「制御工学」　第 13 章演習問題解答

１．

（1）

$$\mathcal{L}[f_d(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt$$

ここで時刻 $t \neq 0$ においては $\delta(t) = 0$ なので

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = e^{-s0} = 1$$

したがって，$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$　（答）

（2）

移動法則

$$F(s+b) = \mathcal{L}\left[e^{-sb} f(t)\right] \quad \text{（13-12）}$$

より，s 領域における s の平行移動は時間領域において，指数関数倍に相当する。そのため，与式 $f_{es}(t), f_{ec}(t)$ ともに，時間領域において e^{at} 倍されていることから，三角関数のラプラス変換（例題 13-2）に関して，s を－a だけ平行移動すればよいことがわかる。

したがって，例題 13-2 およびラプラス変換表 より

$$\mathcal{L}[f_s(t)] = \mathcal{L}[\sin bt] = \frac{b}{(s^2+b^2)},\ \mathcal{L}[f_c(t)] = \mathcal{L}[\cos bt] = \frac{s}{(s^2+b^2)}$$

となる。おのおのの右辺において，$s \longrightarrow s - a$ として

$$\mathcal{L}[f_{es}(t)] = \mathcal{L}\left[e^{at}\sin bt\right] = \frac{b}{(s-a)^2+b^2},$$

$$\mathcal{L}[f_{ec}(t)] = \mathcal{L}\left[e^{at}\cos bt\right] = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

（答）

（3）

三角関数の加法定理より

$$f_{th\_s}(t) = \sin(\omega t + \theta) = \sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta$$
$$f_{th\_c}(t) = \cos(\omega t + \theta) = \cos\omega t\cos\theta - \sin\omega t\sin\theta$$

となる。おのおのラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\left[f_{th\_s}(t)\right]=\cos\theta\mathcal{L}[\sin\omega t]+\sin\theta\mathcal{L}[\cos\omega t]$$

$$=\cos\theta\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\sin\theta\frac{s}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

（答）

$$\mathcal{L}\left[f_{th\_c}(t)\right]=\cos\theta\mathcal{L}[\cos\omega t]-\sin\theta\mathcal{L}[\sin\omega t]$$

$$=\cos\theta\frac{s}{s^2+\omega^2}-\sin\theta\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+=\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

（答）

（４）

与式をラプラス変換の公式にあてはめると次式を得る。

$$\mathcal{L}[f(at)]=\int_0^\infty f(at)e^{-st}dt \qquad (a>0)$$

ここで，$at=\tau$ とおくと，$dt=d\tau/a, t=\tau/a$ であり，上式は以下のようになる。

$$\mathcal{L}[f(at)]=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\frac{\tau}{a}}\frac{d\tau}{a}=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}d\tau$$

これはラプラス変換の定義式において，s にかわり s/a とおいたものに等しい。そのため，

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{（答）}$$

となる。これをラプラス変換の相似性という。

２．

(1)

$$\frac{s+1}{s^2+6s+10}=\frac{s+1}{\{s-(-3+j)\}\{s-(-3-j)\}}=\frac{K_1}{s+3-j}+\frac{K_2}{s+3+j}=F(s)$$

同様に

$$K_1=\left[(s+3-j)F(s)\right]_{s=-3+j}=\left[\frac{s+1}{s+3+j}\right]_{s=-3+j}=\frac{-3+j+1}{-3+j+3+j}=\frac{-2+j}{2j}=\frac{1}{2}-\frac{1}{j}$$

$$K_2=\left[(s+3+j)F(s)\right]_{s=-3-j}=\left[\frac{s+1}{s+3-j}\right]_{s=-3-j}=\frac{-3-j+1}{-3-j+3-j}=\frac{-2-j}{-2j}=\frac{1}{2}+\frac{1}{j}$$

したがって，$F(s)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{s+3+j}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{s+3-j}\right)$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{j}\right)e^{-(3+j)t}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{j}\right)e^{-(3-j)t}$$

$$=e^{-3t}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{j}\right)e^{-jt}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{j}\right)e^{jt}\right\}$$

$$=e^{-3t}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{-jt}+e^{jt}\right)+\frac{1}{j}\left(-e^{-jt}+e^{jt}\right)\right\}$$

$$=e^{-3t}\left\{\frac{1}{2}\left(\cos t-j\sin t+\cos t+j\sin t\right)+\frac{1}{j}\left(-\cos t+j\sin t+\cos t+j\sin t\right)\right\}$$

$$=e^{-3t}\left(\cos t+2\sin t\right)$$ （答）

上記の通り $f(t)$ には正弦波で，その振幅が指数関数で表現される。

(2)

$$\frac{1}{s^2(s+2)}=\frac{K_1}{s^2}+\frac{K_2}{s}+\frac{K_3}{(s+2)}=F(s)$$

例題(13-4)などと同様に

$$K_1=\left[s^2F(s)\right]_{s=0}=\left[\frac{1}{s+2}\right]_{s=0}=\frac{1}{2}$$

$$K_2=\left[\frac{d}{ds}s^2F(s)\right]_{s=0}=\left[\frac{d}{ds}\frac{s^2}{s^2(s+2)}\right]_{s=0}=\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+2)}\right]_{s=0}$$

$$=\left[\frac{-1}{(s+2)^2}\right]_{s=0}=-\frac{1}{4}$$

$$K_2=\left[(s+2)F(s)\right]_{s=-2}=\left[\frac{1}{s^2}\right]_{s=-2}=\frac{1}{4}$$

したがって

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\frac{1}{(s+2)}\right]=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+2)}\right]$$

ラプラス変換表より

$$f(t)=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+2)}\right]=\frac{1}{4}\left(2t+1+e^{-2t}\right)$$ （答）

３.

（１）与式の両辺をラプラス変換する。ラプラス変換の微分法則（式 13-13，13-14）より

$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right]=sF(s)-f(+0)$ $\mathcal{L}\left[\ddot{f}(t)\right]=s^2F(s)-sf(+0)-\dot{f}(+0)$ より

$$\mathcal{L}[\ddot{x}]=s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)$$
$$\mathcal{L}[\dot{x}]=sX(s)-x(0)$$

となる。よって

$$\mathcal{L}[\ddot{x}-4\dot{x}+4x]=s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)-4\{sX(s)-x(0)\}+4X(s)=0$$
$$\left(s^2-4s+4\right)X(s)+(-s+4)x(0)-\dot{x}(0)=0$$

である。ここで初期値$x(0)=1, \dot{x}(0)=1$をそれぞれ代入し

$$(s^2-4s+4)X(s)+(-s+4)\cdot 1-1=0$$

$$(s^2-4s+4)X(s)+(-s+4)=1$$

$$X(s)=\frac{1+s-4}{(s^2-4s+4)}=\frac{s-3}{(s^2-4s+4)}$$

$$=\frac{s-3}{(s-2)^2}=\frac{s}{(s-2)^2}-\frac{3}{(s-2)^2}=\frac{1}{(s-2)}+\frac{2}{(s-2)^2}-\frac{3}{(s-2)^2}$$

$$=\frac{1}{(s-2)}-\frac{1}{(s-2)^2}$$

これをラプラス逆変換し

$$\mathcal{L}^{1}[X(s)]=\mathcal{L}^{1}\left[\frac{1}{(s-2)}-\frac{1}{(s-2)^2}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right]-\mathcal{L}^{1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]$$

ラプラス変換表より,

$$\mathcal{L}^{1}[X(s)]=x(t)=e^{2t}-te^{2t}=(1-t)e^{2t} \qquad \text{（答）}$$

（２）与式の両辺をラプラス変換する。ラプラス変換の微分法則（式 13-13，13-14）より

$$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right]=sF(s)-f(+0)\ \mathcal{L}\left[\ddot{f}(t)\right]=s^2F(s)-sf(+0)-\dot{f}(+0)$$ より

$$\mathcal{L}[\ddot{x}]=s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}]=sX(s)-x(0)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$$

となる。よって

$$\mathcal{L}[\ddot{x}+2\dot{x}+2x]=\mathcal{L}[\delta(t)]$$

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+2\{sX(s)-x(0)\}+2X(s)=1$$

$$(s^2+2s+2)X(s)+(-s-2)x(0)-\dot{x}(0)=1$$

である。ここで初期値$x(0)=\dot{x}(0)=0$をそれぞれ代入し

$$(s^2+2s+2)X(s)+0-0=1$$

$$(s^2+2s+2)X(s)=1$$

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+2s+2)}=\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

これをラプラス逆変換し

$$\mathcal{L}^{1}[X(s)]=\mathcal{L}^{1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

ラプラス変換表 $\mathcal{L}\left[e^{at}\sin bt\right]=\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$ より

$$\mathcal{L}^{1}[X(s)]=x(t)=e^{-1t}\sin 1t=e^{-t}\sin t \qquad \text{（答）}$$

４．

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$|ad-bc|=1\cdot 4-2\cdot 2=4-4=0$$

したがって，この行列は正則ではない。

$$A_2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$|ad-bc|=3\cdot 4-2\cdot 5=12-10=2\neq 0$$

したがってこの行列は正則であり，逆行列が存在する。

$$A_2^{-1}=\frac{1}{|3\cdot 4-2\cdot 5|}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2.5 & 1.5\end{pmatrix}$$

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

クラーメルの公式より

$$|A_3|=1\cdot 3\cdot 1+1\cdot -1\cdot 2+0\cdot 2\cdot 3-0\cdot 3\cdot 2-1\cdot 2\cdot 1-1\cdot -1\cdot 3=3+(-2)+0+0-2-(-3)=3-2-2+3=2$$

よってこの行列は正則であり，逆行列が存在する。

$$A_3^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\cdot 1-(-1)\cdot 3 & 3\cdot 0-1\cdot 1 & 1\cdot(-1)-0\cdot 3\\ (-1)\cdot 2-2\cdot 1 & 1\cdot 1-2\cdot 0 & 0\cdot 2-1\cdot(-1)\\ 2\cdot 3-3\cdot 2 & 2\cdot 1-3\cdot 1 & 1\cdot 3-1\cdot 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -1 & -1\\ -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -0.5 & -0.5\\ -2 & 0.5 & 0.5\\ 0 & -0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

（答）

別解　掃き出し法による解法

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to(2\text{行}-1\text{行}\times 2,3\text{行}-1\text{行}\times 2)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to(1\text{行}-2\text{行},3\text{行}-2\text{行})\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\to(3\text{行}/2)\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0.5\end{pmatrix}\to(1\text{行}-3\text{行},2\text{行}+3\text{行})\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & -0.5 & -0.5\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

したがって

$$A_3^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -0.5 & -0.5\\ -2 & 0.5 & 0.5\\ 0 & -0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$