「制御工学」　第 8 章演習問題解答

１．

制御系の速応性を評価するものとしては，行き過ぎ時間，立ち上がり時間，遅延時間が用いられ，安定性（減衰性）を評価するものとしては，最大行き過ぎ量，整定時間，振幅減衰比が用いられる。詳細は図８－１を参照。

２．

与式で与えられるフィードバック制御系の伝達関数は次式となる。

$$H(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{81}{s(s+9)}}{1+\dfrac{81}{s(s+9)}}=\frac{81}{s^2+9s+81}$$

ここで，式８－15 に示す特性方程式より，

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2=0$$

固有角周波数 ω_n と減数係数 ζ は求めることができる。

$$\omega_n=\sqrt{81}=9\text{rad/sec},\qquad \zeta=\frac{9}{2\sqrt{81}}=0.5$$

最大行き過ぎ量 A_{max} と行き過ぎ時間 T_p は式８－10 または図８－１および式８－７より以下のように求めることができる。

$$A_{max}=A_1=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=0.16\qquad（答）$$

$$T_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.24\text{s}\qquad（答）$$

３．

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}=1/\sqrt{2}$$

より，$\omega=\omega_b$ として，

$$\left(1-\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2=2$$

$$1-2\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2+\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^4+4\zeta^2\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2=2$$

$$\left(\frac{\omega_n}{\omega_b}\right)^4+2(1-2\zeta)\left(\frac{\omega_n}{\omega_b}\right)^2-1=0$$

解の公式より，

$$\left(\frac{\omega_n}{\omega_b}\right)^2 = \frac{2(1-2\zeta^2) \pm \sqrt{4(1-2\zeta^2)^2+4}}{2}$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}+(1-2\zeta^2)}$$

４．

0 型の制御系であるので，式８－27～８－32 で求める。

$$L(s)=\frac{4}{(s+1)(s+2)(s+0.5)} \qquad \text{（答）}$$

$$k_p = \lim_{s\to 0} L(s) = \lim_{s\to 0}\frac{4}{1} = 4 \qquad e_p(\infty) = \frac{\alpha}{1+4} = \frac{\alpha}{5} \qquad \text{（答）}$$

$$k_V = \lim_{s\to 0} sL(s) = \frac{4s}{1} = \qquad e_V(\infty) = \frac{v}{0} = \infty \qquad \text{（答）}$$

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2L(s) = \frac{4s^2}{1} = \qquad e_a(\infty) = \frac{a}{0} = \infty \qquad \text{（答）}$$

５．

式８－35 と $\alpha = 1$ より，

$$L(s) = \frac{K}{(1+0.1s)(1+2s)}$$

$$k_p = \lim_{s\to 0} L(s) = \lim_{s\to 0}\frac{K}{1} = K \qquad e_p(\infty) = \frac{1}{1+K} \le 0.1$$

より，　$K \ge 9$

（答）

６．

特性方程式は，

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K = 0$$

7 章のラウス・フルビッツの安定判別法より，

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 11 & 0 \\ s^2 & 6 & 6+K & 0 \\ s^1 & A & & \\ s & & & \end{array}$$

ここで，A≧0 であるためには，$-\frac{(6+K-66)}{6}>0$ より，$K<60$ でなければならない。また，定常位置偏差を 0.1 以下にすることから K の範囲を求めることができる。

$$k_p = \lim_{s\to 0} L(s) = \lim_{s\to 0}\frac{K}{6} = \frac{K}{6} \qquad e_p(\infty) = \frac{1}{1+K/6} \le 0.1$$

より，K≧54

よって，$54 \le K < 60$　（答）

７．

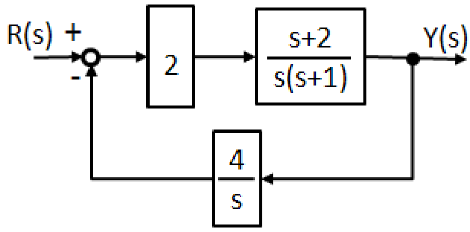
たとえば，前問４の 0 型の一巡伝達関数に積分要素を加える次のように定常位置偏差を無くすことができる。

$$L(s)=\frac{4}{s(s+1)(s+2)(s+0.5)}$$

$$k_p=\lim_{s\to 0}L(s)=\lim_{s\to 0}\frac{4}{s}=\infty \qquad e_p(\infty)=\frac{\alpha}{1+\infty}=0$$ （答）

８．

右図より，定常偏差は次式のように求めることができる。



$$E(s)=\frac{1}{1+\dfrac{8(s+2)}{s^2(s+1)}}R(s)$$

入力 r(t)をラプラス変換する。

$$r(t)=1+2t+t^2$$

$$R(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3}=\frac{s^3+2s^2+2}{s^3}$$

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot s^2(s+1)}{s^2(s+1)+8(s+2)}\cdot\frac{s^3+2s^2+2}{s^3}$$

$$=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

（答）

９．式(8-46)より，外乱は制御系に負で入力されることから，

$$E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{G(s)}{1+Kc(s)G(s)}D(s)$$

$$E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{\dfrac{K_t}{(DL+JR)s^2+(RB+K_eK_t)s}}{1+Kc\dfrac{K_t}{(DL+JR)s^2+(RB+K_eK_t)s}}\frac{1}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{K_t}{(DL+JR)s^2+(RB+K_eK_t)s+KcK_t}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{K_t}{KcK_t}=\frac{1}{Kc}$$

（答）

よって，コントローラ Kc の値によって外乱による偏差が決定される。

10.

図８－９の入力値の定数α（２）倍した場合は，図のように定常偏差もα（２）倍される。図８－９と比較されたい。

$$G(s)=\frac{3}{s+1}$$

$$\begin{aligned}y(t)&=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{1+G(s)}\cdot\frac{2}{s}\right]\\&=L^{-1}\left[\frac{6}{4}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+4}\right)\right]\\&=1.5(1-e^{-4t})\end{aligned}$$