実践記録

“三角形の五心”のベクトル表示

愛知工業大学名電高等学校講師　米倉逸克

　高校数学の知識を応用して三角形の五心のベクトル表示を導いてみたい。先に結果を紹介しよう。$\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点の位置ベクトルを $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ とする。また $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする。さらに，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$，内心を $\mathrm{I}(\vec{i})$，外心を $\mathrm{P}(\vec{p})$，垂心を $\mathrm{H}(\vec{h})$ とすると

①（重心のベクトル表示）

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

②（内心のベクトル表示）

$$\vec{i}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$$

③（外心のベクトル表示）

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}\sin 2A+\vec{b}\sin 2B+\vec{c}\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

④（垂心のベクトル表示）

$$\vec{h}=\frac{\vec{a}\tan A+\vec{b}\tan B+\vec{c}\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}$$

⑤ $\triangle\mathrm{ABC}$ の３つの傍心の位置ベクトルは

$$\frac{-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{-a+b+c},\quad \frac{a\vec{a}-b\vec{b}+c\vec{c}}{a-b+c},\quad \frac{a\vec{a}+b\vec{b}-c\vec{c}}{a+b-c}$$

で表される。これらの事項の証明はいろいろな形でなされてきた。ここでは一つの補題を示すことによりこれらの証明が能率的に進むことを確認したい。

補題

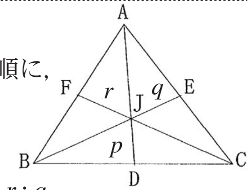
　三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$（$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$）の内部に点 $\mathrm{J}(\vec{j})$ をとる。面積比を考え

$\triangle\mathrm{JBC}:\triangle\mathrm{JCA}:\triangle\mathrm{JAB}=p:q:r$　$(p,\ q,\ r>0)$

とする。このとき，

$\vec{j}=\dfrac{p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}}{p+q+r}$ が成り立つ。

（証明）



線分 AJ，BJ，CJ の延長と BC，CA，AB との交点を順に，D，E，F とする。

ここで面積比の条件より，

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\triangle\mathrm{JAB}:\triangle\mathrm{JCA}=r:q$，

$\mathrm{CE}:\mathrm{EA}=\triangle\mathrm{JBC}:\triangle\mathrm{JAB}=p:r$，

$\mathrm{AF}:\mathrm{FB}=\triangle\mathrm{JCA}:\triangle\mathrm{JBC}=q:p$ が成り立つ。

ここで，$\mathrm{AJ}:\mathrm{JD}=s:(1-s)$ $(0<s<1)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=s\mathrm{AD}=s\frac{q\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{r+q}=\frac{sq}{r+q}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{sr}{r+q}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる。

一方，$\mathrm{FJ}:\mathrm{JC}=t:(1-t)$ $(0<t<1)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{q(1-t)}{p+q}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平行でないから，（$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は１次独立だから）係数を比較して s，t についての連立方程式

$$\frac{sq}{r+q}=\frac{q(1-t)}{p+q},\quad \frac{sr}{r+q}=t$$

を得る。これを解くと，

$$s=\frac{q+r}{p+q+r},\quad t=\frac{r}{p+q+r}$$ を得る。

このことから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}&=\frac{q(1-t)}{p+q}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{q}{p+q+r}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{r}{p+q+r}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\\&=\frac{-q-r}{p+q+r}\vec{a}+\frac{q}{p+q+r}\vec{b}+\frac{r}{p+q+r}\vec{c}\end{aligned}$$

ゆえに $\vec{j}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\dfrac{p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}}{p+q+r}$ である。

（証明終）

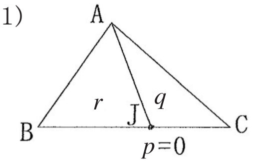
（補題の補足）

点 J が三角形の周または外部にあっても補題は成り立つ。

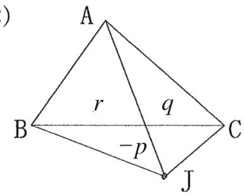
(1) 例えば，点Jが直線BC上にあれば，△JBCの面積を0と考える。

(2) 例えば，点Jが直線BCに関して点Aと反対側にあるときは,△JBCの面積を負の値として扱う。同様に△ABCの外側に作られる三角形の面積は負の値として扱う。

(1)



(2)



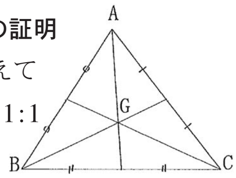
①「重心のベクトル表示」の証明

重心の性質から面積比を考えて

△GBC:△GCA:△GAB=1:1:1

である。ゆえに,

補題1において，$p=q=r=1$



としてよいから $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ を得る。　(証明終)

②「内心のベクトル表示」の証明

△ABCの内接円の半径をrとする。

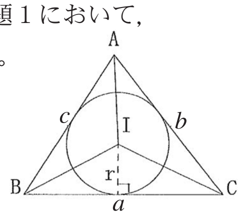
面積比△IBC:△ICA:△IAB$=\dfrac{1}{2}ar:\dfrac{1}{2}br:\dfrac{1}{2}cr$

$=a:b:c$だから，補題1において，

$p:q:r=a:b:c$としてよい。

ゆえに，$\vec{i}=\dfrac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$

を得る。　　(証明終)



③「外心のベクトル表示」の証明

△ABCの外接円の半径をRとする。

面積比△PBC:△PCA:△PAB

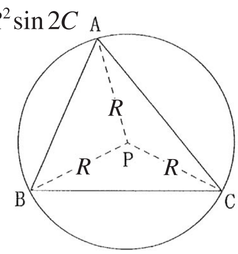
$=\dfrac{1}{2}R^2\sin 2A:\dfrac{1}{2}R^2\sin 2B:\dfrac{1}{2}R^2\sin 2C$

$=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$

だから，補題1において，

$p=\sin 2A$，$q=\sin 2B$,

$r=\sin 2C$としてよい。



ゆえに，$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}\sin 2A+\vec{b}\sin 2B+\vec{c}\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$

を得る。　(証明終)

④「垂心のベクトル表示」の証明

（鋭角三角形の場合）

△ABCの垂心をHとする。面積比を考えて

△HBC:△HCA　$=a\cos B:b\cos A$

△HCA:△HAB=　$b\cos C:c\cos B$

ゆえに

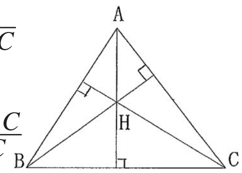
$p:q:r=a\cos B\cos C:b\cos C\cos A:c\cos A\cos B$

$=\dfrac{a}{\cos A}:\dfrac{b}{\cos B}:\dfrac{c}{\cos C}$

(正弦定理を用いて)

$=\dfrac{2R\sin A}{\cos A}:\dfrac{2R\sin B}{\cos B}:\dfrac{2R\sin C}{\cos C}$

$=\tan A:\tan B:\tan C$



ゆえに，$\vec{h}=\dfrac{\vec{a}\tan A+\vec{b}\tan B+\vec{c}\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}$ を得る。

直角三角形や鈍角三角形の場合も基本的に成り立つが紙面の都合で省略する。　(証明終)

⑤「傍心のベクトル表示」の証明

辺BCに関して頂点Aと反対側にある傍心$R_1(\vec{r_1})$について証明する。(他の傍心の場合も同様)

明らかに，R_1は角Aの2等分線上にあるから

$\overrightarrow{AR_1}=s\left(\dfrac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right)(0<s)$ と表せる。一方,

R_1は角Cの外角の2等分線上の点でもあるから

$\overrightarrow{AR_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR_1}=\overrightarrow{AC}+t\left(\dfrac{1}{a}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right)\quad(t>0)$

$=\overrightarrow{AC}+t\left\{\dfrac{1}{a}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\dfrac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right\}$

$=\dfrac{t}{a}\overrightarrow{AB}+\left(1-\dfrac{t}{a}+\dfrac{t}{b}\right)\overrightarrow{AC}$と表すこともできる。

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0},\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$かつ$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$は平行でないから,

$\dfrac{s}{c}=\dfrac{t}{a}$，$\dfrac{s}{b}=1-\dfrac{t}{a}+\dfrac{t}{b}$ を得る。これを解いて,

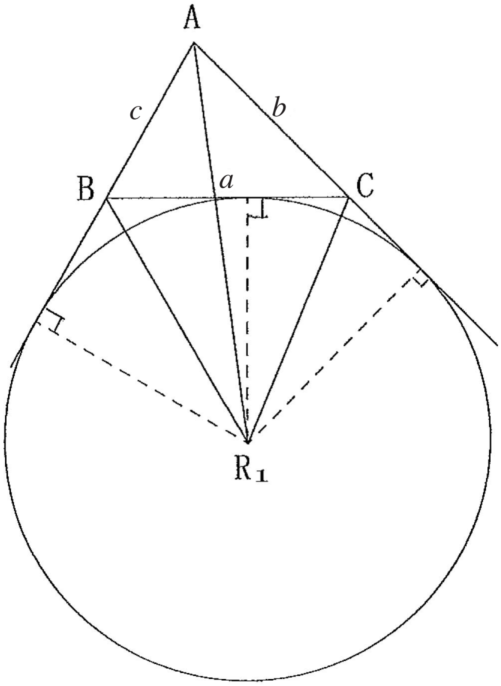
$s=\dfrac{bc}{-a+b+c}$，$t=\dfrac{ab}{-a+b+c}$ を得る。

$\therefore\ \overrightarrow{AR_1}=\dfrac{b}{-a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{-a+b+c}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{b}{-a+b+c}(\vec{b}-\vec{a})+\dfrac{c}{-a+b+c}(\vec{c}-\vec{a})$

$=\dfrac{-b-c}{-a+b+c}\vec{a}+\dfrac{b}{-a+b+c}\vec{b}+\dfrac{c}{-a+b+c}\vec{c}$

$\therefore\quad\vec{r_1}=\vec{a}+\overrightarrow{AR_1}=\dfrac{-a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{-a+b+c}$　　(証明終)



この補題については次のような応用もある。

追加：「フェルマー点」のベクトル表示

［フェルマー点の説明］

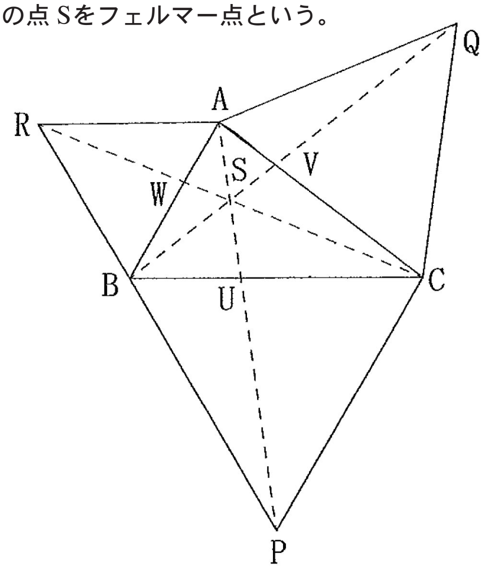
△ABCの外側に３つの正三角形△BPC，△CQA，△ARBを作る。そのとき次の性質が成り立つ。

① ３本の直線 AP，BQ，CRは一点で交わる。（その点を Sとする。）

② AP＝BQ＝CR

③ ∠BSC＝∠CSA＝∠ASB＝120°

この点 Sをフェルマー点という。



更に，最大角が 120° より小さい三角形においては，フェルマー点が「３点からの距離の和が最小となる点」でもある。その距離の和の最小値が②の AP の大きさに等しい。（これらの証明は本論から外れるので省略する。）

また，３点からの距離の和が最小となる点をシュタイナーの点ともいう。

このとき，フェルマー点 S$(\vec{s})$のベクトル表示は

$$\vec{s}=\frac{\dfrac{\sin A}{\sin(A+60^\circ)}\vec{a}+\dfrac{\sin B}{\sin(B+60^\circ)}\vec{b}+\dfrac{\sin C}{\sin(C+60^\circ)}\vec{c}}{\dfrac{\sin A}{\sin(A+60^\circ)}+\dfrac{\sin B}{\sin(B+60^\circ)}+\dfrac{\sin C}{\sin(C+60^\circ)}}$$

で与えられる。

（証明）（ AS＝l，BS＝m，CS＝nとする。

また，AP と BC，BQ と CA，CR と AB の交点を順に U，V，W とする。）

△SBC:△SCA:△SAB

$$=\frac{1}{2}mn\sin 120^\circ:\frac{1}{2}nl\sin 120^\circ:\frac{1}{2}lm\sin 120^\circ$$

$$=mn:nl:lm=\frac{1}{l}:\frac{1}{m}:\frac{1}{n}\qquad\cdots\cdots①$$

ここで，△ABQ≡△ARCで，辺 BQ と辺 CR のなす角は 60°，しかも ∠ASB＝120° だから，

直線 SR は ∠ASB の二等分線である。

ゆえに，

$l:m$＝AW : BW＝△ARC : △BCR

$$\therefore\ \frac{1}{l}:\frac{1}{m}=\frac{1}{\triangle\mathrm{ARC}}:\frac{1}{\triangle\mathrm{BCR}}\qquad\cdots\cdots②$$

同様にして，$\dfrac{1}{m}:\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{\triangle\mathrm{BPA}}:\dfrac{1}{\triangle\mathrm{CAP}}\qquad\cdots\cdots③$

△BCR≡△BPA を用いて，①，②，③より

$$\triangle\mathrm{SBC}:\triangle\mathrm{SCA}:\triangle\mathrm{SAB}=\frac{1}{\triangle\mathrm{ARC}}:\frac{1}{\triangle\mathrm{BCR}}:\frac{1}{\triangle\mathrm{CAP}}$$

$$=\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{ARC}}:\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{BCR}}:\frac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{CAP}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}bc\sin(A+60^\circ)}:\frac{\frac{1}{2}ca\sin B}{\frac{1}{2}ca\sin(B+60^\circ)}:\frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{\frac{1}{2}ab\sin(C+60^\circ)}$$

$$=\frac{\sin A}{\sin(A+60^\circ)}:\frac{\sin B}{\sin(B+60^\circ)}:\frac{\sin C}{\sin(C+60^\circ)}$$

ここで補題１より上記の結果を得る。　（証明終）