じっきょう
数学資料 No. 65

『大学の理系分野で役に立つ高等学校の数学とは』

日本女子大学理学部准教授　小川賀代

平成24年度から実施された新学習指導要領では理数を重視しており，授業時間を増やしている。筆者は，数学・物理・情報を学ぶ理学部数物科学科の物理情報コースに所属しており，日頃，物理と情報の基礎を教えている。その中で感じている理系の専門を学ぶ際に必要な数学的思考や高校で学ぶ数学や理科に対する雑感をまとめてみたいと思う。

大学の理系といっても，様々な分野がある。高校までは自然科学の分野にちなんで物理，化学，生物，地学，数学を1科目として独立に学ぶ（数学を自然科学に含めるか否かは議論が分かれるが，ここでは高等学校における理系科目の括りとして自然科学に含める）。しかし，大学における専門教育はこのとおりではなく，お互いに関連している。理学部のすべての学科において自然現象を数式を用いてモデル化することは当然であり，筆者の専門である物理学においては，数学とは切っても切れない関係にある。また，工学部の機械工学科，電気電子工学科，材料工学科，建築学科，土木工学科，情報工学科，通信工学科などでは，いずれも現象を微分方程式，積分方程式で表し，その方程式を解法可能な形にし，そこに数値や条件式を与えて実用上の解を求めていく。それだけではない。行列を用いて多次元の現象を取り扱ったり，確率統計を用いて現象の予測を行ったりもする。よって，数学が無くては始まらないのが大学の理系の専門分野である。

しかし，高校での数学は独立した1教科として学んでおり，本来，結びつきが強い高校理科との関係性さえ見え難いのが現状ではないだろうか。それは，解法のテクニックを学ぶことを優先してしまっているからではないかと感じている。高校生にとって，大学受験はあまりにも大きなイベントになってしまっており，点を取るために解法を暗記することに力が入っているように思う。しかし，大事なのは，その理学的あるいは工学的な問題が与えられた時に，何故そのように表現できるのかを理解できなければ，大学の専門で直面する，問題の本質を理解するのは難しい。例を挙げて説明してみたいと思う。

例えば「内積」。式は次のとおりである。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (1)$$

高校でベクトルの演算を学ぶとき，和，差，実数倍まで順調に理解が進んでも，内積の意味が理解できず，つまずく生徒が多いように思う。（筆者の大学の学生たちは，単に式を暗記しているだけの者が多いと感じている）しかし，「内積」

も く じ

は物理学はもちろんのこと，画像処理や言語処理など様々な分野で道具として用いられており，多くの現象を表現したり，状態を表したりしている。

例えば，物理では，図 1 (a) に示すように物体に大きさ F[N] の一定の力を加えながら s[m] 動かしたとき，このとき力 F は物体に対して仕事 W をしたといい，その量は次の通りである。

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (2)$$

F も s もベクトル量で扱い，2 つのベクトルの内積で定義される。したがって，図 1 (b) に示すように力の向きと移動の向きが異なる場でも (2) 式で表すことができる。この式からも理解できるように，物体の動く向きと垂直に力を加えた場合は，内積が 0 となるため，仕事は 0 となることもわかる。

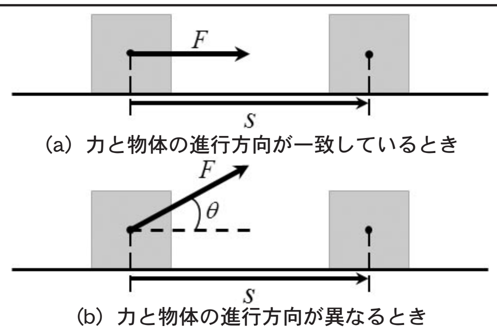


図 1　物理における仕事

改めて内積を図 2 を用いて説明する。図 2 (a) は，$\vec{b}$ が $\vec{a}$ に正射影しており，$|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta)$ で表される。(b) は $\vec{a}$ が $\vec{b}$ に正射影しており，$|\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)$ で表すことができ，いずれも同じ式で表せる。このことから，内積とは，いずれかの成分に正斜影し，掛け算したものであることがわかる。式が理解できれば，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ が成り立つこともわかる。しかし，高校物理の教科書では，力の向きと運動の向きが同じ場合の仕事を式 (3) で，異なる場合の仕事を (4) 式で定義している。

$$W = Fs \quad (3)$$

$$W = Fs\cos\theta \quad (4)$$

(4) 式の説明として“仕事をするのは移動方向の力の成分であり，$F_x = F\cos\theta$ だから，物体を s[m] 動かした時，力 F がした仕事 W は (2) 式のようになる”と説明されている。

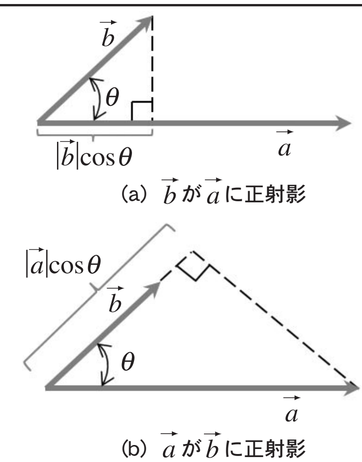


図 2　内積の計算

力は意識的にベクトルとして扱っているが，移動はベクトルとして扱っておらず，絶対値だけで取り扱ってしまっている。勘のいい生徒は内積だと気付くかもしれないが，どこにも「内積」の記載はないため，残念ながら気付かない生徒たちは 2 つの式を暗記することになってしまう状況である。

しかし，数学の中でイメージを持って理解ができれば，他教科で出てくる現象と結び付けることも容易になってくると思う。是非とも，数学の中でも，式のイメージを醸成させるために物理の例を取り上げて欲しいと思う。また，物理も積極的に高校の数学を使って欲しいと願っている。

イメージで理解できるようになると，内積を用いて 2 つのベクトル間の角度を求めることが可能なことも納得できると思う。実際に，高校数学の練習問題の中でも，2 直線の直交判定や点が線上にあるかないかの判定に内積を使っている。内積から角度を求めることを利用する具体的な応用例の 1 つとして，画像処理での「隠面消去」がある。隠面消去とは，コンピュータ上で 3 次元立体を表示する方法の 1 つであり，視点から見て, 物体の裏側にあって，本来見えていない面 (隠面) を消去することをいう。

図 3 に示すように，注視面の法線ベクトル（破線）と視線ベクトル（実線）のなす角度が 90 度未満であれば可視であり，90 度を超えると不可視となるので, 内積を用い，正の値であれば可視，負の値であれば不可視と判定し，隠面消去を行っている。

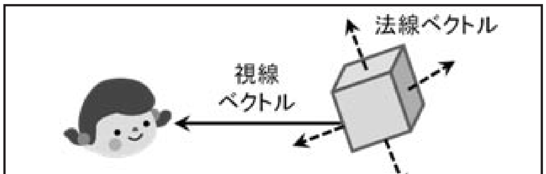


図３　隠面消去

画像処理の分野では，隠面消去だけでなく，表面の反射光の計算などにも内積を利用している。

ここまでは，内積の式から求めることができる物理量を取り扱ってきたが，内積の利用はこれだけでない。内積は相関として使われることも多い。

私の研究では，ｅポートフォリオ（学習履歴や成績，レポートなど学習過程において用いたすべての情報を蓄積し活用するシステム）に蓄積されている文書情報とロールモデルの文章情報の類似性を算出し，キャリア支援として業種・職種の適性を示すシステムを構築している[1]。ここで類似性を定量的に示す指標として「コサイン尺度」を用いており，次式で示すことができる。

$$\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \quad (5)$$

式をみれば内積の変形であることがわかる。名称の通りコサインのことである。コサイン尺度は，多次元の情報をベクトルで表現し，そのベクトルが同じ方向であれば類似していると判断する。これは，文書検索にもよく用いられている。

文書をベクトルで表すというのはピンとこないかもしれないが，図4(a)に示すように，文章中で使用されている単語の出現数を並べ，多次元のベクトルで表現することができる。文書データをベクトルで表現できれば，数式で扱うことができる。よって，図4(b)に示すように，ベクトルがどのくらい一致しているか定量的に求めることができ，相関の状態を示すことができるのである。

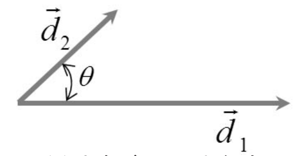
これまでの例からもわかるように，内積は多くの分野で利用されており，単なる公式の暗記で終わってしまっては，このような世界は感じることができないし，数式を使いこなしていることにならない。数式の意味がわからなければ，どのような数式を適用して求めたい解を導けばよいかもわからないし，結果の意味さえもわからないのである。

ベクトルは，高校では３次元までしか取り扱わないが，大学では多次元の取り扱いは当たり前である。しかし，一旦，概念のイメージができれば，２次元，３次元だけでなく多次元の活用も恐れることはない。また，大学に入って「外積」を習うが，高校で内積が理解できていれば外積も容易に理解できる。言うまでもなく，外積も内積と同様，様々なところで応用されている。

$$\begin{array}{c}
 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & \cdots & d_j \end{array} \\
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

d_j：文書ベクトル
w_i：単語
c_{ij}：文書 d_j 中の単語 w_i の出現回数

(a) 単語・文書行列



(b) 文書データの類似度

図４　コサイン尺度

今回は，紙面の関係上，「内積」のみを取り上げたが（内積に関しても，取り上げた例は一部であり，まだまだ応用例はたくさんある。），同様に，微分・積分，複素数，確率なども工学的現象や社会的現象を表現することができる。高校の数学はどの単元も大学の理系分野の基礎となるものであるので，現象のイメージができる理解の仕方が大事である。理系分野に限らず，経済状況の予測なども確率や方程式を用いて行っており，高校数学におけるイメージを持った理解は，数学を用いるすべての専門分野で重要であると言っていいと思っている。

新しい学習指導要領を見ると随所に追記項目が見られ「事象の考察に活用すること」と謳われている。

限られた時間の中での授業ではあると思うが，一つ一つの式を大切に，イメージできる理解を促すことを期待している。

[1] 柳，小川："e ポートフォリオの蓄積文書を活用したキャリア支援システムの開発，" 日本教育工学会論文誌，Vol.35, No.3, pp.237-245 (2011).