教材ワンポイント

数学A「整数の性質」の指導上の留意点 ー合同式についてー

学習指導要領の改訂で数学Aの「整数の性質」では，整数に関する問題の解法に合同式の利用が考えられる。

２つの整数 a，b が n を法として合同であるとは，次のことが成り立つことである。

a と b を n で割った余りは等しい。このとき，$a-b$ は n で割り切れる。逆も成り立つ。

合同式に関する基本性質は，以下の通りである。

> a，b，c，d を整数，n を正の整数として，
> $a\equiv c\pmod{n}$，$b\equiv d\pmod{n}$ のとき，
> (1) $a\pm b\equiv c\pm d\pmod{n}$
> (2) $ab\equiv cd\pmod{n}$
> (3) $a/b\equiv c/d\pmod{n}$ ただし，$bd\neq 0$
> (4) $a^m\equiv c^m\pmod{n}$ ただし，m は自然数

合同式の性質を利用して，次の問題を解いてみよう。

（例題１）一般項が次のように与えられている数列 $\{a_n\}$ のすべての項は，７で割り切れることを示せ。

$$a_n=10^n-3\cdot(-4)^{n-1}$$

（東京工業大：改題）

＜解＞ $10\equiv 3\pmod{7}$，

$-4\equiv 3\pmod{7}$

であるから，

$a_n\equiv 3^n-3\cdot 3^{n-1}$

$=3^n-3^n=0\pmod{7}$

よって，数列 $\{a_n\}$ のすべての項は，７で割り切れる。

（終）

このように，整数の剰余に関する問題は，合同式を利用すれば簡単に解決できる場合が多い。

次の問題も，合同式の性質を利用すれば簡単に解くことができる。

（例題２）n を自然数とするとき，

$$1^n+2^n+3^n+4^n$$

が 10 の倍数となるような n の値を求めよ。

（奈良県医大：類題）

＜解＞ $a_n=1^n+2^n+3^n+4^n$ とおく。

$1^n+3^n=$（奇数）＋（奇数）＝（偶数）

$2^n+4^n=$（偶数）＋（偶数）＝（偶数）

よって，a_n は偶数，すなわち２の倍数であるから，a_n が５の倍数となる条件を求めればよい。

それで，$4\equiv -1\pmod{5}$，$3\equiv -2\pmod{5}$

であるから，

$a_n\equiv 1^n+2^n+(-2)^n+(-1)^n\pmod{5}$ ……①

よって，n が奇数のとき①の右辺は０となる。すなわち，n が奇数のとき a_n は 10 の倍数となる。

また，n が偶数のとき，$n=2m$ とおくと

$a_n\equiv 1^{2m}+2^{2m}+(-2)^{2m}+(-1)^{2m}$

$=2+2\cdot 4^m$

$=2(1+4^m)$

よって，$1+4^m\equiv 1+(-1)^m\pmod{5}$ ……②

であるから，m が奇数のとき②の右辺は０となる。

したがって，$n=2m$（m が奇数）のときは，a_n は 10 の倍数となり，m が偶数，すなわち，n が４の倍数のときは 10 の倍数とならない。

以上のことから，n が４の倍数以外の自然数のとき，$1^n+2^n+3^n+4^n$ は 10 の倍数となる。

（終）

このように，合同式は，整数に関する問題など，様々な場面での問題解決に利用できる。生徒の実態を考慮しつつ指導したい内容である。

今回の改訂によって，これまで以上に整数について理解が深まることを期待したい。

通巻第63号　©編修・発行　実教出版株式会社　定　価　210円（本体200円）
2011年 10月 5日 印刷　代表者　戸塚雄弍　発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町５
2011年 10月 12日 発行　TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/