ワンポイント教材

## 新版数学A 課題学習 「油分け算」を三垂線座標で解く

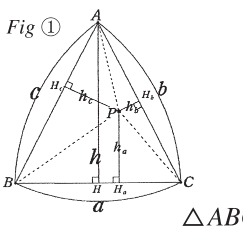
平成24年度から，「数学Ⅰ」「数学A」で課題学習が扱われることになった。ここでは，実教出版の「新版数学A」で扱われた「油分け算」について，三線座標で解く方法を紹介する。

課題 10Lの容器Aに油が満たされている。この油を空の2つの容器，7Lの容器Bと3Lの容器Cとを使って，5Lずつの半分に分けるにはどうすればよいか。

この問題を解くのに，次の定理を使う。

定理 正三角形の内部，または，周上の点Pから三辺に下ろした三垂線の長さの和は，一定である。

Fig ①




一辺の長さを $t$ とし，正三角形の内部の一点をPとし，三垂線の長さを $h_a$，$h_b$，$h_c$ とし，Aからの垂線の長さを $h$ とすると，

$$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCA$$

これにより，$\frac{1}{2}th = \frac{1}{2}th_a + \frac{1}{2}th_b + \frac{1}{2}th_c$

ゆえに，$h = h_a + h_b + h_c$ が成立する。

このことより，各辺から高さを座標として，以下のFig ②のような三線座標を考える。

例えば，Fig ②の点Pの座標は，辺BCからの高さが5，辺CAからの高さが3，辺ABからの高さが2，であるから $P(A, B, C) = (5, 3, 2)$ と表す。

さて，この課題の三線座標は，頂点までの高さを10とし，また，Bの容器の制限，Cの容器の制限をFig ③のようにとると，題意に適する格子点の領域はFig ③のような平行四辺形のアミ掛け部分となる。次に，出発点の$A_{10}$からBまたはCの制限壁まで進み，壁で反射させて次の壁を進み再度反射を繰り返す。

Fig ②

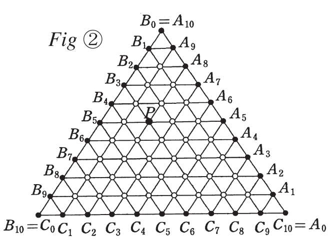



Fig ③

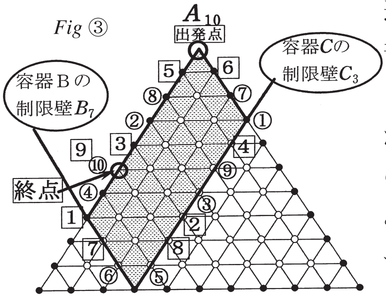



Fig ④

| | | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⑩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 7 | 7 | 4 | 4 | 1 | 1 | 8 | 8 | 5 | 5 |
| B | 0 | 0 | 3 | 3 | 6 | 6 | 7 | 0 | 2 | 2 | 5 |
| C | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 2 | 2 | 0 | 3 | 0 |

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 3 | 3 | 6 | 6 | 9 | 9 | 2 | 2 | 5 |
| B | 0 | 7 | 4 | 4 | 1 | 1 | 0 | 7 | 5 | 5 |
| C | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 0 |

Fig ⑤

このような操作を続けて，最終点 $P(5, 5, 0)$ に達する方法を探し出す。以上がこの課題の三線座標を用いた解法である。

この操作より以下のようなことが判明される。

Ⅰ この問の解法には2通りあり，①～⑩の場合10回の移動，1 ～ 9 の場合は9回の移動が必要であり，最少の移動は9回である。

Ⅱ ①～⑩の手順ではBの壁で1回反射し，Cの壁では4回反射している。これは，容器Bと容器Cとの最終時に5Lの差があることから $7x+3y=5$ の二元一次不定方程式の整数解，すなわち，$7\times(-1)+3\times(4)=5$ で $x=-1$，$y=4$ の整数解を表している。同様に，1 ～ 9 の場合も反射回数から $7\times(2)+3\times(-3)=5$ より $x=2$，$y=-3$ の整数解を得る。

Ⅲ Fig ③の平行四辺形の壁の座標からわかるように，A，B，Cのいずれかの容器に1L～10Lの油を分けることも可能であることを知る。

Ⅳ 「油分け算」への解法の他に，この三垂線座標の格子点の数は【3種の異なる物から重複を許して10個の物を取り出す組合せの数】を表している。Fig ②より格子点の数は，

$1+2+3+\cdots+11 = \frac{11\times 12}{2} = 66$ であり，

重複組合せの ${}_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{3-1} = {}_{12}C_2 = \frac{12\times 11}{2\times 1} = 66$

に一致する。


通巻第64号
2012年 2月 15日 印刷
2012年 2月 20日 発行



実教出版株式会社
代表者 戸塚雄弐
定価 210円（本体200円）
発行所 〒102-8377 東京都千代田区五番町5
TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/