## 8章　問題解答

### 8-1

**予習**

１.　　省略

２.　　省略

### 演習問題　A

### 8-1-A1

　乱流境界層の厚さは

$$\delta = 0.37 \times \left(\frac{0.01\times10^{-4}}{5}\right)^{1/5} \times 1^{4/5} = 0.017\mathrm{m} \quad \cdots\cdots ①$$

　粘性底層の厚さを求めるにはまず摩擦速度を求めなければならない。乱流境界層の場合はせん断力が

$$\tau_0 = \frac{0.18}{8} \times \left(\frac{5\times0.017}{0.01\times10^{-4}}\right)^{(-1/4)} \times 1000 \times 5^2 = 33\ \mathrm{N/m^2} \quad \cdots\cdots ②$$

で評価できるので，摩擦速度は以下のように算出される。

$$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho} = \sqrt{33/1000} = 0.18\ \mathrm{m/s} \quad \cdots\cdots ③$$

したがって粘性底層 $\delta_L$ は

$$\delta_L = 11.6\nu/u_* = 11.6 \times 0.01 \times 10^{-4}/0.18 = 6.4 \times 10^{-5}\ \mathrm{m} \quad \cdots\cdots ④$$

さらに $x = 1$ m の地点で層流境界層があると仮定した場合，その厚さは

$$\delta = 5\sqrt{\frac{0.01\times10^{-4}\times1}{5}} = 2.2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる。

### 8-1-A2

(a)  流速 0.4 m / s の場合のレイノルズ数は

$$R_e = \frac{0.4\times0.1}{0.01\times10^{-4}} = 4 \times 10^4 \quad \cdots\cdots ①$$

となるので，形状抵抗係数は図 8-7 より 0.6 となる。よって

$$D_p = 0.6 \times \frac{1000\times0.4^2}{2} \times \pi \times 0.05^2 = 0.38\ \mathrm{N/m^2} \quad \cdots\cdots ②$$

(b)  流速 2.5 m / s の場合のレイノルズ数は

$$R_e = \frac{2.5\times0.1}{0.01\times10^{-4}} = 2.5 \times 10^5 \quad \cdots\cdots ③$$

となるので，形状抵抗係数は図 8-7 より 0.2 となる。よって

$$D_p = 0.2 \times \frac{1000\times2.5^2}{2} \times \pi \times 0.05^2 = 4.9\ \mathrm{N/m^2} \quad \cdots\cdots ④$$

## 演習問題　B

### 8-1-B1

円柱表面の微小部分 $ds$ (= $a\,d\theta$)における圧力 $p$ の水平成分は $p\cos\theta$ となるので円柱表面全体に作用する圧力 $P$ は下式で表される。

$$P=\int_0^{2\pi}p\cos\theta\cdot a d\theta=\int_0^{2\pi}\left(p_\infty+\frac{\rho}{2}U^2\left(1-4\sin^2\theta\right)\right)\cos\theta\cdot a d\theta \quad \cdots\text{①}$$

ここで,

$$\sin^2\theta\cdot\cos\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{4}\left(\cos3\theta+\cos\theta\right)=\frac{1}{4}\left(\cos\theta-\cos3\theta\right) \quad \cdots\text{②}$$

を用いると式①は

$$P=a\int_0^{2\pi}\left(p_\infty+\frac{\rho}{2}U^2\right)\cos\theta-\frac{\rho}{2}U^2\cdot4\cdot\frac{1}{4}\left(\cos\theta-\cos3\theta\right)d\theta \quad \cdots\text{③}$$

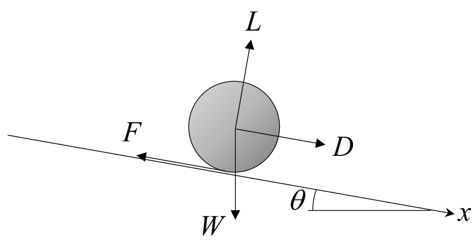
となる。ただし任意の整数 $n$ について

$$\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cdot d\theta=0 \quad \cdots\text{④}$$

なので式③の右辺は 0 となる。つまり，円柱に作用する圧力（流体力）は 0 である。

### 8-1-B2

砂粒に作用する力は図に示すように抗力 $D$，揚力 $L$，重力 $W$，底面摩擦力 $F$ である。




滑動を開始する時の，$x$ 軸方向での力の釣合は下式のように表される。

$$D+W\sin\theta-F=0 \quad \cdots\text{①}$$

通常，抗力としては形状抵抗

$$D=C_p\frac{\rho U^2}{2}A \quad \cdots\text{②}$$

が作用すると考える。ここに，$A$ は球の断面積（$=\pi D^2/4$）である。また重力は水および砂粒の密度をそれぞれ$\rho$，$\sigma$とすると浮力を考慮して

$$W=\rho\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)g\frac{\pi}{6}D^3 \quad \cdots\text{③}$$

で表され，底面摩擦力 $F$ は静止摩擦係数を$\mu_s$ とすると揚力 $L$ を加味して

$$F=\mu_s\left(W\cos\theta-L\right) \quad \cdots\text{④}$$

$$L = C_L \frac{\rho U^2}{2} A \quad \cdots⑤$$

となる。式② ～④を式①に代入して整理すると

$$\frac{U^2}{(\sigma/\rho - 1)gD} = \frac{4}{3}\frac{\mu_s - \tan\theta}{C_p + \mu_s C_L}\cos\theta \quad \cdots⑥$$

となる。

## 8-2

### 予習

1.　省略

### 演習問題　A

#### 8-2-A1

省略

### 演習問題　B

#### 8-2-B1

円柱の微少高さ $dz$ に働く流体力 $dF$ としては形状抵抗 $D_p$ と流体の加速度に起因する流体力（式 8-37）が合力として働く。

$$dF = C_p \frac{\rho |U| U}{2} L dz + C_{M2} \rho \frac{dU}{dt} \frac{\pi L^2}{4} dz \quad \cdots①$$

一方，微少振幅波理論によると，水粒子の流速 $U$ は式②で表される。

$$U = \frac{H\omega}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t) = u_m \cos(kx - \omega t) \quad \cdots②$$

また式② を時間 $t$ で微分（ここでは $x$ も変数なので偏微分となる）すると

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \omega u_m \sin(kx - \omega t) \quad \cdots③$$

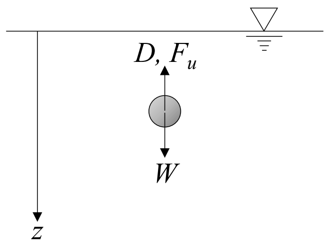
となるから，式②，③ を式① に代入して整理すると

$$dF = C_p \frac{\rho u_m^2}{2} |\cos(kx - \omega t)| \cos(kx - \omega t) L dz + C_{M2} \rho \frac{\pi L^2}{4} \omega u_m \sin(kx - \omega t) dz \quad \cdots④$$

となる。

#### 8-2-B2

下図のように砂粒には重力 $W$，形状抵抗 $D$，非定常に起因する流体力 $D_u$ が作用する。なお静水中での運動を考えているので $D_u$ としては式 8-34 のみを考えれば良い。




鉛直下向きを正とすると砂粒についての運動方程式は式① のようになる。

$$\sigma V \frac{dw}{dt} = W - D - F_u = \rho\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) gV - C_p \frac{\rho w^2}{2} A - C_{M1} \rho V \frac{dw}{dt} \quad \cdots\cdots ①$$

よって

$$\rho\left(\frac{\sigma}{\rho} + C_{M1}\right) V \frac{dw}{dt} = W - D - F_u = \rho\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) gV - C_p \frac{\rho w^2}{2} A \quad \cdots\cdots ①'$$

となる。ここに， $A$ は球の断面積（$= \pi D^2/4$）である。最終沈降速度 $w_0$ は砂粒に働く力が釣り合って加速度が 0 となる際の速度であるから，式①'で最左辺をゼロと置き，抗力係数としてストークスの抵抗法則（$24/R_e$）を用いると

$$0 = \rho\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g \frac{\pi D^3}{6} - \frac{24}{R_e} \frac{\rho w_0^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

となる。$R_e = w_0 D/\nu$ より，$w_0$ は式③ で算出することができる。

$$w_0 = \rho\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) D^2 g \Big/ 18\nu \quad \cdots\cdots ③$$