実践記録

正多面体の大学入試問題を簡単に解く

— 模型（正四面体・正六面体・正八面体・正十二面体・正二十面体）を見せながら —

新課程が始まり，数学Aで多面体の性質が扱われることになりました。
これまで以上に空間ベクトルと多面体の入試問題が出題されることが想定されます。
今回は，模型を用いて多面体およびベクトルの大学入試問題を解説した授業実践を報告していただきました。

清風中学校・高等学校　川西秀史

生徒に模型を見せながら，正多面体の大学入試問題を解説したのでここに紹介させていただく。

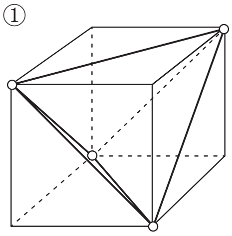
1．正多面体の性質

	頂点の数	辺の数	面の形状
正 四 面 体	4	6	正三角形
正 六 面 体	8	12	正 方 形
正 八 面 体	6	12	正三角形
正十二面体	20	30	正五角形
正二十面体	12	30	正三角形

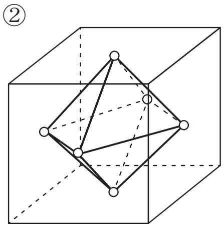
正多面体は，適するように頂点を選ぶことで，別の正多面体を作ることができる。

①正六面体(1 つおきの頂点)→正四面体
②正六面体(各面の中心)→正八面体
③正四面体(各辺の中点)→正八面体
④正十二面体(8個の頂点)→正六面体

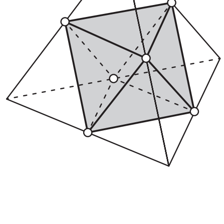
①



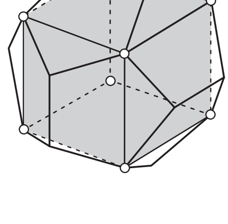
②



③



④



2．大学入試問題

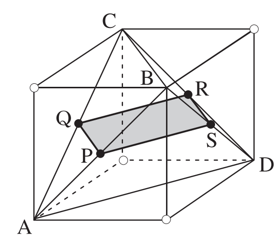
例題1　正四面体 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とし，辺 AB，AC，CD，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする。このとき，4点 P，Q，R，S は同一平面上にあることを示し，さらに四角形 PQRS は正方形になることを示せ。

〔2011 年弘前大学〕

解答

立方体から4個の○印の頂点を切り落とすと，正四面体ができる。

また，4点 P，Q，R，S は正八面体の頂点でもある。



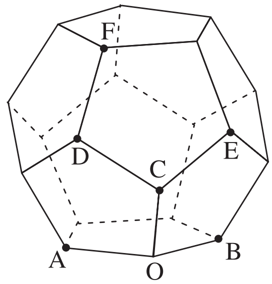
例題2　1辺の長さが1の正十二面体を考える。点 O, A, B, C, D, E, F を図に示す正十二面体の頂点とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。なお，正十二面体では，すべての面は合同な正五角形であり，各頂点は3つの正五角形に共有されている。

(1) 1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求めて，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{OF}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(3) O から平面 ABD に垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。さらにその長さを求めよ。

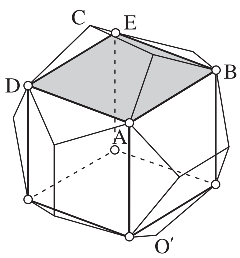
〔2011 年福井大学〕

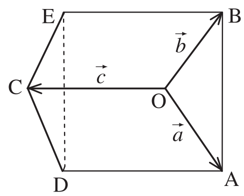


解答

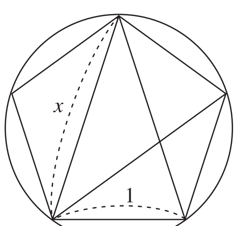
(1)(2) 略

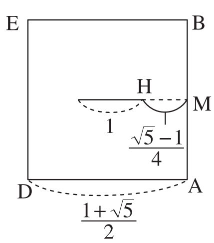
(3) 正十二面体は，立方体（一辺の長さは正五角形の対角線）の各面に屋根【図 1】を付けた形である。





【図 1】





対角線の長さを x とおくと，トレミーの定理により，$x^2=1\times x+1\times 1$ から $x^2-x-1=0$

$x>0$ より，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

また，ABの中点をMとすると

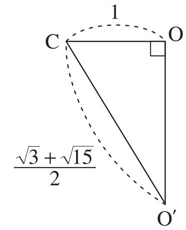
$\mathrm{MH}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MH}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{c}$

正十二面体の外接球の直径は，立方体の対角線の長さであるから，

$\sqrt{3}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$

$$\mathrm{OO'}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{14+2\sqrt{45}}{4}}=\frac{\sqrt{9}+\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$



よって，$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

例題 3　1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，辺 OC の中点を M，辺 AB の中点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問に答えよ。

(1) $\theta=\angle\mathrm{AMN}$とする。$\cos\theta$の値を求めよ。

(2) $0<s<1$ とする。線分 MN を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$, s を用いて表せ。

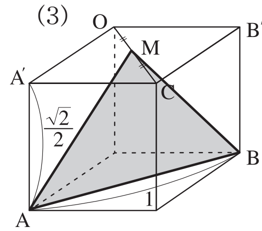
(3) 三角形 ABM の外心をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

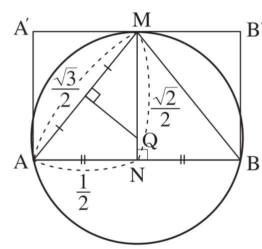
(4) 2 直線 OA と OB に平行で点 C を通る平面をαとする。点 A，B，M を通り，平面α上に中心をもつ球面を S とする。S の中心を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。　〔2011 年岐阜大学〕

解答

(1)(2) 略

(3)





（平面 ABM ⊥ OC）

【図 1】　【図 2】

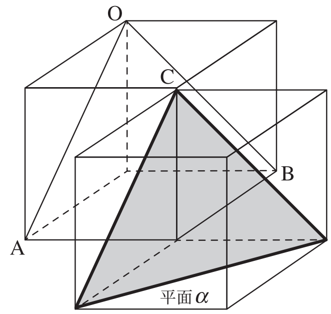
三角形 ABM の外接円は A′B′ に接し，

$\mathrm{MQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

よって，$\mathrm{MQ}:\mathrm{QN}=3:1$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{3}{4}\times\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{\vec{c}}{2}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$$

(4)



点Qを通り，平面 ABM に垂直な直線と平面αとの交点が R である。(平面 ABM)$\perp\vec{c}$であるから２つの立方体を重ねると

$$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\vec{c}$$

$\boxed{\text{例題４}}$　一辺の長さが１の正二十面体 W のすべての頂点が球 S の表面上にあるとき，次の問いに答えよ。なお，正二十面体は，すべての面が合同な正三角形であり，各頂点は５つの正三角形に共有されている。

(1) 正二十面体の頂点の総数を求めよ。

(2) 正二十面体 W の１つの頂点を A，頂点 A からの距離が１である５つの頂点を B, C, D, E, F とする。正五角形 BCDEF の外接円の半径 R と対角線 BE の長さを求めよ。

問題文から$\sin 36°$の値を省略

(3) ２つの頂点 D，E からの距離が１である２つの頂点のうち，頂点 A でない方を G とする。球 S の直径 BG の長さを求めよ。

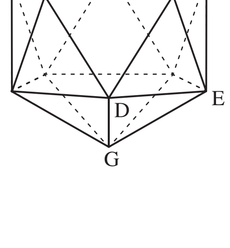
(4) 球 S の中心を O とする。△ DEG を底面とする三角錐 ODEG の体積を求めよ。

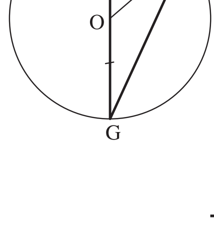
〔2010 年岐阜薬科大学〕

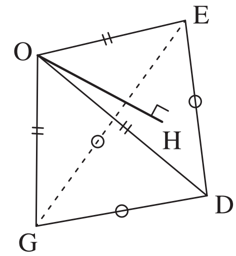
$\boxed{\text{解答}}$

(1)(2) 略

(3)







AG は正五角形の対角線の長さで，トレミーの定理 (例題２参照) より

$AG=\frac{1+\sqrt5}{2}$ である。 $\angle BAG=90°$ であるから，

$$BG=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt5}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{2}$$

(4) 点 O から平面 DEG に垂線 OH を引くと，△ DEG は正三角形であるから，点 H は外心であり重心でもある。

$$OH=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{14+2\sqrt{45}}{48}}=\frac{3+\sqrt5}{4\sqrt3}$$
$$V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin 60°\right)\times\frac{3+\sqrt5}{4\sqrt3}=\frac{3+\sqrt5}{48}$$

$\boxed{\text{例題５}}$　すべての辺の長さが１の四角錐がある。この四角錐の頂点を O，底面を正方形 ABCD とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。このとき，次の各問に答えよ。

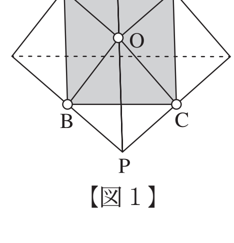
(1) $\overrightarrow{OD}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ。

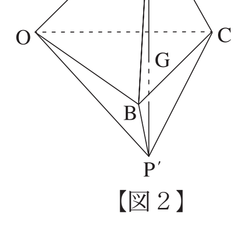
(3) 点 P，O，B，C が正四面体の頂点となるようなすべての点 P について，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。　〔2010 年宮崎大学〕

$\boxed{\text{解答}}$

(1)(2) 略



【図１】



【図２】

(3) 正四面体の６つの辺の中点を結ぶと正八面体ができる。５点 O, A, B, C, D は正八面体の頂点である。【図１】

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=-\vec{a}+\vec{b}$

また，もう一つの点 P′ は，点 P の平面 OBC に関する対称点であり，△ OBC の重心を G とおくと線分 PG を２：１に外分する点である。【図２】

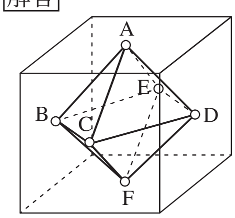
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}'=-\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$
$$=-(-\vec{a}+\vec{b})+2\times\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$
$$=\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

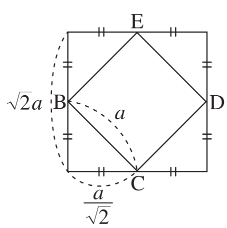
よって，OP $=-\vec{a}+\vec{b}$ ，$\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

2012 年度の問題から

> 一辺の長さが a の正八面体の体積と，この正八面体に内接する球，外接する球の半径を求めよ。　〔2012 年名古屋市立大学〕

解答



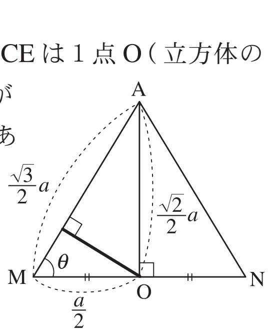


立方体の一辺の長さは，$\sqrt{2}a$ であるから

正八面体の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\times a^2\times\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

３本の線分 AF と BD と CE は１点 O（立方体の中心）で交わり，この点が外接球と内接球の中心である。



外接球の半径は，$\frac{a}{\sqrt{2}}$

また，線分 BC，DE の中点をそれぞれ M，N とすると，内接球の半径は

$$\mathrm{OM}\sin\theta=\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$$

【参考】

岡多賀彦先生（元高校教師大阪府在住）の手作りの模型（下の写真）を頂いたものです。

このような模型を使用することで，イメージが掴み易くなり，生徒の理解の手助けとなることが期待されます。