

「制御工学」 第2章演習問題解答

1 .

運動法則の関係より、台車に働く力は以下のように表される。

$$M \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} = K\{x_i(t) - x_o(t)\} + C \frac{d\{x_i(t) - x_o(t)\}}{dt}$$

これらを整理すると、関係式は以下のようになる。

$$\underline{M \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + C \frac{dx_o(t)}{dt} + Kx_o(t) = C \frac{dx_i(t)}{dt} + Kx_i(t)} \quad (\text{答})$$

2 .

台車  $M_1$ ,  $M_2$  のそれぞれについて運動方程式を立てると、以下のように表される。

$$M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = f(t) - K_1 x_1(t) - C \frac{dx_1(t)}{dt} - K_2 \{x_1(t) - x_2(t)\} \quad (1)$$

$$M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = K_2 \{x_1(t) - x_2(t)\} \quad (2)$$

(2)より、 $x_1(t)$ は以下のように示される。

$$x_1(t) = \frac{M_2}{K_2} \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + x_2(t) \quad (3)$$

(3)を(1)に代入して整理すると、関係式は以下のようになる。

$$\underline{\frac{M_1 M_2}{K_2} \frac{d^4 x_2(t)}{dt^4} + \frac{C M_2}{K_2} \frac{d^3 x_2(t)}{dt^3} + \left\{ M_1 + \frac{\{K_1 + K_2\} M_2}{K_2} \right\} \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + C \frac{dx_2(t)}{dt} + K_1 x_2(t) = f(t)}$$

(答)

3 .

AB間とBC間での電圧降下は、以下のように表される。

$$e_i(t) - e_c(t) = R_1 i_1(t) \quad (1)$$

$$e_c(t) - e_o(t) = R_2 i_2(t) \quad (2)$$

出力電圧  $e_c(t)$  と  $e_o(t)$  は以下のように表され、それぞれ  $i_1(t)$  と  $i_2(t)$  について変形する。

$$e_c(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(\tau) d\tau \quad \text{より} \quad i_1(t) = C_1 \frac{de_c(t)}{dt} \quad (3)$$

$$e_o(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(\tau) d\tau \quad \text{より} \quad i_2(t) = C_2 \frac{de_o(t)}{dt} \quad (4)$$

B点での電流の関係は、(3)と(4)を用いて以下のようになる。

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = C_1 \frac{de_c(t)}{dt} + C_2 \frac{de_o(t)}{dt} \quad (5)$$

(2)から(5)を(1)に代入して整理すると、関係式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
e_i(t) &= R_1 i(t) + e_c(t) = R_1 \left\{ C_1 \frac{de_c(t)}{dt} + C_2 \frac{de_o(t)}{dt} \right\} + e_c(t) \\
&= R_1 \left[ C_1 \left\{ R_2 C_2 \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + \frac{de_o(t)}{dt} \right\} + C_2 \frac{de_o(t)}{dt} \right] + R_2 C_2 \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) \\
\hline
R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 e_o(t)}{dt^2} + \{ R_1 (C_1 + C_2) + R_2 C_2 \} \frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) &= e_i(t) \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

4 .

AB 間での電圧降下は以下のように表され、 $i(t)$ について変形する。

$$e_i(t) - e_o(t) = R_1 i(t) \quad \text{より} \quad i(t) = \frac{1}{R_1} \{ e_i(t) - e_o(t) \} \quad (1)$$

出力電圧  $e_o(t)$  は以下のように表される。

$$e_o(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + R_2 i(t)$$

この式を時間  $t$  で微分すると以下となる。

$$\frac{de_o(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) + R_2 \frac{di(t)}{dt} \quad (2)$$

(1)を(2)に代入して整理すると、関係式は以下ようになる。

$$\left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{de_o(t)}{dt} + \frac{1}{CR_1} e_o(t) = \frac{R_2}{R_1} \frac{de_i(t)}{dt} + \frac{1}{CR_1} e_i(t) \quad (\text{答})$$

5 .

両タンクにおいて、流入量と流出量の差および流出量のそれぞれと水位との関係は、以下のように表される。

$$q_i(t) - q_1(t) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (1)$$

$$q_1(t) - q_o(t) = A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (2)$$

$$q_1(t) = \frac{h_1(t)}{R_1} \quad (3)$$

$$q_o(t) = \frac{h_2(t)}{R_2} \quad (4)$$

(1)から(3)を変形

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} + q_1(t) = q_i(t) \quad (5)$$

$$q_1(t) = A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} + q_o(t) \quad (6)$$

$$h_1(t) = R_1 q_1(t) \quad (7)$$

(4)を(6)に代入して(8)とし, (8)を(7)に代入

$$q_1(t) = A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} + \frac{h_2(t)}{R_2} \quad (8)$$

$$h_1(t) = R_1 \left\{ A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} + \frac{h_2(t)}{R_2} \right\} \quad (9)$$

(8)と(9)を(5)に代入

$$A_1 R_1 \left\{ A_2 \frac{d^2 h_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_2} \frac{dh_2(t)}{dt} \right\} + A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} + \frac{h_2(t)}{R_2} = q_i(t) \quad (10)$$

両辺に $R_2$ を掛けて整理すると, 関係式は以下ようになる。

$$\underline{A_1 A_2 R_1 R_2 \frac{d^2 h_2(t)}{dt^2} + (A_1 R_1 + A_2 R_2) \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t) = R_2 q_i(t)} \quad (\text{答})$$

6 .

タンクにおいて, 時刻  $t$  における流入量と流出量の差と水位との関係は, 以下のように表される。

$$q_1'(t) - q_2'(t) = A \frac{dh'(t)}{dt} \quad (1)$$

また, タンクからの流出量は水位の関数として以下で表される。

$$q_2'(t) = BC \sqrt{2gh'(t)} \quad (2)$$

したがって, (2)を(1)に代入すると, 流入量と水位との関係式は以下となる。

$$A \frac{dh'(t)}{dt} + k \sqrt{h'(t)} = q_1'(t) \quad (3) \quad \text{ただし, } k = \sqrt{2g}BC$$

(3)で, 左辺第2項が非線形項となっており, 線形化のためには

$$q_{10} = q_{20} = k \sqrt{h_0}$$

の平衡点からの微小変化分である $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $h(t)$ に着目する必要がある。

そこで, タンクからの流出量と水位の関数を以下のように表す。

$$q_2'(t) = k \sqrt{h_0 + h(t)} = k \sqrt{h_0} \sqrt{1 + \frac{h(t)}{h_0}}$$

これをテイラー展開して2次以降の項を省略すると以下となる。

$$q_2'(t) \approx k \sqrt{h_0} \left\{ 1 + \frac{h(t)}{2h_0} \right\} = k \sqrt{h_0} + \frac{k}{2\sqrt{h_0}} h(t) \quad (4)$$

流入量と水位との関係式(3)から平衡分を差し引き, (4)の微小変化分を代入して再び整理すると, 変化量についての関係式は以下となり, 1階の線形微分方程式になっていることがわかる。

$$\underline{A \frac{dh(t)}{dt} + \frac{k}{2\sqrt{h_0}} h(t) = q_1(t)} \quad \text{ただし, } k = \sqrt{2g}BC \quad (\text{答})$$

7 .

$\Delta_p v_{kj}$ は、合成関数の微分公式を用いて、右辺を誤差の入力の総和に関する部分と入力総和の結合荷重に関する微分との積で表せば

$$\frac{\partial E_p}{\partial v_{kj}} = \frac{\partial E_p}{\partial net_{pk}} \frac{\partial net_{pk}}{\partial v_{kj}} \quad (1)$$

となる。上式における右辺の2番目の微分は、次のように計算できる。

$$\frac{\partial net_{pk}}{\partial v_{kj}} = \frac{\partial}{\partial v_{kj}} \sum_{m=1}^{N_j} v_{km} h_{pm} = h_{pj}$$

いま、誤差の変化 $\delta_{pk}$ をユニットへの総入力の変化の関数として

$$\delta_{pk} = -\frac{\partial E_p}{\partial net_{pk}}$$

と定義すると、(1)に関して

$$-\frac{\partial E_p}{\partial v_{kj}} = \delta_{pk} h_{pj}$$

なる関係式が得られ、 $E_p$ の $v_{kj}$ に関する最急降下法を適用するためには、以下のように結合荷重 $v_{kj}$ を $\delta_{pk} h_{pj}$ に比例して修正すればよい。

$$\Delta_p v_{kj} = \eta \delta_{pk} h_{pj} \quad (2)$$

ここで、 $\eta$ は収束の速さを調整する定数、 $\delta_{pk}$ は再帰的に誤差を後向きに伝播させることが可能であり、再び合成関数の微分の公式を用いて、誤差の出力に関する微分と出力の入力総和に関する微分の積に分解すれば

$$\begin{aligned} \delta_{pk} &= -\frac{\partial E_p}{\partial net_{pk}} = -\frac{\partial E_p}{\partial o_{pk}} \frac{\partial o_{pk}}{\partial net_{pk}} \\ &= (t_{pk} - o_{pk}) f'_k(net_{pk}) \quad ※) \quad o_{pk} = f_k(net_{pk}) \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $f'_k$ は関数 $f_k$ の微分を示し、以下のようになる。

$$f'_k(net_{pk}) = \frac{e^{-net_{pk}}}{(1 + e^{-net_{pk}})^2} = f_k(net_{pk}) \{1 - f_k(net_{pk})\}$$

したがって、これらをまとめると、(2)は以下のようになる。

$$\Delta_p v_{kj} = \eta \delta_{pk} h_{pj} = \eta (t_{pk} - o_{pk}) o_{pk} (1 - o_{pk}) h_{pj} \quad (\text{答})$$

次に、 $\Delta_p w_{ji}$ は、合成関数の微分公式を用いると以下のようになる。

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial E_p}{\partial net_{pj}} \frac{\partial net_{pj}}{\partial w_{ji}} \quad (3)$$

同様に誤差の変化 $\delta_{pj}$ をユニットへの総入力の変化の関数として

$$\delta_{pj} = -\frac{\partial E_p}{\partial net_{pj}}$$

と定義すると, (3)に関して結合荷重  $w_{ji}$ を以下のように修正すればよい。

$$\Delta_p w_{ji} = \eta \delta_{pj} i_{pi} \quad (4)$$

また,  $\delta_{pj}$ は合成関数の微分の公式を用いると

$$\delta_{pj} = -\frac{\partial E_p}{\partial net_{pj}} = -\frac{\partial E_p}{\partial h_{pj}} \frac{\partial h_{pj}}{\partial net_{pj}}$$

と表される。ここで, 右辺の第 1 番目の微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial h_{pj}} &= \sum_{m=1}^{N_o} \frac{\partial E_p}{\partial net_{pm}} \frac{\partial net_{pm}}{\partial h_{pj}} = \sum_{m=1}^{N_o} \frac{\partial E_p}{\partial net_{pm}} \frac{\partial}{\partial h_{pj}} \sum_{l=1}^{N_j} v_{ml} h_{pl} \\ &= \sum_{m=1}^{N_o} \frac{\partial E_p}{\partial net_{pm}} v_{mj} = -\sum_{m=1}^{N_o} \delta_{pm} v_{mj} \end{aligned}$$

となる。中間層ユニットに対する  $\delta_{pj}$ は, 以下のように計算できる。

$$\delta_{pj} = f'_j(net_{pj}) \sum_{m=1}^{N_o} \delta_{pm} v_{mj} = h_{pj}(1-h_{pj}) \sum_{m=1}^{N_o} \delta_{pm} v_{mj}$$

したがって, これらをまとめると, (4)は以下のようになる。

$$\underline{\Delta_p w_{ji} = \eta h_{pj}(1-h_{pj}) \sum_{m=1}^{N_o} \delta_{pm} v_{mj} i_{pi}} \quad (\text{答})$$