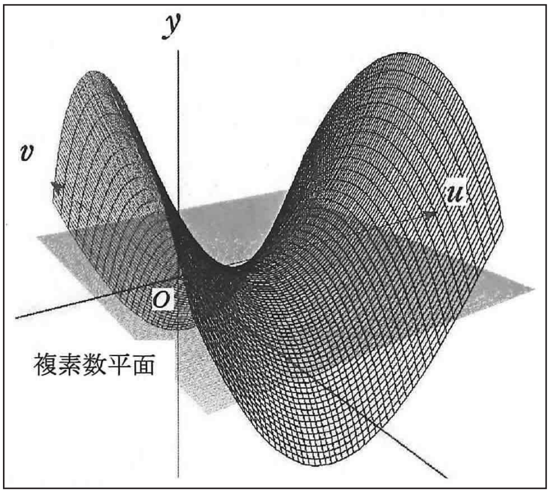


図 1　Real $y=au^2-av^2+bu+c$ のグラフ

ここで，$a>0$ として①の 2 つの場合を考える。

［1］判別式 $D=b^2-4ac<0$ のとき

（ｉ）$v=0$ のとき（x が実数のとき）

②より Real $y=au^2+bu+c$ $(a>0)$

これは〔図 1〕の Real $y=au^2-av^2+bu+c$ と平面 $v=0$ の交線（〔図 2〕の下に凸の放物線）と考えられる。この放物線は実軸とは共有点をもっていないので，実数解は存在しない。

（ⅱ）$u=-\dfrac{b}{2a}$ のとき

②より

$$\text{Real } y=au^2-av^2+bu+c$$
$$=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-av^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c$$
$$=-av^2-\frac{b^2}{4a}+c=-av^2-\frac{D}{4a}$$

これは，曲面 Real $y=au^2-av^2+bu+c$ と平面 $u=-\dfrac{b}{2a}$ の交線（〔図 2〕の上に凸の放物線）と考えられる。$y=0$ とすると，$v=\pm\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}$

すなわち $y=0$ となる点は uv 平面との交点

$\mathrm{A}'\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}\right)$，$\mathrm{B}'\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{\sqrt{-D}}{2a}\right)$ である。

よって，異なる２つの虚数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-D}\,i}{2a}$ をもつ。

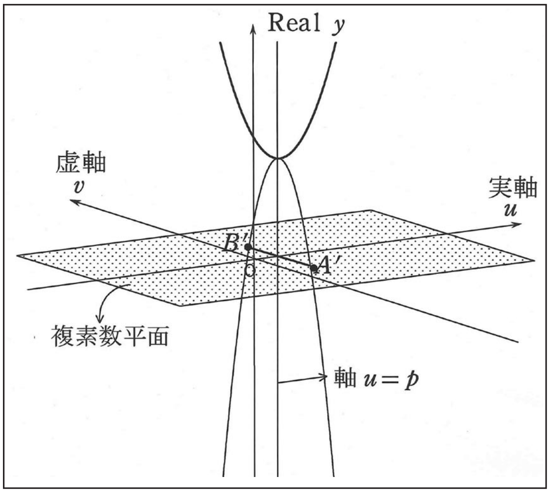


図２　判別式 $D<0$ の場合

［２］判別式 $D=b^2-4ac>0$ のとき

（ｉ）$v=0$ のとき（ x が実数のとき）

②より Real $y=au^2+bu+c$（〔図３〕の下に凸の放物線）　$y=0$ とすると，$u=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

すなわち $y=0$ となる点は uv 平面との交点

$\mathrm{A}\left(\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ 0\right)$ である。

よって，異なる２つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ をもつ。

（ii）$u=-\dfrac{b}{2a}$ のとき

②より　Real $y=-av^2-\dfrac{D}{4a}$

（〔図３〕の上に凸の放物線）

ここで $a>0$，v は実数より $y<0$ となり，$y=0$ となる実数 v は存在しない。

よって $D>0$ のときは，異なる２つの虚数解は存在しないことになる。

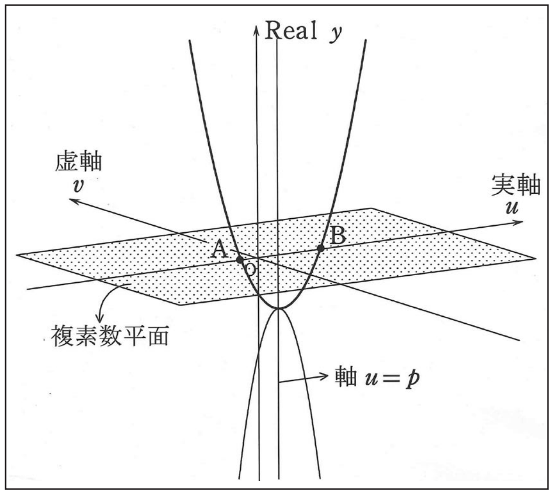


図３　判別式 $D>0$ の場合

３．実証授業

（1）指導対象生徒

指導対象生徒は，福岡県立小倉工業高等学校３年生７名（男子５名，女子２名）で，数学に興味関心が深い生徒を選んだ。

（2）授業展開

$\boxed{\text{めあて}}$：3D grapes を用いて，複素数平面上の２次方程式の虚数解の存在位置を理解する。

〇導入

①　２次方程式 $x^2-2x+5=0$ を解け。

（解）解の公式より，$x=1\pm 2i$

②　２次関数 $y=x^2-2x+5$ のグラフの頂点の座標を求めよ。

（解）$y=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$

よって，頂点の座標は $(1,\ 4)$

③　頂点の座標が $(1,\ 4)$ で，x^2 の係数（開き）が -1 である２次関数を求めよ。

（解）$y=-(x-1)^2+4=-x^2+2x+3$

④　２次関数 $y=-x^2+2x+3$ と x 軸との交点の座標を求めよ。

（解）$-x^2+2x+3=0$ の両辺に -1 をかけて

$x^2-2x-3=0$　左辺を因数分解して

$(x+1)(x-3)=0$　$\therefore$　$x=-1,\ 3$

よって，交点の座標は $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$

⑤　④の交点を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 0)$ とし，AB の中点の座標 M を求めよ。また，点 M に関

して　A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 0)$ を 90° 回転した後の座標A$'$，B$'$ をそれぞれ求めよ。

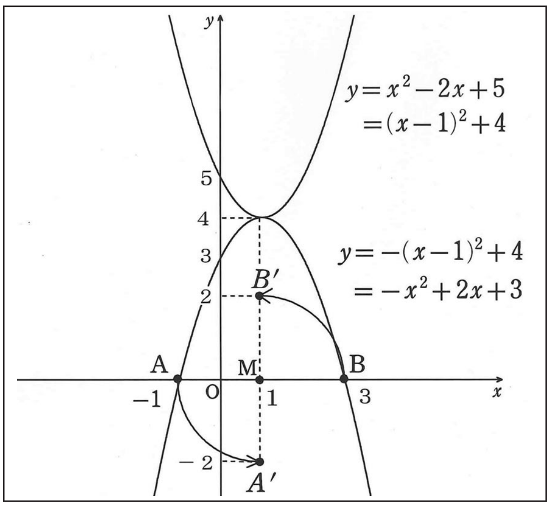
（解）$\mathrm{M}\left(\dfrac{-1+3}{2},\ 0\right)$　より　$\mathrm{M}(1,\ 0)$

$\mathrm{AM}=2$ より $\mathrm{A}'(1,\ -2)$　$\mathrm{BM}=2$ より $\mathrm{B}'(1,\ 2)$

⑥　①の $x^2-2x+5=0$ の解 $x=1\pm 2i$ を複素数平面上の点で表せ。

（解）$x=1-2i$ より $(1,\ -2)$，$x=1+2i$ より $(1,\ 2)$ である。

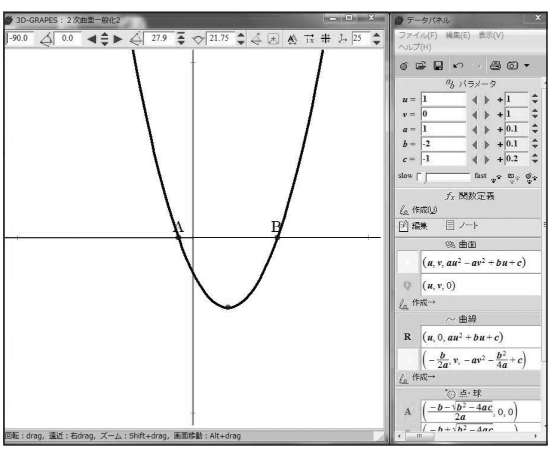
⑦　$y=x^2-2x+5$，A，B，$y=-x^2+2x+3$，A$'$，B$'$ の位置関係を教師が図示し，⑤の結果と⑥の結果が同じであることを確認させる。



○展開　(3D grapes で説明)

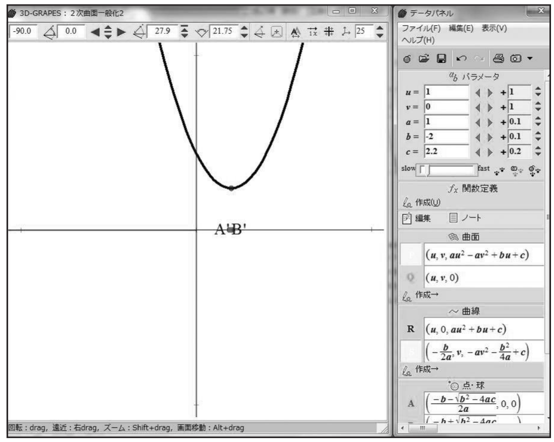
⑧　曲線 $(u,\ 0,\ au^2+bu+c)$ を表示。

（パラメータは $a=1$，$b=-2$，$c=-1$ とする。）



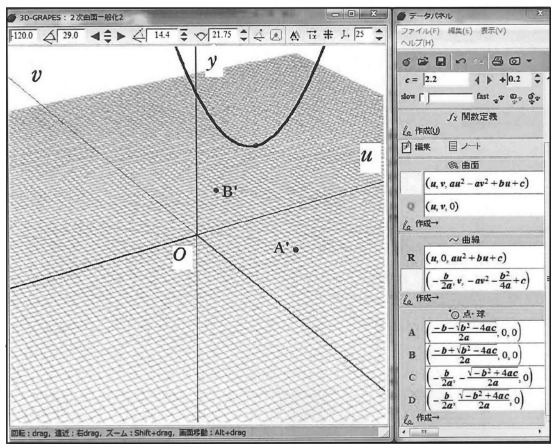
※放物線と x 軸と異なる２点 A，B で交わっていることを確認させる。

⑨　パラメータ c の値を増やす。



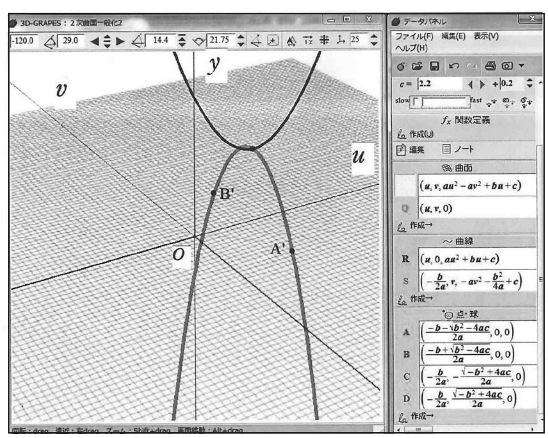
※ x 軸上に点 A$'$，B$'$ が現れる。

⑩　斜め上方からの位置に画面を変える。



※ u 軸を実軸，v 軸を虚軸とする複素数平面が現れる。２点 A$'$，B$'$ が虚数解の位置を表している。

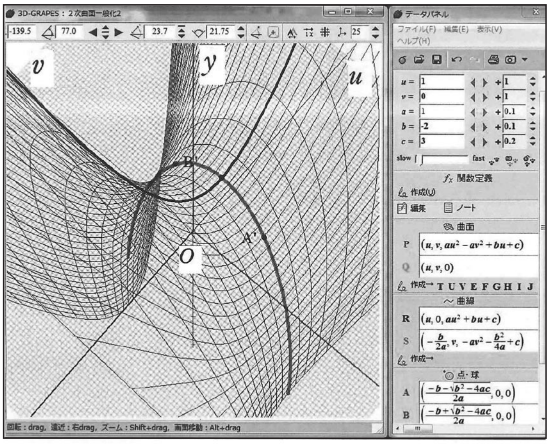
⑪　曲線 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ v,\ -av^2-\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$ を表示。



※現れたグラフは，元の（下に凸の）放物線と同じ頂点で，開きの符号を変えた（上に凸の）放物線を，軸のまわりに 90° 回転したものである。

⑦では A，B を M を中心に 90° 回転させたものを A′，B′ として実平面と複素数平面を重ねて図示した。⑪では下に凸の放物線自体を軸のまわりに 90° 回転させて複素数平面との交点 A′，B′ を図示している。

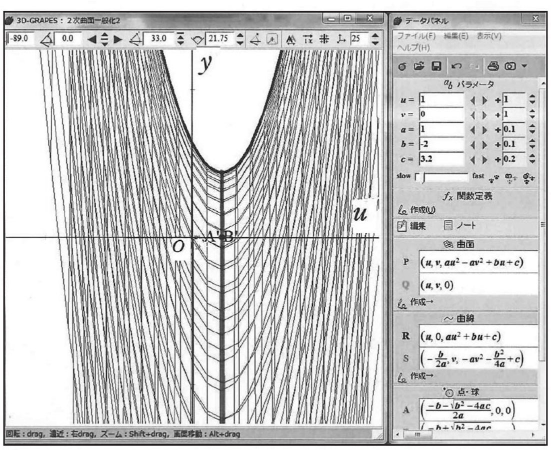
⑫　曲面 $\left(u,\ v,\ au^2-av^2+bu+c\right)$ を表示。



※このグラフは，馬の鞍の形をした 3 次元の関数 $y=au^2-av^2+bu+c$ を表している。2 次方程式 $x^2-2x+5=0$ の場合，$a=1$，$b=-2$，$c=5$ として，関数は $y=u^2-v^2-2u+5$ となる。

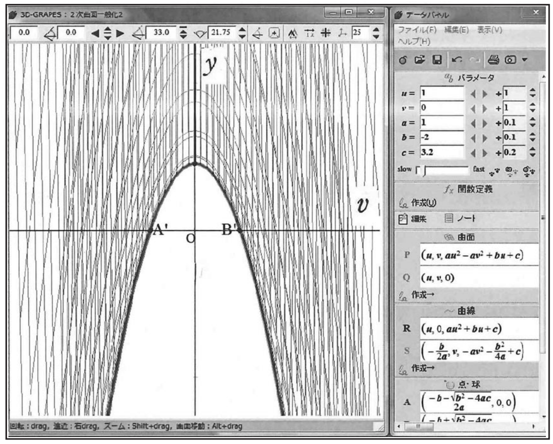
<u>○まとめ</u>

⑬　uy 平面を正面にした位置に画面を変える。



※ uy 平面の方程式は $v=0$ なので，正面には 2 次関数 $y=u^2-2u+5$ のグラフが現れる。u 軸と共有点をもたないので，2 次方程式 $x^2-2x+5=0$ は実数解がないことがわかる。

⑭　vy 平面を正面にした位置に画面を変える。



※ vy 平面を正面にすると，平面 $u=1$ との交線である 2 次関数 $y=-v^2+4$ のグラフが現れる。この放物線と複素数平面 $y=0$ との交点の座標は，$v=\pm2$ から，$(1,\ -2)$ と $(1,\ 2)$ であり，確かに 2 次方程式 $x^2-2x+5=0$ の虚数解 $x=1\pm2i$ を表している。

4．おわりに

生徒の感想には，「最初，2 次元で考えていたので実平面と複素数平面を重ねて，無理矢理虚数解の位置を表している感じだった。しかし，3 次元で考えると，実平面と複素数平面が垂直なので，グラフと虚数解の立体的な位置関係がよくわかった。今回使用したソフトでいろいろな角度からグラフが見えて分かりやすかった。」という内容が多かった。3D grapes の活用により，3 次元空間で複素数平面上の虚数解を可視化することで，$D<0$ のとき，複素数平面上に異なる 2 つの虚数解をもつことが理解できたと考えられる。

＊1　友田　勝久氏（大阪教育大学附属高等学校池田校舎）が作成した関数グラフソフトである。

【引用・参考文献】

1）早苗　雅史(2001).「虚数解のイメージ化」，数学のいずみ，pp.22-23，メディアサポート．
2）山口　清・渋谷　謙一(2001).「複素数の教材－幾何学的な視点から－」，全国数学教育学会誌　数学教育学研究　第 7 巻 2001，pp.133-141