

「制御工学」 第 11 章演習問題解答

1. システム同定とは、現実のシステムの入出力データからそのシステムの特徴を表す数学モデルを求めることを目的としたモデリングの方法の一つであり、システムを支配する運動方程式、回路方程式が明らかでなく、パラメータも未知の場合に有効なモデリングの方法である。また、システム同定法は、大きく分けるとインパルス応答、周波数応答などのグラフで表されるような非パラメトリック同定と、伝達関数、状態空間表現のように有限個のパラメータによって特徴づけられるパラメトリック同定に分類される。

2.

直流サーボモータの伝達関数を 2 次系

$$G(s) \approx \frac{b}{s^2 + as}$$

で近似することを考える。このとき、図 1 1-1 8 よりフィードバック制御系の伝達関数は

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{bK_p}{1 + G(s)K_p} = \frac{bK_p}{s^2 + as + bK_p}$$

で表される。すなわち、フィードバック制御系の固有角振動数 ω_n 、減衰係数 ζ およびゲイン K はそれぞれ

$$\omega_n = \sqrt{bK_p}, \quad \zeta = \frac{a}{2\sqrt{bK_p}}, \quad K = 1$$

で与えられる。図 1 1-1 9 から読み取った A_{\max} と T_p を式 11-5 に代入することで、固有角振動数 $\omega_n = 476.2$ と減衰係数 $\zeta = 0.334$ を求めることができ、2 次系で近似した伝達関数のパラメータは

$$a = 2\zeta\omega_n = 318.1, \quad b = \frac{\omega_n^2}{K_p} = 755.9$$

となる。すなわち、直流サーボモータの伝達関数は

$$G(s) = \frac{K_1}{JLs^3 + (RJ + LB)s^2 + (RB + K_1K_2)s} \approx \frac{755.9}{s^2 + 318.1s} \quad (\text{答})$$

で近似することができる。

3. 式 11-26 より、

$$P_{N+1} = (\Phi_{N+1}^T \Phi_{N+1})^{-1} \quad (1)$$

式 11-24 より

$$\Phi_{N+1}^T \Phi_{N+1} = \begin{bmatrix} \Phi_N^T & \varphi(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \varphi^T(N+1) \end{bmatrix} = \Phi_N^T \Phi_N + \varphi(N+1)\varphi^T(N+1)$$

なので、これを式(1)に代入すると

$$P_{N+1} = \{\Phi_N^T \Phi_N + \varphi(N+1)\varphi^T(N+1)\}^{-1} \quad (2)$$

式 11-26 より $\Phi_N^T \Phi_N = P_N^{-1}$ であるから、式(2)に代入すると

$$P_{N+1} = \{P_N^{-1} + \varphi(N+1)\varphi^T(N+1)\}^{-1}$$

が得られる。(答)

4. 式 11-29

$$P_{N+1} = \{P_N^{-1} + \varphi(N+1)\varphi^T(N+1)\}^{-1}$$

の右辺に逆行列の補題

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

を適用する。すなわち、 $P_N^{-1} = A$, $\varphi(N+1) = B$, $\varphi^T(N+1) = C$ とおけば

$$P_{N+1} = (P_N^{-1})^{-1} - (P_N^{-1})^{-1}\varphi(N+1)\{I + \varphi^T(N+1)(P_N^{-1})^{-1}\varphi(N+1)\}^{-1}\varphi^T(N+1)(P_N^{-1})^{-1}$$

となり、 $\varphi^T(N+1)$ が横ベクトル、 $\varphi(N+1)$ が縦ベクトルであることに注意し、整理すれば

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= P_N - P_N\varphi(N+1)\{1 + \varphi^T(N+1)P_N\varphi(N+1)\}^{-1}\varphi^T(N+1)P_N \\ &= P_N - \frac{P_N\varphi(N+1)\varphi^T(N+1)P_N}{1 + \varphi^T(N+1)P_N\varphi(N+1)} \end{aligned}$$

が得られる。(答)

5. 連続時間伝達関数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

の分母・分子に状態変数 $x_1(t)$ のラプラス変換 $X_1(s)$ をかける。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1}X_1(s) + \cdots + b_0X_1(s)}{s^n X_1(s) + a_{n-1}s^{n-1}X_1(s) + \cdots + a_0X_1(s)}$$

これより,

$$U(s) = s^n X_1(s) + a_{n-1} s^{n-1} X_1(s) + \cdots + a_0 X_1(s)$$

$$Y(s) = b_{n-1} s^{n-1} X_1(s) + \cdots + b_0 X_1(s)$$

が成り立ち、逆ラプラス変換すれば、それぞれ

$$\frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 x_1(t) = u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = b_{n-1} \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 x_1(t) \quad (4)$$

となる。ここで、状態変数 $x_1(t)$ の微分を

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} &= \cdots = \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x_n(t) \end{aligned} \quad (5)$$

のように定義すれば、式(3)は

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \cdots - a_{n-1} x_n(t) + u(t) \quad (6)$$

であらわすことができるので、状態ベクトルを

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$$

で定義すれば、式(5)および式(6)より状態方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

が得られる。また、式(4)より、出力方程式として

$$y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}] x(t)$$

が得られる。(答)

6.

(1) 問題の伝達関数と式 11-39 を見比べると、 $b_n \neq 0$ であるため、そのままでは実現を求める

ことができない。この場合、割り算を行い

$$G(q) = \frac{1+q^{-1}+q^{-2}}{1-1.2q^{-1}+0.5q^{-2}} = \underbrace{1}_{G_1(q)} + \underbrace{\frac{2.2q^{-1}+0.5q^{-2}}{1-1.2q^{-1}+0.5q^{-2}}}_{G_2(q)}$$

のように変形し、二つのシステムの実現の和を考えればよい（図1）。

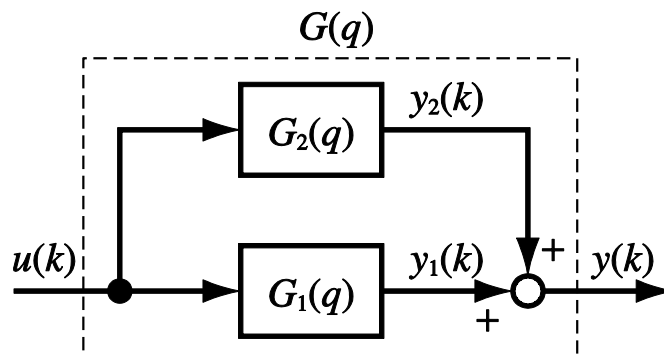


図1 二つの伝達関数の和

$G_2(q)$ の実現は式 11-41 より,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1.2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y_1(k) = [0.5 \quad 2.2]x(k)$$

となり、 $G_1(q)$ は定数であるので,

$$y_2(k) = u(k)$$

となる。これより、問題の伝達関数の実現は

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1.2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (\text{答})$$

$$y(k) = [0.5 \quad 2.2]x(k) + u(k)$$

(2) ラプラス演算子 s を用いた連続時間システムであるので、式 11-45 より,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{答})$$

$$y(t) = [1 \quad 1 \quad 0]x(t)$$

7.

○前進差分

式 11-53 の係数行列はそれぞれ以下のように求められる。

$$A_D = (I + A_C T_s) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times 0.1 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \quad (\text{答})$$

$$B_D = B_C T_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times 0.1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (\text{答})$$

$$C_D = C_C = [1 \quad 0] \quad (\text{答})$$

$$D_D = 0 \quad (\text{答})$$

○後退差分

式 11-58 の係数行列はそれぞれ以下のように求められる。

$$A_D = (I - A_C T_s)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times 0.1 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.985 & 0.0758 \\ -0.152 & 0.758 \end{bmatrix} \quad (\text{答})$$

$$B_D = (I - A_C T_s)^{-1} B_C T_s = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times 0.1 \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times 0.1 = \begin{bmatrix} 0.106 \\ 0.0606 \end{bmatrix} \quad (\text{答})$$

$$C_D = C_C (I - A_C T_s)^{-1} = [1 \quad 0] \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times 0.1 \right)^{-1} = [0.985 \quad 0.0758] \quad (\text{答})$$

$$D_D = C_C (I - A_C T_s)^{-1} B_C T_s = [1 \quad 0] \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times 0.1 \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times 0.1 = 0.106 \quad (\text{答})$$

○双一次変換

式 11-68 の係数行列はそれぞれ以下のように求められる。

$$A_D = \left(I + \frac{T_s}{2} A_C \right) \left(I - \frac{T_s}{2} A_C \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.991 & 0.0866 \\ -0.173 & 0.732 \end{bmatrix} \quad (\text{答})$$

$$B_D = T_s \left(I - \frac{T_s}{2} A_C \right)^{-1} B_C = \begin{bmatrix} 0.104 \\ 0.0779 \end{bmatrix} \quad (\text{答})$$

$$C_D = C_C \left(I - \frac{T_s}{2} A_C \right)^{-1} = [0.996 \quad 0.0433] \quad (\text{答})$$

$$D_D = \frac{T_s}{2} C_C \left(I - \frac{T_s}{2} A_C \right)^{-1} B_C = 0.0519 \quad (\text{答})$$

8.

表 1 1 - 2 中の行列が

$$(I - A_C T_s)^{-1} = I + A_C T_s + (A_C T_s)^2 + (A_C T_s)^3 + \dots$$

$$\left(I + \frac{T_s}{2} A_C \right) \left(I - \frac{T_s}{2} A_C \right)^{-1} = I + A_C T_s + \frac{(A_C T_s)^2}{2} + \frac{(A_C T_s)^3}{8} + \dots$$

と展開できることを利用し、サンプリング周期 T_s の 2 乗以上を含む項を無視すれば、すべての方法において係数行列 A_D , B_D が

$$A_D = I + A_C T_s$$

$$B_D = B_C T_s$$

で近似できることがわかる。(答)

9.

PID 制御器の入出力関係は

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

で与えられるので、サンプリング周期を T_s とし、積分は式 11-52, 微分は式 11-54 を用いて近似すれば

$$u(k) = K_P e(k) + K_I T_s \sum_{i=0}^k e(i) + \frac{K_D}{T_s} \{e(k) - e(k-1)\}$$

となり、デジタルコンピュータ上に実装することができる。