演習問題

1. 図 10.20 のような, 三つの質量 ($m_1 \sim m_3$) がばね ($k_1 \sim k_4$) とダンパ (c_1, c_2) でつながれた三質量系を考える．質量の平衡点からの変位をそれぞれ p_1, p_2, p_3, m_1 と m_2 の質量に加わる外力を f_1, f_2 とする．このような二入力三出力である三質量系の状態方程式を求めよ．

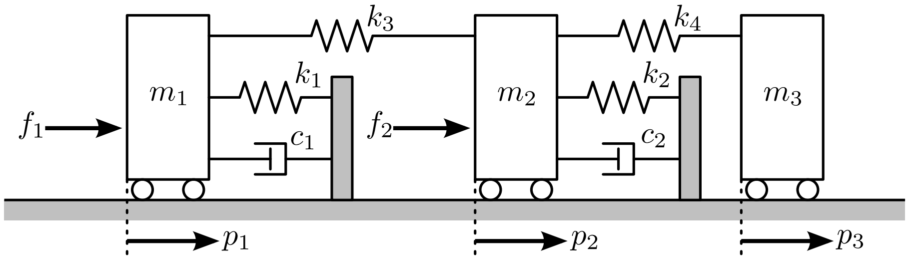

図 10.20　三質量系

（解）この三質量系の運動は,

$$
\begin{aligned}
m_1\frac{d^2p_1}{dt^2} + c_1\frac{dp_1}{dt} + k_1p_1 + k_3(p_1 - p_2) &= f_1 \\
m_2\frac{d^2p_2}{dt^2} + c_2\frac{dp_2}{dt} + k_2p_2 + k_3(p_2 - p_1) + k_4(p_2 - p_3) &= f_2 \\
m_3\frac{d^2p_3}{dt^2} + k_4(p_3 - p_2) &= 0
\end{aligned}
$$

の三つの運動方程式で表されるものとなる．
ここで，三質量系の状態を

$$
x = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \frac{dp_1}{dt} & \frac{dp_2}{dt} & \frac{dp_3}{dt} \end{bmatrix}^T
$$

とし，三つの運動方程式を元に三質量系の状態方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \frac{dp_3}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & 0 & -\frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_3}{m_2} & -\frac{k_2+k_3+k_4}{m_2} & \frac{k_4}{m_2} & 0 & -\frac{c_2}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{k_4}{m_3} & -\frac{k_4}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \frac{dp_3}{dt} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\
&= Ax + Bu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \\ \frac{dp_3}{dt} \end{bmatrix} \\
&= Cx
\end{aligned}
$$

で表すことができる．

2. 2 章で扱った 1 タンクからなる水位系，および 2 タンクからなる水位系を状態方程式で表現せよ．

（解）図 2-10 で表される 1 タンク水位系の関係式は以下のように表すことができた．（ただし，図 2-10 ではタンク断面積を A と表記したが，ここではシステムを表す行列との混乱を避けるため，タンク断面積を S としている．）

$$
\begin{aligned}
S\frac{dh}{dt} &= q_i - q_o \\
q_o &= \frac{1}{R}h
\end{aligned}
$$

ここで，水位系の状態を

$$
x = \begin{bmatrix} h \end{bmatrix}
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dt} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{SR} \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \end{bmatrix} q_i \\
&= Ax + Bu \\
y = q_o &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \end{bmatrix} h \\
&= Cx
\end{aligned}
$$

のような状態方程式で表すことができる．

また，図 2-15 で表される 2 タンク水位系の関係式は以下のように表すことができた．（ただし，図 2-15 ではタンク断面積を A_1, A_2 と表記したが，ここでは S_1, S_2 と表記している．）

$$
\begin{aligned}
S_1\frac{dh_1}{dt} &= q_i - q_1 \\
S_2\frac{dh_2}{dt} &= q_1 - q_o \\
q_1 &= \frac{1}{R_1}h_1 \\
q_2 &= \frac{1}{R_2}h_2
\end{aligned}
$$

ここで，水位系の状態を

$$
x = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}^T
$$

とし，q_1 と q_2 の関係を微分方程式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1R_1} & 0 \\ \frac{1}{S_2R_1} & -\frac{1}{S_2R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_i \\
&= Ax + Bu \\
y = q_o &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&= Cx
\end{aligned}
$$

のような状態方程式で表すことができる．

3. 10–7–2 節で扱った図 10.5 のシーソー台車系の状態方程式を求めよ．（ただし，シーソーの回転角度 θ が微少であるとして，$\theta = 0$ の近傍で線形化し，2 次以上の項を無視して求めよ．）

（解）まず，シーソーの回転運動に関する運動方程式を求める．シーソーと台車を合わせた慣性モーメントは $J + Mp^2$ である．また，台車に作用する重力 Mg のシーソーに対する垂直方向成分 $Mg\cos\theta$ と，台車に加わるコリオリ力 $2M\dot{p}\dot{\theta}$ が，回転力としてシーソーに作用する．回転軸における粘性摩擦力を考慮すると，シーソーの回転運動に関する運動方程式は

$$
(J + Mp^2)\ddot{\theta} + 2M\dot{p}\dot{\theta}p + Mg\cos\theta p + D_\theta\dot{\theta} = u
$$

となる．次に，台車のシーソー上での並進運動に関する運動方程式を求める．台車には，重力のシーソーに対する水平方向成分 $Mg\sin\theta$ と，遠心力として $Mp\dot{\theta}^2$ が作用している．台車とシーソーの間の粘性摩擦力を考慮すると，台車の並進運動に関する運動方程式は，

$$
M\ddot{p} - Mp\dot{\theta}^2 + Mg\sin\theta + D_p\dot{p} = 0
$$

となる．

ここで，シーソー台車系の状態を

$$x = \begin{bmatrix} \theta & p & \dot{\theta} & \dot{p} \end{bmatrix}^T$$

とし，2 つの運動方程式を元に非線形な状態方程式として表すと

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \theta \\ p \\ \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p} \\ \frac{-2Mp\dot{p}\dot{\theta} - Mgp\cos\theta - D_\theta\dot{\theta}}{J+Mp^2} \\ p\dot{\theta}^2 - g\sin\theta - \frac{D_r}{M}\dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J+Mp^2} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &= f(x) + g(x)u\end{aligned}$$

となる．

この非線形状態方程式において，$\theta = 0$，$p = 0$ の近傍で線形化（$\sin\theta \cong \theta$，$\cos\theta \cong 1$）し，2 次以上の項（p^2, $\dot{p}\dot{\theta}$，$\dot{\theta}^2$）を無視すると，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \theta \\ p \\ \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{Mg}{J} & -\frac{D_\theta}{J} & 0 \\ -g & 0 & 0 & -\frac{D_p}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ p \\ \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &= Ax + Bu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = \begin{bmatrix} \theta \\ p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ p \\ \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{bmatrix} \\ &= Cx\end{aligned}$$

のような状態方程式で表すことができる．

4. 図 10.21 のモデルは，長さ $2L_p$，質量 m，重心まわりの慣性モーメント J_p の振子が，長さ L_a，回転軸まわりの慣性モーメント J_a のアーム先端で自由回転するように接続されており，慣性モーメント J_m のモータでアームを回転させることで振子を倒立安定化させる回転型倒立振子である．振子の回転角度を θ，アームの回転角度を ϕ，モータによる入力トルクを u とするとき，このシステムの状態方程式を求めよ．

（解）ここでは，ラグランジュの手法により，回転型倒立振子の運動方程式を求める．

まず，このシステムの一般化座標を $q = (q_1,\ q_2) = (\phi,\ \theta)$ と選ぶ．

運動エネルギー T には，アームの回転運動エネルギー T_{ra}，振子の並進運動エネルギー T_{tp} と回転運動エネルギー T_{rp} が考えられる．

アームの回転運動エネルギー T_{ra} は，単純な回転運動であることから

$$T_{ra} = \frac{1}{2}(J_m + J_a)\dot{\phi}^2$$

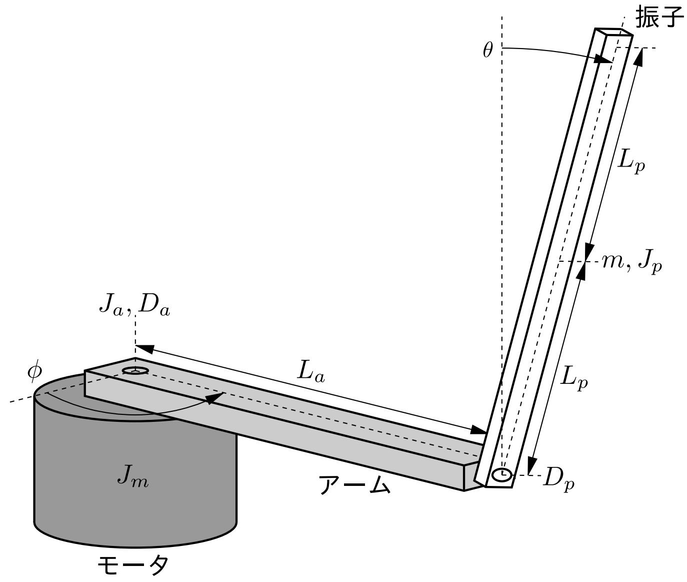

図 10.21　回転型倒立振子モデル

である．

振子の重心位置 $(x,\ y,\ z)$ が，その幾何学的な関係から

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a\cos\phi - L_p\sin\theta\sin\phi \\ L_a\sin\phi + L_p\sin\theta\cos\phi \\ L_p\cos\theta \end{bmatrix}$$

となるので，その並進速度 v は以下のように求まる．

$$v = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_a\sin\phi\ \dot{\phi} - L_p\cos\theta\sin\phi\ \dot{\theta} - L_p\sin\theta\cos\phi\ \dot{\phi} \\ L_a\cos\phi\ \dot{\phi} + L_p\cos\theta\cos\phi\ \dot{\theta} - L_p\sin\theta\sin\phi\ \dot{\phi} \\ -L_p\sin\theta\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

よって，振子の並進運動エネルギー T_{tp} は，

$$\begin{aligned} T_{tp} &= \frac{1}{2}mv^Tv \\ &= \frac{1}{2}m{L_a}^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m{L_p}^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}m{L_p}^2\dot{\theta}^2 + mL_aL_p\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

となる．

振子の回転運動には，θ に関する回転運動と ϕ に関する回転運動が存在する．しかし，θ に関する慣性モーメントは定義してあるが，ϕ に関する慣性モーメントは定義していない．

振子の θ に関する慣性モーメント J_p が，振子の線密度を ρ[kg/m] として

$$J_p = \int_{-L_p}^{L_p}\rho l^2 dl = \frac{2}{3}\rho{L_p}^3 = \frac{1}{3}m{L_p}^2$$

であることを利用すると，振子が θ 傾いているときの ϕ に関する慣性モーメントは以下のように求めることができる．

$$\int_{-L_p \sin\theta}^{L_p \sin\theta} \frac{\rho}{\sin\theta} l^2 dl = \frac{2}{3}\rho {L_p}^3 \sin^2\theta = \frac{1}{3} m {L_p}^2 \sin^2\theta = J_p \sin^2\theta$$

よって，振子の回転運動エネルギー T_{rp} は

$$T_{rp} = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_p \sin^2\theta \ \dot{\phi}^2$$

となる．

以上より，運動エネルギー T は

$$\begin{aligned} T &= T_{ra} + T_{tp} + T_{rp} \\ &= \frac{1}{2}(J_m + J_a + m{L_a}^2 + m{L_p}^2 \sin^2\theta + J_p \sin^2\theta)\dot{\phi}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(m{L_p}^2 + J_p)\dot{\theta}^2 + mL_aL_p\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

となる．

次に，ポテンシャルエネルギー U は，振子に関するものしか存在しないので

$$U = mgL_p \cos\theta$$

のみである．

また，散逸エネルギー D は，モータの回転軸における粘性摩擦係数を D_a，振子の回転軸における粘性摩擦係数を D_p として，以下のように求まる．

$$D = \frac{1}{2} D_a \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} D_p \dot{\theta}^2$$

最終的に，ラグランジアン $L = T - U$ を用いて，回転型倒立振子系の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\phi}} &= u \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \end{aligned}$$

で求まるので，上記の $L = T - U$, D を代入して整理すると以下のように運動方程式を求めることができる．

$$\begin{aligned} &\{J_m + (J_a + mL_a^2) + (J_p + m{L_p}^2)\sin^2\theta\}\ddot{\phi} + mL_aL_p\ddot{\theta}\cos\theta \\ &\qquad + 2(J_p + m{L_p}^2)\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - mL_aL_p\dot{\theta}^2\sin\theta + D_a\dot{\phi} = u \end{aligned}$$

$$(J_p + m{L_p}^2)\ddot{\theta} + mL_aL_p\ddot{\phi}\cos\theta - (J_p + m{L_p}^2)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - mgL_p\sin\theta + D_p\dot{\theta} = 0$$

ここで，回転型倒立振子系の状態を

$$x = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \dot{\phi} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$$

とし，各物理パラメータの組合わせからなるベクトル a を

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} J_m + J_a + mL_a^2 & J_p + m{L_p}^2 & mL_aL_p & mgL_p & D_a & D_p \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

として，$\sin\theta = \sin x_2 = S, \cos\theta = \cos x_2 = C$ とおくと，2 つの運動方程式を元にした非線型な状態方程式は

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{a_2a_3SC^2x_3^2 - a_2a_3Sx_4^2 + a_2a_5x_3 - a_3a_6Cx_4 + 2a_2^2SCx_3x_4 + a_3a_4SC}{-a_2^2S^2 + a_3^2C^2 - a_1a_2} \\ \frac{-(a_1 + a_2S^2)a_2SCx_3^2 + a_3^2SCx_4^2 - a_3a_5Cx_3 + (a_1 + a_2S^2)a_6x_4 - 2a_2a_3SC^2x_3x_4 - (a_1 + a_2S^2)a_4S}{-a_2^2S^2 + a_3^2C^2 - a_1a_2} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-a_2}{-a_2^2S^2 + a_3^2C^2 - a_1a_2} \\ \frac{a_3C}{-a_2^2S^2 + a_3^2C^2 - a_1a_2} \end{bmatrix}$$

として，

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u$$

となる．

この非線形状態方程式において，$\triangle = -a_1a_2 + a_3^2$ とおいて，$\phi = 0$，$\theta = 0$ の近傍で線形化し，2 次以上の項を無視すると，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{a_3a_4}{\triangle} & \frac{a_2a_5}{\triangle} & \frac{-a_3a_6}{\triangle} \\ 0 & \frac{-a_1a_4}{\triangle} & \frac{-a_3a_5}{\triangle} & \frac{a_1a_6}{\triangle} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-a_2}{\triangle} \\ \frac{a_3}{\triangle} \end{bmatrix} u \\ &= Ax + Bu \\ y = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= Cx \end{aligned}$$

のような状態方程式で表すことができる．

5. 演習問題 2 で求めた 2 タンク水位系の状態方程式を伝達関数で表現せよ．

（解）2 タンク水位系の状態方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1R_1} & 0 \\ \frac{1}{S_2R_1} & -\frac{1}{S_2R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_i \\ &= Ax + Bu \\ y = q_o &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ &= Cx \end{aligned}$$

と求めることができた．一方，入力 u から出力 y までの伝達関数 $G(s)$ は，行列 A, B, C を使って

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

と表すことができた.

よって，入力 q_i から出力 q_o までの 2 タンク水位系の伝達関数は,

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s + \frac{1}{S_1R_1} & 0 \\ -\frac{1}{S_2R_1} & s + \frac{1}{S_2R_2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{S_1S_2R_1R_2s^2 + (S_1R_1 + S_2R_2)s + 1} \end{aligned}$$

となる．これは，2 章の演習問題で求めた 2 タンク水位系の伝達関数に一致している.

6. 10–3 節で扱った例題に関し，状態 $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ と $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix}^T$ の間の座標変換行列 T を求め，式 10.31 と式 10.32 で表された状態方程式が，式 10.34 と式 10.35 の関係式で導出できることを確認せよ.

（解）状態 x と $\bar{x}$ の関係は

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.001\bar{x}_1 \\ x_2 &= 1000\bar{x}_2 \end{aligned}$$

であるから，座標変換行列 T は

$$\begin{aligned} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= T\bar{x} \end{aligned}$$

となる．この T を使うと，

$$
\begin{aligned}
\bar{A} &= T^{-1}AT \\
&= \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1000000 \\ -0.000001\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \\
\bar{B} &= T^{-1}B \\
&= \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001\frac{1}{m} \end{bmatrix} \\
\bar{C} &= CT \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と計算できる．

7. システムが可制御でないとき，式 10.37 による座標変換行列 T により座標変換されたシステムが式 10.38 と式 10.39 で表されることを確認せよ．
8. システムが可観測でないとき，式 10.47 による座標変換行列 $T = W^{-1}$ により座標変換されたシステムが式 10.48 と式 10.49 で表されることを確認せよ．
9. 演習問題 3 のシーソー台車系において，各物理パラメータを $J = 1.0$, $M = 2.0$, $D_\theta = 0.1$，$D_p = 2.0$ としたとき，シーソー台車系の可制御性および可観測性を確認せよ．

（解）線形化したシーソー台車系に，各物理パラメータを $J = 1.0$，$M = 2.0$, $D_\theta = 0.1$，$D_p = 2.0$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -19.6 & -0.1 & 0 \\ -9.8 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
&= Ax + Bu \\
y = &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \\
&= Cx
\end{aligned}
$$

となる．この行列 A, B, C を用いると，可制御性行列 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.1 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & -9.8 \\ 1 & -0.1 & 0.01 & -0.001 \\ 0 & 0 & -9.8 & 10.78 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となり，$\operatorname{rank} V = 4$ である．従って，可制御である．

また，可観測性行列 N は

$$
\begin{aligned}
N^T &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -19.6 & -0.1 & 0 \\ -9.8 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1.96 & 0.01 & -19.6 \\ 9.8 & 0 & -9.8 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となり，$\operatorname{rank} N = 4$ である．従って，可観測である．

10. 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が相異なる場合，行列 A をその固有値を使って対角化できることを確認せよ．

（解）固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを v_i とする．いま，すべての固有値が相異なるので，$Av_i = \lambda_i v_i, (i = 1 \cdots n)$ が成り立っている．よって，

$$
\begin{aligned}
A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ と定義すると，すべての固有ベクトルが相異なるため T^{-1} が存在し，

$$
\begin{aligned}
T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda
\end{aligned}
$$

のように行列 A の固有値を使って行列 A を対角化することができる．

11. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ を対角化せよ．

（解）行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有値は，$\det[\lambda I - A] = 0$ を満たす λ，すなわち

$$\det\left[\lambda I - A\right] = \det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

より，$\lambda = 1 (= \lambda_1)$ または $2 (= \lambda_2)$ である．

λ_1 のとき，

$$[\lambda_1 I - A]v_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v_1 = 0$$

であるから，λ_1 に対する固有ベクトルとして $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ が求められる．

同様に λ_2 のとき，

$$[\lambda_2 I - A]v_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = 0$$

であるから，λ_2 に対する固有ベクトルとして $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ が求められる．

これらの固有ベクトルを用いると，

$$\begin{aligned} A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり，確かに

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

のように行列 A をその固有値を使って対角化できる．

12. 座標変換行列 T により，状態方程式における行列 A が $T^{-1}AT = J$ のようにジョルダン標準形となる場合，$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$ となることを確認せよ．ただ

し，e^{Jt} は，ジョルダン標準形

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \cdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & J_h \end{bmatrix}$$

に対し，

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0\cdots & 0 & \\ 0 & e^{J_2 t} & & \vdots \\ \cdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_h t} \end{bmatrix}$$

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{J_{i1} t} & 0\cdots & 0 & \\ 0 & e^{J_{i2} t} & & \vdots \\ \cdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_{i\alpha_i} t} \end{bmatrix}$$

$$e^{J_{ik} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{(n_{ik}-1)}}{(n_{ik}-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

で与えられるものとする．

13. 1 入力かつ可制御なシステムにおいて，式 10.98，式 10.99，式 10.97 のような可制御性行列を元にした座標変換行列 T により，システムが式 10.100 のように座標変換されることを確認せよ．

（解）ケーリーハミルトンの定理より

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_0 I = O$$

という関係式に，左から l_n^T をかけると

$$l_n^T A^n + a_{n-1} l_n^T A^{n-1} + a_{n-2} l_n^T A^{n-2} + \cdots + a_0 l_n^T = O$$

となる．これを用いると，

$$
\begin{aligned}
T^{-1}A = WA &= \begin{bmatrix} l_n^T \\ l_n^T A \\ l_n^T A^2 \\ \vdots \\ l_n^T A^{n-1} \end{bmatrix} A \\
&= \begin{bmatrix} l_n^T A \\ l_n^T A^2 \\ l_n^T A^3 \\ \vdots \\ l_n^T A^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n^T \\ l_n^T A \\ l_n^T A^2 \\ \vdots \\ l_n^T A^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \bar{A}T^{-1}
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，$\bar{A} = T^{-1}AT$ となっている．
一方，

$$
\begin{aligned}
V^{-1}V &= \begin{bmatrix} l_1^T \\ l_2^T \\ \vdots \\ l_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_1^T B & l_1^T AB & l_1^T A^2 B & \cdots & l_1^T A^{n-1} B \\ l_2^T B & l_2^T AB & l_2^T A^2 B & \cdots & l_2^T A^{n-1} B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_n^T B & l_n^T AB & l_n^T A^2 B & \cdots & l_n^T A^{n-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

であり，この最下行の関係式を用いると，

$$
\begin{aligned}
T^{-1}B = WB &= \begin{bmatrix} l_n^T \\ l_n^T A \\ l_n^T A^2 \\ \vdots \\ l_n^T A^{n-1} \end{bmatrix} B \\
&= \begin{bmatrix} l_n^T B \\ l_n^T AB \\ l_n^T A^2 B \\ \vdots \\ l_n^T A^{n-1} B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{B}
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，$\bar{B} = T^{-1}B$ となっている．

14. 同次元オブザーバにおけるオブザーバゲイン K は，(C, A) が可観測であれば $A - KC$ が安定となるように選ぶことができることを確認せよ．

（解）元のシステムに対し，次のシステムを考える．

$$\frac{d\xi}{dt} = A^T\xi + C^T u$$

この ξ のシステムを安定化する状態フィードバック

$$u = -K^T\xi$$

を求めることができたとすると，ξ に関する閉ループ系

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= A^T\xi + C^T K^T\xi \\
&= (A^T - C^T K^T)\xi
\end{aligned}
$$

において，$A^T - C^T K^T$ が安定となる．

ここで，ある行列とその転置行列の固有値は等しくなるという性質から，状態フィードバック行列 K は $A - KC$ も安定にすることがわかる．

15. 式 10.176 で表される外乱オブザーバが，状態 x とともに外乱 δ も推定できることを確認せよ．

（解）式 10.174 で表される状態と外乱の拡大系における状態 $\begin{bmatrix} x \\ \delta \end{bmatrix}$ と，式 10.176

で表される外乱オブザーバの状態 $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}$ の誤差を

$$e = \begin{bmatrix} x \\ \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}$$

と定義すると，その誤差の時間微分は

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \delta \end{bmatrix} - \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}\left\{ y - \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} x \\ \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}\right\} - \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} x \\ \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1C & 0 \\ K_2C & 0 \end{bmatrix}\right\} e
\end{aligned}$$

となる．ここで，行列 $\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1C & 0 \\ K_2C & 0 \end{bmatrix}$ が安定になるように K_1，K_2 を選べば，誤差 e は 0 に収束する．すなわち，状態 x と外乱 δ を同時に誤差なく推定することができる．

16. 式 10.168 で表されるシステムにおいて $B = E$ の場合，近似的に外乱 δ を打ち消すシステムを構成できることを示せ．
（解）$B = E$ の場合，式 10.168 は

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + B\delta$$

となる．ここで，新しい入力を v として u を

$$u = v - \hat{\delta}$$

とすると，

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= Ax + B(v - \hat{\delta}) + B\delta \\
&= Ax + Bv + B(\delta - \hat{\delta})
\end{aligned}$$

となる．もし，外乱の推定値 $\hat{\delta}$ が外乱 δ を誤差なく推定できている場合，

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv$$

となり，新しい入力 v による近似的に外乱 δ を消去したシステムを構成できていることになる．