「制御工学」　第 6 章演習問題解答

１．

$G(s)$ の分母多項式を $a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0$ とおく。

$a(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0 = j^n a_n \omega^n + j^{n-1} a_{n-1} \omega^{n-1} + \cdots + a_0$

$a(-j\omega) = a_n (-j\omega)^n + a_{n-1}(-j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0 = (-j)^n a_n \omega^n + (-j)^{n-1} a_{n-1} \omega^{n-1} + \cdots + a_0$

m をある整数とすると $-j$ のべき乗が偶数の時

$$j^{2m} = \left(j^2\right)^m = (-1)^m,\quad (-j)^{2m} = \left((-j)^2\right)^m = (-1)^m$$

であるから，ω の係数は同符号で同じ値の実数になる．$-j$ のべき乗が奇数である時

$$j^{2m+1} = j\left(j^2\right)^m = j(-1)^m,\quad (-j)^{2m+1} = -j\left((-j)^2\right)^m = -j(-1)^m$$

であるから，ω の係数は符号のみ違う純虚数となる。したがって，$a(j\omega)$ と $a(-j\omega)$ は複素共役の関係にある。

$b(j\omega)$ についても同様である。$\overline{\alpha}$ で α の複素共役を表すことにすると，$\overline{(\alpha/\beta)} = \overline{\alpha}/\overline{\beta}$ であるから，

$$\overline{G(j\omega)} = \overline{\left(\frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}\right)} = \frac{\overline{b(j\omega)}}{\overline{a(j\omega)}} = \frac{b(-j\omega)}{a(-j\omega)} = G(-j\omega)$$

（答）

２．

正弦波入力信号に対する定常状態での出力信号は式 6-13 のようになる。角周波数 $\omega = 2$ の正弦波入力であるから，そのときの周波数特性を計算する。

$$G(2j) = \frac{2}{1 + 3j \times 2} = \frac{2}{37} - j\frac{12}{37}$$

から

$$M = |G(2j)| = \frac{2}{\sqrt{37}},\quad \phi = \angle G(2j) = -\tan^{-1} 6$$

したがって

$$x(t) = 0.5 \times \frac{2}{\sqrt{37}} \sin(2t - \tan^{-1} 6) = \frac{1}{\sqrt{37}} \sin(2t - \tan^{-1} 6)$$ （答）

３．

周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 10} = \frac{\omega^2 + 20}{\omega^2 + 100} + j\frac{8\omega}{\omega^2 + 100}$$

となる。周波数伝達関数からベクトル軌跡は図 1 のようになる。伝達関数を

$$G(s) = \frac{1}{5}\frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\frac{1}{10}s}$$

と変形すると，$K = 1/5$のゲインと時定数$T = 1/10$の一次遅れ要素，$T = 1/2$の一次進み要素の積であることがわかる。そこでこれら基本要素の積としてボード線図の概形を描くと図２のようになる。なお，ゲインのデシベル値と位相は

$$20\log_{10}\left|G(j\omega)\right| = -20\log_{10}5 - 10\log_{10}\left(1+\left(\frac{1}{10}\omega\right)^2\right) + 10\log_{10}\left(1+\left(\frac{1}{2}\omega\right)^2\right)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(1+\left(\frac{1}{10}\omega\right)^2\right) + \tan^{-1}\left(1+\left(\frac{1}{2}\omega\right)^2\right)$$

となる。

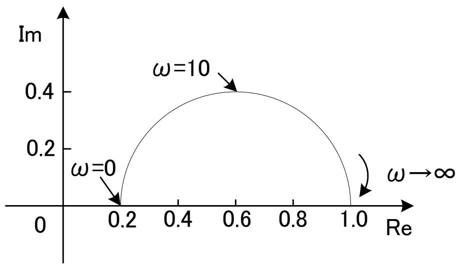

図１　ベクトル軌跡　（答）

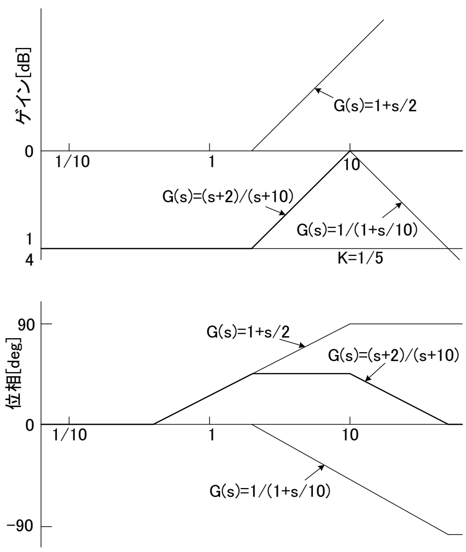

図２ボード線図　（答）

４．

近似曲線のみを図に示す。

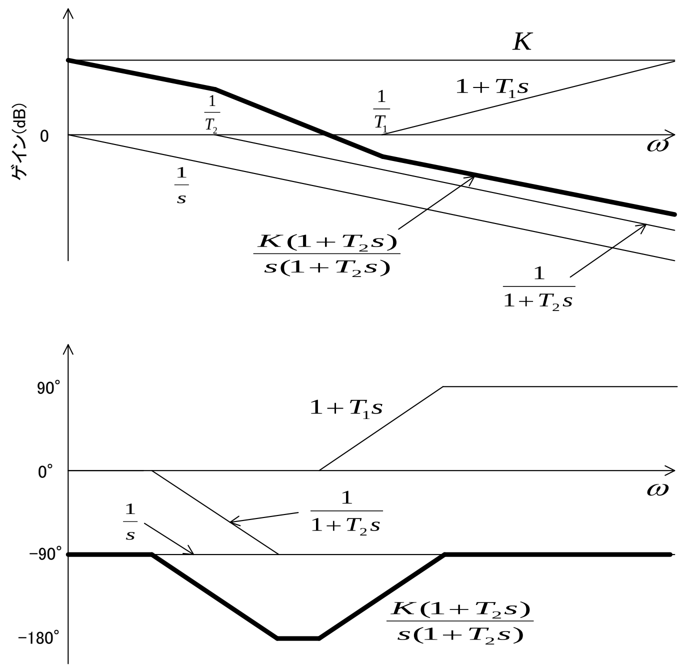

図３　ボード線図　（答）

５．

伝達関数を

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts}$$

と仮定する。ゲインが一定値となっている低周波域でゲインのデシベル値が 23dB であるので，$23=20\log_{10}K$ から $K=10^{23/20}\approx 14.1$。折点角周波数が $\omega_b=20\text{rad/sec}$ であるので時定数はその逆数の $T=0.05$ である。したがって

$$G(s)=\frac{14.1}{1+0.05s}\qquad \text{（答）}$$

６．

伝達関数を

$$G(s)=K\frac{1}{s}\frac{1}{1+T_1 s}\frac{1}{1+T_2 s}$$

と仮定する。積分要素 $\frac{1}{s}$ のみのとき，$\omega=0.1$ ではゲインは 20dB であるため，比例要素 K は

$20\log_{10}K+20=4$ dB から $K=0.158$。また，傾きが 20dB/dec ずつ減少している $\omega_1=0.1,\omega_2=2$ rad/s が 1 次遅れ要素の折点角周波数であるので，時定数はその逆数の $T_1=10, T_2=0.5$ である。したがって

$$G(s)=\frac{0.158}{s(1+10s)(1+0.5s)} \qquad (答)$$

７．

　このボード線図は比例定数$K=-10\,\mathrm{dB}$（$K=10^{-1/2}$）と時定数$T_1=1/0.2=5$の１次進み要素，時定数$T_2=1$の１次遅れ要素の合成である。したがって

$$G(s)=\frac{K(1+T_1 s)}{1+T_2 s}=\frac{1+5s}{\sqrt{10}(1+s)} \qquad (答)$$

８．

　周波数伝達関数は

$$G(j\omega)=\frac{j\omega+14}{j\omega+23}$$

したがって

$$\lim_{\omega\to 0}G(j\omega)=\frac{14}{23},\quad \lim_{\omega\to\infty}G(j\omega)=1$$

となる。よって，

$$\lim_{\omega\to 0}\left|G(j\omega)\right|=\frac{14}{23},\quad \lim_{\omega\to 0}\angle G(j\omega)=0^\circ,\quad \lim_{\omega\to\infty}\left|G(j\omega)\right|=1,\quad \lim_{\omega\to\infty}\angle G(j\omega)=0^\circ \qquad (答)$$

９．

　$G(s)=\dfrac{s+5}{s+8}$の周波数伝達関数は

$$G(j\omega)=\frac{j\omega+5}{j\omega+8}=\frac{\omega^2+40}{\omega^2+64}+j\frac{3\omega}{\omega^2+64}$$

となる。したがってゲインと位相は次のようになる.

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{\sqrt{\omega^2+25}}{\sqrt{\omega^2+64}},\quad \angle G(j\omega)=\tan^{-1}\frac{3\omega}{\omega^2+40}$$

同様にして$G(s)=\dfrac{s-5}{s+8}$の周波数伝達関数は

$$G(j\omega)=\frac{j\omega-5}{j\omega+8}=\frac{\omega^2-40}{\omega^2+64}+j\frac{13\omega}{\omega^2+64}$$

となる。したがってゲインと位相は次のようになる.

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{\sqrt{\omega^2+25}}{\sqrt{\omega^2+64}},\quad \angle G(j\omega)=\tan^{-1}\frac{13\omega}{\omega^2-40}$$

すなわち，ゲイン線図は同じであるが，位相線図が異なる（図４，５参照）。

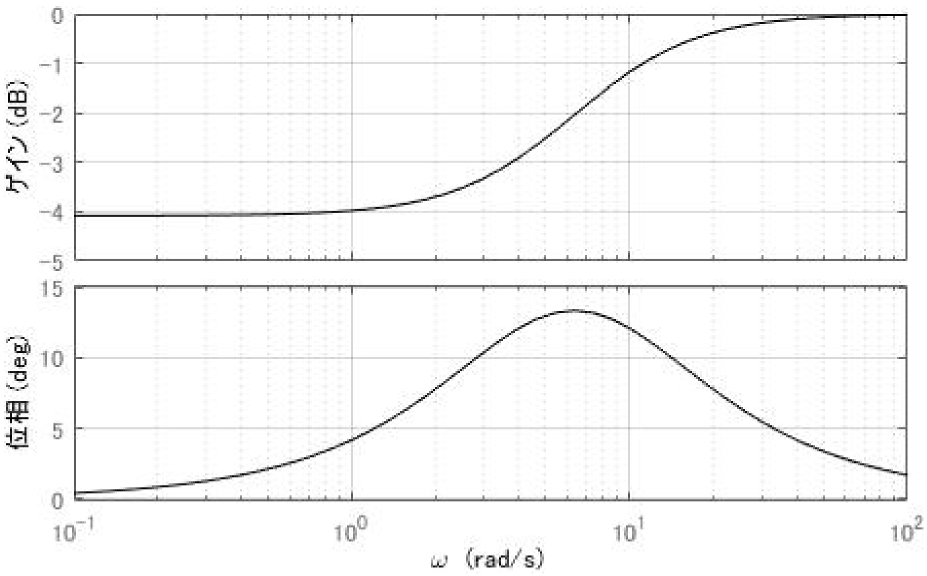

図４　$G(s)=\dfrac{s+5}{s+8}$ の伝達関数

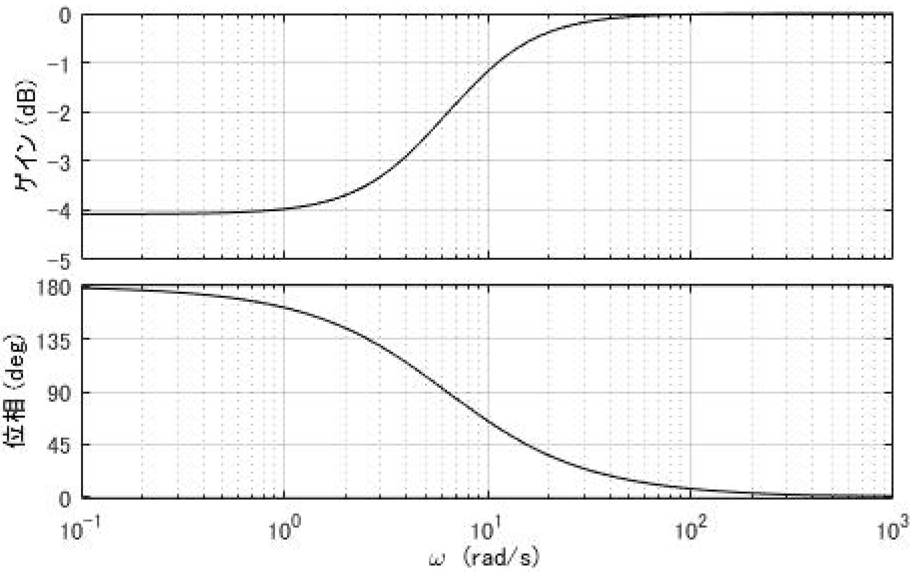

図５　$G(s)=\dfrac{s-5}{s+8}$ の伝達関数

１０．

$$G(j\omega)=\frac{K}{D_R+jD_I}=\frac{K}{D_R+jD_I}\frac{D_R-jD_I}{D_R-jD_I}=\frac{KD_R}{D_R^2+D_I^2}-j\frac{KD_I}{D_R^2+D_I^2}$$

であるので

$$
|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{KD_R}{D_R^2 + D_I^2}\right)^2 + \left(\frac{KD_I}{D_R^2 + D_I^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{K^2\left(D_R^2 + D_I^2\right)}{\left(D_R^2 + D_I^2\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{D_R^2 + D_I^2}}
$$

$$
\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-\dfrac{KD_I}{D_R^2 + D_I^2}}{\dfrac{KD_R}{D_R^2 + D_I^2}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{D_I}{D_R}\right) \qquad \text{(答)}
$$

１１．

ゲイン線図は，式 6-29 から 0dB 一定である。位相線図は式 6-30 から低周波領域では 0°に近く，高周波領域では非常に大きくなる。

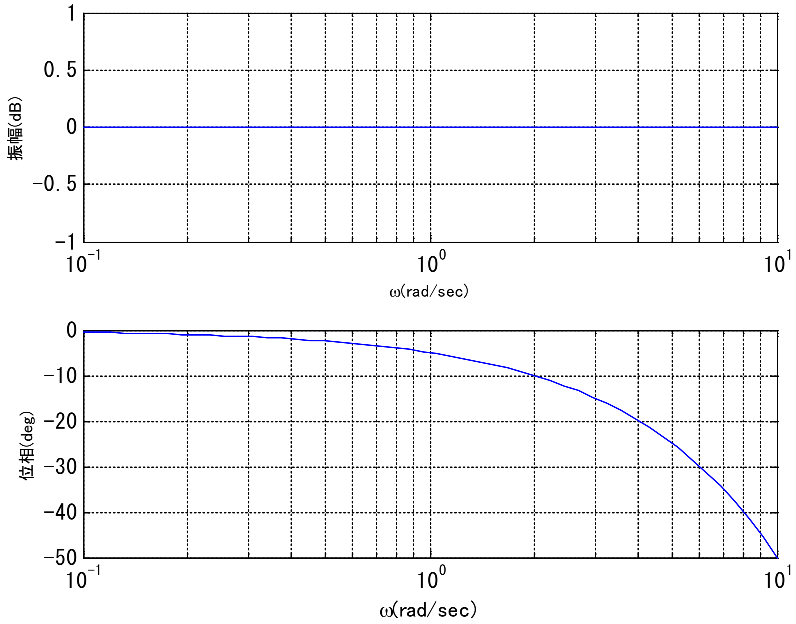

図６　むだ時間要素のボード線図　（答）