新学習指導要領における中学校の数学ではどのような内容を扱い，どのように指導しているのか？
中学校の先生方から，関数領域での実践例，図形領域での指導の要点をそれぞれご紹介いただきました。

実践記録

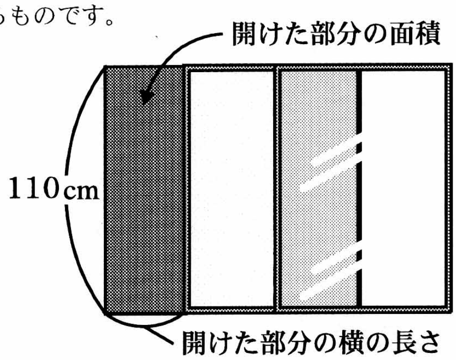
中学校第１学年の関数指導

―“ともなって変わる量”を封筒から考える！？―

東京都板橋区立高島第二中学校　高村真彦

1．はじめに

現在中学校数学の教科書を出版している会社は７社[*1]あり，そのうち１社を除き，第１学年の関数指導で扱っているのが，“封筒から画用紙を引き出す[*2]”という教材です。最近ではほとんどの教科書が『窓の開け閉め』の問題として扱っているものです。



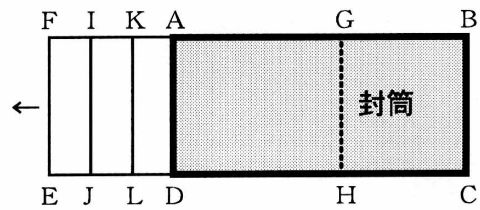
上図は“開けた部分の横の長さ”を独立変数，“開けた部分の面積”を従属変数として，その関係を調べさせる問題の図です。６社のうち１社[*3]を除いて同じように『窓の開け閉め』を扱っています。さらに従属変数を“開けた部分の面積”以外，例えば“開けた部分の周囲の長さ”との関係を考えさせる教科書もあります。このようにほとんどの教科書に載っている教材ということで，今回はこの教材を扱った授業展開を示します。

そもそもこの『窓の開け閉め』の発想は，おそらく東京都数学教育研究会（都中数）研究部の関数委員会が，1980年夏の日本数学教育学会（日数教）全国大会で，“ともなって変わる量を調べる授業”を発表したときに，その授業で扱った教具が封筒から画用紙を出し入れする視覚的に工夫したもので，それが最初と思われます。したがってこの分野の私の授業では，いつも“封筒から画用紙を出し入れ”する教材を扱っています。

発問は、生徒からの様々な答えを期待して，かならず「封筒から画用紙を引き出すと，何が変わりますか？」から始まります。

2．授業展開

先生（以下T)「封筒の中には，ぴったりと収まる画用紙が入っています。縦の線は１㎝間隔です (FI＝IK＝KA＝１㎝)。画用紙をこのように１㎝，２㎝･･･と引っ張り出していくと，何が変わりますか？」

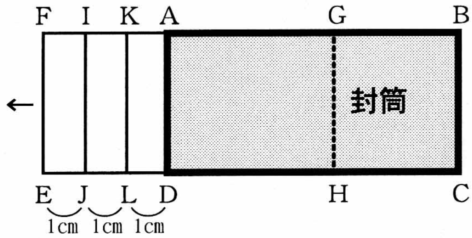


生徒（以下S)「長方形IJEFの大きさ分だけが増えていきます。」
S1「長方形AGHDの面積が変わります。」
S2「長方形GBCHの面積が変わります。」
S2「長方形FADEの面積が変わります。」
S3「長方形FBCEの周囲の長さが変わります。」
S4「AHの長さが変わります。」etc

T「それでは、変わらないものは何ですか。」
S1「BCの長さ」
S2「画用紙FGHEの大きさ」
S3「封筒ABCDの大きさ」etc

T「いろいろと変わるもの，変わらないものを挙げてくれましたが，今回は変わるものとして長方形FADEの面積を調べてみます。時間があったら他のものも調べることにします。さて封筒の縦（辺BC)を12㎝，横（辺AB)を20㎝として，1㎝，2㎝･･･と画用紙を引っ張り出したときの面積を

答えてください。」



〔板書〕

0 cmのとき，FADE の面積は 0 cm²
1 cmのとき，FADE の面積は 12 cm²
2 cmのとき，FADE の面積は 24 cm²
3 cmのとき，FADE の面積は 36 cm²
4 cmのとき，FADE の面積は 48 cm²
・
・
・

T「ところで“0 cmのとき”とは，画用紙がどのようになっているときですか。」

S「封筒に全部入っているときです。」

T「“1 cmのとき”は？」

S「長方形 FIJE の部分が封筒から出たときです。」

T「ここで確認しておきますが，“1 cmのとき，面積は 12 cm²”とありますが，どのように計算して得た数値ですか。」

S「1 cm× 12 cmです。」

T「そうですね。みなさん大丈夫ですね。それでは“引っ張り出した長さ”と“面積”を表にまとめておきましょう。」

〔板書〕

引っ張り出した長さ(cm)	0	1	2	3	4	…
面積(cm²)	0	12	24	36	48	…

T「この表を見て，何か気づきませんか。」

S1「0，1，2，3，4 と 1 ずつ増えています。」

S2「0, 12, 24, 36, 48 と 12 ずつ増えています。」

引っ張り出した長さ(cm)	0	1	2	3	4	…
面積(cm²)	0	12	24	36	48	…

S3「12 倍になっています。」

T「どういうことですか？」

S3「1 → 12，2 → 24、3 → 36、4 → 48 と縦に見ていくとどれも 12 倍になっています。」

引っ張り出した長さ(cm)	0	1	2	3	4	…
面積(cm²)	0	×12 12	×12 24	×12 36	×12 48	×12 …

T「0 のときも 0 × 12 ＝ 0 となって、確かに 12 倍になっていますね。他にありませんか。」

S「・・・」

T「次の表を見てください。どういうことが言えますか。」

引っ張り出した長さ(cm)	0	1	2	3	4	…
面積(cm²)	0	12	24	36	48	…

S「2 倍なら 2 倍，1.5 倍なら 1.5 倍，4 倍なら 4 倍になっています。」

T「教科書では『y が x に比例しているとき，x の値が 2 倍，3 倍･･･のとき，y の値も 2 倍，3 倍･･･になる。』というような書き方をしています。今回の授業では，“引っ張り出した長さ”が x で，“面積”が y となります。つまり『“面積(y)”は“引っ張り出した長さ(x)”に比例している』ということになります。ところで“引っ張り出した長さ”の値は，最大でいくらでしょうか。」

S「20 です。」

T「そうですね。20 cm以上引っ張ると封筒から抜けてしまいますね。最小が 0，最大が 20 ということですね。それを次のように書き，『x の変域は 0 以上 20 以下である』と言います。」

〔板書〕

$$0 \leqq x \leqq 20$$

T「もうひとつ、この表で特徴的なことがあるのですが，気づいた人はいませんか。」

S「特徴的なことかどうか分かりませんが，“引っ張り出した長さ”が 0 のとき，“面積”も 0 です。」

T「確かにいろいろな表を見ないと，そのことが特徴的かどうか判断できませんね。でもあなたの言ってくれたことは，先生の期待していた答えです。」

T「“引っ張り出した長さ”を x，“面積”を y として，y と x の関係を式で表してみてください。ヒントは，さっきも見た次の表です。」

引っ張り出した長さ(cm)	0	1	2	3	4	…
面積(cm²)	0	×12 12	×12 24	×12 36	×12 48	×12 …

S「・・・」

T「縦に見ていくと，どこも“引っ張り出した長さ”を 12 倍していることが分かると思います。ですから・・・」

S「$y=12x$ です。」

T「つまり『y は x に比例してる』と言えます。ちなみに x の係数 12 を比例定数といいますが，この 12 という数値は，封筒のどこの部分をいっていますか。」

S「AD の部分です。」

3．この教材の特徴

① 取り上げる“ともなって変わる量”によっていろいろな関数が導かれます。

ほとんどの教科書が，『窓の開け閉め』での“開けた部分の横の長さ”と“開けた部分の面積”に限って問題を載せていますが，それには理由があります。1年生では比例関係しか扱わないからです。

例えば，“長方形 FBCE の周囲の長さ”からは，

引っ張り出した長さ(cm)	0	1	2	3	4	…
周囲の長さ(cm)	64	66	68	70	72	…

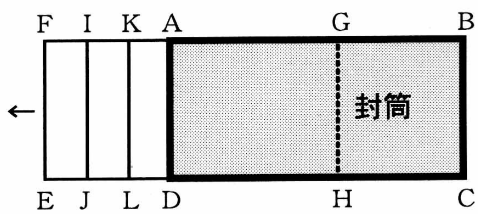
という表が得られますが，『y が x に比例しているとき，x の値が2倍，3倍・・・のとき，y の値も2倍，3倍・・・になる。』ということから，比例関係にないので“周囲の長さ”については極力避けています。しかし次の図を観察すると AF と DE が変化し，FE と DC, CB, BA が変化しないことが確かめられます。そのことから長方形 FECB の周囲の長さ y は，

$y=$(AF の長さ)+(DE の長さ)+(FE の長さ)+(DC の長さ)+(CB の長さ)+(BA の長さ)

$=x+x+12+20+12+20$

$=2x+64$

となります。定数項の 64 は封筒の一周の長さ，比例定数 2 は AF と DE の 2 辺のことであることも封筒から画用紙を抜き出す操作を通して，理解が可能になります。

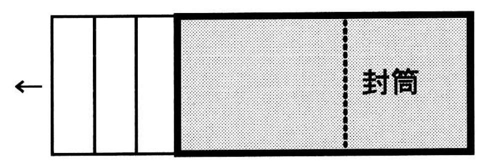


一方，表を観察すると比例定数（引っ張り出した長さ x が 1 増加すると周囲の長さ y は 2 増加する）や定数項（画用紙が封筒に全部入っているときの封筒の周囲）の意味も理解できるようになります。

このように周囲の長さを取り上げると，2年生で学習する1次関数を扱うことができます。そのためこの教材を2年生で扱っている教科書もあります。

② 離散量から連続量への移行がスムーズです。

I



II

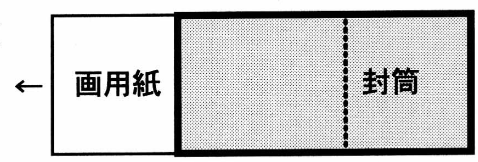


図 I のように画用紙に縦線を等間隔に入れると離散量として考えさせることができ，図 II のように縦線を取ると連続量を考えさせることができます。

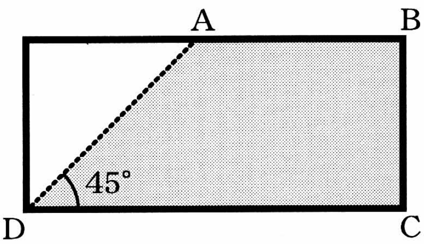
中学1年生ではたいてい無意識に 1，2，3・・・と離散量の考え方をしているので，図 I のような

画用紙を使って考えやすくしていますが，連続量の考え方も大事ですので，徐々に意識させなければなりません。そのために図Ⅱを提示して考えさせます。

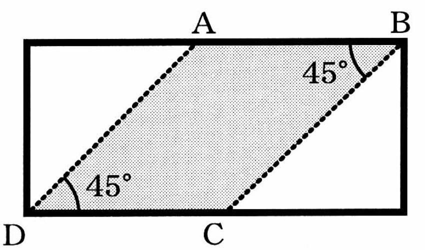
③　引き出す画用紙の形状を変えることによって難易度が変わります。

引き出す画用紙の形状を変えることによっていろいろな関数が導かれます。例えば，図Ⅲのように引き出す画用紙を台形 ABCD にすると，引き出された面積は，引っ張り出した長さの２乗に比例する関数で，ある地点から１次関数になる関数となります。

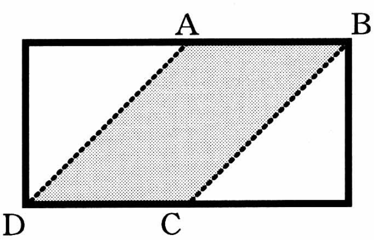
Ⅲ



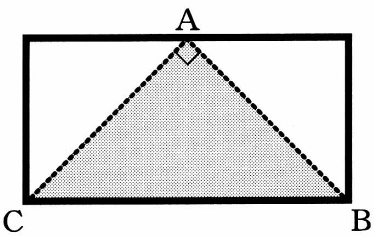
Ⅳ



Ⅴ



Ⅵ



図ⅣとⅤはいずれも平行四辺形ですが，Ⅳの方は横に伸ばしたもので，Ⅴの方は直角二等辺三角形を背中合わせにしたものです。またⅥの△ABC は，直角二等辺三角形です。ⅤとⅥは本質的に同じものですが、生徒にとっては異なったものと見てしまうので，並列して提示し観察させながら理解を深めさせます。いずれの場合も封筒の大きさを画用紙に合わせてきっちりと中に入るように調整しておきます。

この教材は，“ともなって変わる量”を封筒から引き出された面積に限定する必要はありません。生徒の気づいた“ともなって変わる量”をもとに，やらされている授業から自らやっている授業を展開することが容易です。

４．おわりに

封筒から画用紙を引き出す教材の魅力は，画用紙の形状を変えることによって，いろいろな関数が導かれることであり、また何を“ともなって変わる量”にするかによってもいろいろな関数が導かれることです。その意味でひとりひとりの生徒の学力に応じて難易度を変えることもでき，またどの学年でも扱える教材ですので，私は１学年で表の見方や表と式のつながり，変域などを含めて，じっくりしっかり扱い，もしも考えていく過程で１次関数や２乗に比例する関数が導かれたら，あえて避けることをせず，「実は，この関数は来年学習するものです」といった調子で紹介して終わらせています。

中学校数学は，小学校の具体的な見方から高校の抽象的な見方へ橋渡しする重要な位置にあると私は捉えています。その意味でも具体的な動きの中から式の意味や表中に潜む規則性を見つける学習は重要であると考えます。

---

*1 啓林館，東京書籍，大日本図書，学校図書，教育出版，日本文教出版，数研出版

*2 中学校数学科『関数指導を極める』(P18，P135)- 明治図書 -

*3 大日本図書の教科書だけ第２学年で２ページ分割いている。