「流体力学」　第 3 章　問題の解答

３－１　ドリル問題

問題１　x 方向のみの流れの場合の速度を u，時間を t とした場合の流れの x 方向の加速度 Du/Dt を示せ。

略解

式 3-7 より

$$\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}$$

（答）

問題２　$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ で表される流体の加速度の物理的な意味を述べ，何と呼ばれるのか示せ。

略解：場所を固定した状態で，経過時間による速度の時間的変化によって生じる加速度で，これを局所加速度という。　（答）

問題３　$u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ で表される流体の加速度の物理的な意味を述べ，何と呼ばれるのか示せ。

略解：時間が一定で，場所の変化による速度の変化の割合である加速度で，対流加速度と言う。

問題４　x 方向のみの流れの場合，ある流体粒子を追いかけた時のその流体粒子の密度の時間的変化を書け。

略解

式 3-8 より

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

（答）

問題５　質量流量と体積流量の単位を書け。

略解：質量流量の単位は kg/s で体積流量の単位は m^3/s である。

（答）

問題６　図 3-8 に示すように流体が円管内を 60.0L/min で流れている。管の内径が 2.5cm の時の平均速度を求めよ。

略解

平均速度 u_m は，流量 Q を管路断面積 A で割ったものであるから，

$$u_m=Q/A=Q/(\frac{\pi}{4}d^2)=(60.0\times10^{-3}/60)\mathrm{m^3/s}/\left(\frac{\pi}{4}2.5^2\times10^{-4}\mathrm{m^2}\right)=2.0\mathrm{m}\ /$$

問題７　図 3-8 に示すように流体が円管内を平均流速 0.30m/s で流れている。管の内径が 4.0cm の時の流量を求めよ。

略解

流量 Q は，平均速度 u_m に管路断面積 A を乗じたものであるから，

$$Q = u_m A = u_m \frac{\pi}{4} d^2 = 0.30\mathrm{m/s} \times \frac{\pi}{4} 0.040^2 \mathrm{m}^2 = 3.8 \times 10^{-4} \mathrm{m^3/s}$$

さらに，数値を大きくするために，毎分リットルの単位に変換すると，1m³=1000L であるから

$$3.8 \times 10^{-4} \mathrm{m^3/s} = 3.8 \times 10^{-4} \times 1000 \times 60 = 23 \mathrm{L/min}$$ （答）

問題８　図 3-8 に示すように，20℃（1 気圧）で平均流速が 3.0m/s の水が円管内を流れている。円管の内径が 5.0cm の時の体積流量と質量流量を求めよ。

略解：表 1−9 より，水の密度は 998.204kg/m³ である。

式 3−9 より体積流量 Q は，

$$Q = A \times u_m = \frac{\pi}{4} d^2 \times u_m = \frac{\pi}{4} \left(5 \times 10^{-2} \mathrm{m}\right)^2 \times 3\mathrm{m/s} = 0.0059 \mathrm{m^3/s}$$ （答）

となる。次に質量流量 m は，体積流量に密度をかければよいので，

$$m = Q \times \rho = 0.0059 \mathrm{m^3/s} \times 998.204 kg/\mathrm{m}^3 = 5.9 \mathrm{kg/s}$$ （答）

となる。

問題９　図 3-9 に示すような内径が d_1=40.0mm,d_2=80.0mm の拡大管路を，流体が流れている。断面 1 での平均速度が 10m/s の時，断面２での平均流速を求めよ。

略解

断面 1 と２の流量は等しいから，平均速度を u_m，流量 Q および管路断面積 A とし，それぞれの断面の位置を添え字１および２で表すと，

$$Q = u_{m1}\left(\frac{\pi}{4} d_1^2\right) = u_{m2}\left(\frac{\pi}{4} d_2^2\right)$$ となり

$$u_{m2} = u_{m1}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 10\mathrm{m/s} \times \left(\frac{40}{80}\right)^2 = 2.5\mathrm{m/s}$$ （答）

問題 10　図 3-9 に示す拡大管路を，流体が流量 Q=0.50m³/min で流れている。断面１，２での内径が d_1=40.0mm,d_2=60.0mm である時，断面１，２での平均流速を求めよ。

略解

平均速度 u_m は，流量 Q を管路断面積 A で割ったものであるから，断面 1 での平均流速 u_{m1} は

$$u_{m1} = Q / A_1 = Q / \left(\frac{\pi}{4} d_1^2\right) = \left(0.50 \times \frac{1}{60} \mathrm{m^3/s}\right) \Big/ \left\{\frac{\pi}{4} \times \left(40.0 \times 10^{-3}\right)^2 \mathrm{m}^2\right\}$$

$$= 6.63\mathrm{m/s}$$

となる。　（答）

同様に，断面２では，

$$u_{m2} = Q / A_2 = Q \Big/ \left(\frac{\pi}{4} d_2^{\ 2} \right) = \left(0.50 \times \frac{1}{60} \mathrm{m^3/s} \right) \Big/ \left\{ \frac{\pi}{4} \times \left(60.0 \times 10^{-3} \right)^2 \mathrm{m^2} \right\}$$
$$= 2.95 \mathrm{m/s}$$

（答）

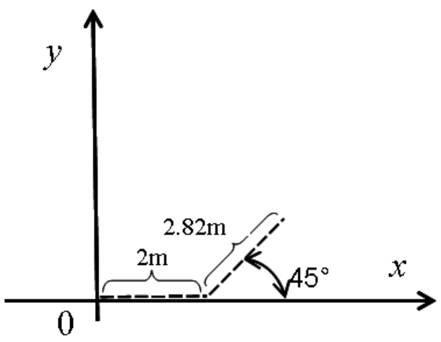
となる。

３－２　ドリル問題

問題１　二次元流れを考える。速度 1.41m/s の風が時刻零から，x 軸正方向から反時計回りに 45°方向に 2 秒間吹いた。その後，x 軸正方向に 2m/s の風が 1 秒間吹いた。時刻零から，原点からの流脈を破線で描け。

略解

原点からの流脈を破線で図に示す。



問題２　円管内の流れなどは，レイノルズ数によって二つの流れに分けられる。その二つとは何か。

略解：層流と乱流である。　　　　　　　　　　　　（答）

問題３　レイノルズ数の物理的な意味を述べよ。

略解：慣性力と粘性力の比である。　　　　　　　　（答）

問題４　30℃の水が内径 20.0㎜ の円管内を流れる時の臨界速度を求めよ。代表長さを内径とせよ。

略解

水の場合の動粘度 ν は，表 1-9 より 0.8008㎜^{2}/s である。臨界レイノルズ数を R_{ec} (=2300) とすると式 3-16 より臨界速度 U_c は，

$$U_c = \frac{R_{ec} \nu}{L} = \frac{2300 \times 0.8008 \times 10^{-6} \mathrm{m^2/s}}{20.0 \times 10^{-3} \mathrm{m}} = 0.0921 \mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

となる。

問題５　温度 30℃，圧力 101.3kPa の空気が内径 20.0㎜ の円管内を流れる時の臨界速度を求めよ。代表長さを内径とせよ。

略解

空気の場合の動粘度 ν は，表 1-10 より 16.08mm^2/s である。臨界レイノルズ数を R_{ec} とすると式 3-16 より臨界速度 U_c は，

$$U_c = \frac{R_{ec}\nu}{L} = \frac{2300 \times 16.08 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}}{20.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 1.85\mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

となる。

問題６　二次元流れでの流線の方程式を書け。ただし，x および y 方向の速度成分を u，v とする。

略解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v}{u}$　　（答）

である。

問題７　x および y 方向速度成分 u および v が次式で与えられる場合の流線を求めよ。ただし，A は定数である。

$u = Ay$,　$v = -Ax$

略解

流線の方程式は，式 3-12 で与えられるから，上式を代入すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{-Ax}{Ay} = -\frac{x}{y}, \quad \text{よって} \quad ydy = -xdx$$

となる。これを積分すると，

$y^2 = -x^2 + C$ から $x^2 + y^2 = C$ となり，流線は円になる。ただし，C は積分定数である。

（答）

問題８　直径 7.50cm の野球のボールが 40.0m/s(144km/h)の速度で空気中を飛ぶ場合のレイノルズ数を求めよ。圧力は 101.3kPa，温度は 20℃とし，表 1-10 を使用せよ。

略解

表 1-10 より，動粘度 ν は，15.15㎜^{2}/s である。球の直径を代表長さ，球の速度を代表速度にすると，レイノルズ数は式 3-15 より，

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{40.0\mathrm{m/s} \times 7.50 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{15.15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 1.98 \times 10^5 \qquad \text{（答）}$$

となる。

問題９　直径 20.0cm のバレーボールが 15.0m/s(54.0km/h)の速度で空気中を飛ぶ場合のレイノルズ数を求めよ。圧力は 101.3kPa，温度は 20℃とし，表 1-10 を使用せよ。

略解

表 1-10 より，動粘度 ν は，15.15㎜^{2}/s である。球の直径を代表長さ，球の速度を代表速度にすると，レイノルズ数は式 3-15 より，

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{15.0\mathrm{m/s} \times 20.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{15.15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 1.98 \times 10^5$$ （答）

となる。これは，前問の野球のボールの場合のレイノルズ数と同じである。

問題 10　1 気圧，20℃の空気中を 1.0m/s（代表速度）で飛ぶ長さ 10cm（代表長さ）の飛行体の流れの可視化（観察）実験を同温度の水中で行いたい。同じ大きさの飛行体を使って，レイノルズ数を同じにして実験を行うには，水の速度をどのくらいしたらよいか。

略解：表 1-10 より空気の動粘度は ν ＝15.15mm²/s であるから，空気中でのレイノルズ数は，

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{1.0\mathrm{m/s} \times 10.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{15.15 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}} = 6.6 \times 10^3$$

である。水中での実験のレイノルズ数を同じにするための水の速度は，表 1-9 より水の動粘度は ν ＝1.0038mm²/s であるから

$$\frac{\mathrm{Re}\,\nu}{L} = \frac{6.6 \times 10^3 \times 1.0038 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}}{10 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 0.066\mathrm{m/s} = 6.6\mathrm{cm/s}$$ （答）

となり，空気中に比べ速度を約 1/15 に小さくした実験ができる。

３－３　ドリル問題

問題１　非圧縮性流れの定義を書け。

略解：非圧縮性流れとは，ある流体粒子を追いかけた場合にその密度が変化しないことを意味する。従って，密度の実質微分が零ということであり，式 3-21 から

$$\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + q\frac{\partial \rho}{\partial s} = 0$$

である。　（答）

問題２　流量を Q，管路断面積を A，平均速度を q とした時の連続の式を示せ。

略解：式 3-22 より，

$$Q = qA = \mathrm{const.}$$ （答）

問題３　内径 d が 10cm の円管内を平均速度 2.0m/s で水が流れている。流量を求めよ。

略解

式 3-22 より，流量 Q は平均流速 q かける流路断面積 A であるから，

$$Q = q \times \frac{\pi}{4} \times d^2 = 2.0\mathrm{m/s} \times \frac{\pi}{4} \times (10 \times 0.01\mathrm{m})^2 \cong 0.016\mathrm{m^3/s}$$

となる。　（答）

問題４　図 3-22 に示すような急縮小管内を 0.010m³/s の流量で水が流れている。上流の管内径 d_1 が 100mm，下流の管内径 d_2 が 50mm のときの上流と下流の平均流速を求めよ。

略解

平均速度に流路断面積をかけたものが流量であるから，上流と下流の平均速度を u_1，u_2 とすると，次のようになる。

$$u_1 \text{m/s} \times \frac{\pi}{4}(100 \times 10^{-3}\text{m})^2 = 0.010\text{m}^3/\text{s}, \quad u_1 = 0.010 \times \frac{4}{\pi} \times 100 \cong 1.3\text{m/s}$$

$$u_2 \text{m/s} \times \frac{\pi}{4}(50 \times 10^{-3}\text{m})^2 = 0.010\text{m}^3/\text{s}, \quad u_2 = 0.010 \times \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{0.05^2} \cong 5.1\text{m/s}$$ （答）

問題５　図 3-23 に示すような急拡大管内の流れで, 細い管から太い管へ内径が２倍になると，速度はどうなるか。

略解：流路面積が４倍になるので速度は 1/4 になる。（答）

問題６　図 3-23 に示すような急拡大管内を 0.030m³/s の流量で水が流れている。上流１における平均速度は 2.0m/s であり，下流２における平均流速は 1.0m/s であった。上流と下流の管の内径を求めよ。

略解

平均速度に流路断面積をかけたものが流量であるから，上流の管内径を d_1 とし，下流の管内径を d_2 とすると，

$$2.0\text{m/s} \times \frac{\pi}{4} d_1^2 = 0.030\text{m}^3/\text{s}, \quad d_1 = \sqrt{\frac{0.030 \times 2}{\pi}} \cong 0.14\text{m} = 14\text{cm}$$

$$1.0\text{m/s} \times \frac{\pi}{4} d_2^2 = 0.030\text{m}^3/\text{s}, \quad d_2 = \sqrt{\frac{0.030 \times 4}{\pi}} \cong 0.20\text{m} = 20\text{cm}$$ （答）

問題７　重力を考慮した場合のオイラーの運動方程式を示し，各々の項の意味を述べよ。

ただし，流線方向の座標を s，流線方向の速度を q，時間を t，鉛直上方向の座標を z，p を圧力，ρ を密度，g を重力加速度にする。

略解：

式 3-26 より

$$\underbrace{\frac{\partial q}{\partial t}}_{\text{局所加速度}} + \underbrace{q\frac{\partial q}{\partial s}}_{\text{対流加速度}} = \underbrace{-g\frac{\partial z}{\partial s}}_{\text{単位質量当たりの重力による力}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}}_{\text{単位質量当たりの圧力による力}}$$ （答）

問題８　圧力が座標 x,y の関数で $p = p(x, y)$ の時，y 座標は同じで $x+dx$ での圧力 $p = p(x+dx, y)$ を求めよ。

略解：テイラー級数展開より，$p(x+dx, y) = p + \dfrac{\partial p}{\partial x}dx$

である。

問題９　流体の加速度(Dq/Dt)は，流線方向の座標を s，流線方向の速度を q，時間を t とすると次式（式 3-23）のようになる。

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + q\frac{\partial q}{\partial s}$$

定常流れの場合にはどのようになるか。

略解：場所を固定して時間的な速度の変化が無いので，$\dfrac{\partial q}{\partial t}=0$ であるから，

$\dfrac{Dq}{Dt}=q\dfrac{\partial q}{\partial s}$ となる。　（答）

問題 10　ある円管の入り口の圧力が 100kPa で 1m はなれた出口の圧力 p が 10kPa で時間的に一定であり，圧力は直線的に減少している。$\dfrac{\partial p}{\partial s}$ を求めよ。ただし，流れ方向の座標を s とする。

略解：$\dfrac{\partial p}{\partial s}=\dfrac{(10-100)\mathrm{kPa}}{1\mathrm{m}}=-90\mathrm{kPa/m}$　（答）

３－４　ドリル問題

問題１　二次元非圧縮性流れの連続の式を書きなさい。x および y 方向の速度成分を u,v とする。

略解：

式３－３６より

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

（答）

問題２　次式で与えられる速度成分を持つ流れは，連続の式を満たすか調べよ。ただし，A は定数である。

$$u=\frac{Ay}{x^2+y^2},\quad v=-\frac{Ax}{x^2+y^2}$$

略解：式 3-36 より

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-Ay\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{Ax\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

（答）

となり，満たしている。

問題３　x および y 方向の速度成分 u,v が，次式で与えられている。x および y 方向の加速度を求めよ。ただし，A は定数である。

$$u=\frac{Ax}{x^2+y^2},\quad v=\frac{Ay}{x^2+y^2}$$

略解：

x 方向の加速度は式 3-39 から次のようになる。

$$\frac{Du}{Dt} \equiv u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{Ax}{x^2+y^2}\frac{A\left(x^2+y^2\right) - Ax\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$+\frac{Ay}{x^2+y^2}\frac{Ax(-2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{A^2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

y 方向の加速度は式 3-40 から次のようになる。

$$\frac{Dv}{Dt} \equiv u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{Ax}{x^2+y^2}\frac{-Ay\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$+\frac{Ay}{x^2+y^2}\frac{A\left(x^2+y^2\right) - Ay\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{A^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

問題４　x 方向のオイラーの運動方程式を書き，各々の項の意味を述べよ。ただし，x および y 方向の速度成分を u,v とし，t を時間，p を圧力，ρ を密度，X は単位質量に働く x 方向の質量力とする。

略解：式 3-42 より

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{x\text{方向の局所加速度}} + \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{x\text{方向の対流加速度}} = \underbrace{X}_{\substack{\text{単位質量に働く}\\ x\text{方向の質量力}}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\substack{\text{単位質量に働く}\\ \text{圧力による}x\text{方向の力}}}$$

（答）

となる。

問題５　質量力としてどんな力があるか。

略解：重力　（答）

問題６　二次元の非粘性流れを解く場合，オイラーの運動方程式の他にどんな方程式が必要か。また，その時の未知数は何か。

略解：必要な方程式は連続の式で未知数は，圧力 p と x および y 方向の速度成分 u,v である。方程式は三つで，未知数も 3 つであるから原理的に解ける。（答）

問題７　圧力 p は，座標 x,y および時間 t の関数である。したがって，$p= p(x,y,t)$ と表すことができる。場所を固定した場合，p の △t 時間後の変化量を△p とし，テイラー級数展開より高次の項を省略して p＋△p を求めよ。

略解：

$$p(x,y,t) + \Delta p = p(x,y,t+\Delta t) = p(x,y,t+\Delta t) \fallingdotseq p(x,y,t) + \frac{\partial p}{\partial t}\Delta t$$

（答）

問題８　圧力 p は，座標 x,y および時間 t の関数である。したがって，$p= p(x,y,t)$ と表す

ことができる。時間と座標 x を一定にした場合，p の △y 時離れた場所での変化量を△p とし，テイラー級数展開より高次の項を省略して p＋△p を求めよ。

略解：

$$p(x,y,t)+\Delta p = p(x,y+\Delta y,t) = p(x,y+\Delta y,t) \fallingdotseq p(x,y,t)+\frac{\partial p}{\partial y}\Delta y$$

（答）

問題９　x 方向のみに流れている時，質量力を省略したオイラーの x 方向の運動方程式から考えて，圧力降下 $\frac{\partial p}{\partial x}$ が一定の場合どのようになるか。

略解：式３－４２から加速度が一定で速度が無限に大きくなる。

（答）

問題 10　実際，ドリル問題９の解答のようなことはおこらないがなぜか。

略解：流れを妨げようとする粘性力などの抵抗力が存在するから。

（答）

３章演習問題

１．x および y 方向の速度成分 u,v が，次式で与えられている。x および y 方向の加速度を求めよ。

$$u=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}，\quad v=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

解：

x 方向の加速度は式 3-39 から次のようになる。

$$\frac{Du}{Dt}\equiv u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\frac{2x\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)2\left(x^2+y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$
$$+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\frac{-2y\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)2\left(x^2+y^2\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)^4}=-\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

（答）

y 方向の加速度は式 3-40 から次のようになる。

$$\frac{Dv}{Dt}\equiv u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\frac{2y\left(x^2+y^2\right)^2-2xy\cdot 2\left(x^2+y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$
$$+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\frac{2x\left(x^2+y^2\right)^2-2xy\cdot 2\left(x^2+y^2\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)^4}=-\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

（答）

２．次式で与えられる速度場は，連続の式を満たすか調べよ。

$$u=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad v=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

略解：

式 3-36 より

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)2\left(x^2+y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^4}+\frac{2x\left(x^2+y^2\right)^2-2xy2\left(x^2+y^2\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left\{2x\left(x^2+y^2\right)-4x\left(x^2-y^2\right)\right\}}{\left(x^2+y^2\right)^4}+\frac{\left(x^2+y^2\right)\left\{2x\left(x^2+y^2\right)-8xy^2\right\}}{\left(x^2+y^2\right)^4}=0$$

となり満たす。　　　　　　　　　　　　　　　　（答）

３．x および y 方向速度成分 u および v が次式で与えられる場合の流線を求めよ。ただし，x および y は正とし，A は定数である。

$$u=\frac{Ax}{x^2+y^2},\quad v=\frac{Ay}{x^2+y^2}$$

略解

流線の方程式は，式 3-12 で与えられるから，上式を代入すると

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{v}{u}=\dfrac{y}{x},\quad \therefore \dfrac{1}{y}dy=\dfrac{1}{x}dx$ となり，積分をすると

$\ln|y|=\ln|x|+C_1 \quad \therefore y=\pm C_2 x$ の直線になる。ただし，C_1，C_2 は積分定数である。

（答）

４．1 気圧，20℃の空気中を 10cm/s で飛ぶ長さ 1m の飛行体の流れの可視化（観察）実験を同温度で水中で行いたい。同じ速度で，レイノルズ数を同じにして実験を行うには，飛行体の大きさをどのくらいしたらよいか。ただし，空気の動粘度は，15.15×10^{-6}m^2/s とし，水の動粘度を 1.0×10^{-6}m^2/s とする。

略解：空気中でのレイノルズ数は，式 3-15 より

$$Re=\frac{UL}{\nu}=\frac{0.1\mathrm{m/s}\times 1\mathrm{m}}{15.15\times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}}=6.6\times 10^3$$

である。水中での実験のレイノルズ数を同じにするための飛行体の大きさは，

$$\frac{\mathrm{Re}\,\nu}{U}=\frac{6.6\times 10^3\times 1.0\times 10^{-6}\mathrm{m^2/s}}{10\times 10^{-2}\mathrm{m/s}}=0.066\mathrm{m}=6.6\mathrm{cm}$$

となる。

５．オイラーの運動方程式に関して以下の問いに答えよ。

(a) オイラーの運動方程式で，考慮されている力は何か。考慮されていない力は何か。

(b) 二次元定常流れで x 方向に流れている場合において，二次元のオイラーの運動方程式（式 3-42 および 3-43）を簡略化せよ。質量力は省略する。

略解

(a) 圧力による力と重力などの質量力は考慮されている。せん断力は考慮されていない。

（答）

（b）式 3-42 および 3-43 において，$\dfrac{\partial}{\partial t}=0, v=0$ とおくと

$u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}$，$0=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}$ となる。（答）

６．図 3-23 に示すような管内を 0.018㎥/s の流量で水が流れている。上流の管内径 d_1 が 60mm，下流の管内径 d_2 が 90mm のときの上流と下流の平均流速を求めよ。

略解

平均速度に流路断面積をかけたものが流量であるから，上流と下流の平均速度を u_1，u_2 とすると，次のようになる。

$$u_1\mathrm{m/s}\times\frac{\pi}{4}(60\times10^{-3}\mathrm{m})^2=0.018\mathrm{m^3/s},\quad u_1=0.018\times\frac{4}{\pi}\times\frac{10^6}{3600}\cong6.4\mathrm{m/s}$$ （答）

$$u_2\mathrm{m/s}\times\frac{\pi}{4}(90\times10^{-3}\mathrm{m})^2=0.018\mathrm{m^3/s},\quad u_2=0.018\times\frac{4}{\pi}\times\frac{10^6}{8100}\cong2.8\mathrm{m/s}$$ （答）

３章ワークシート問題

１．図 3-22 に示すような管内を 0.015㎥/s の流量で水が流れている。上流の管内径 d_1 が 100mm，下流の管内径 d_2 が 80mm のときの上流と下流の平均流速を求めよ。

略解

平均速度に流路断面積をかけたものが流量であるから，上流と下流の平均速度を u_1，u_2 とすると，次のようになる。

$$u_1\mathrm{m/s}\times\frac{\pi}{4}(100\times10^{-3}\mathrm{m})^2=0.015\mathrm{m^3/s},\quad u_1=0.015\times\frac{4}{\pi}\times100\cong1.9\mathrm{m/s}$$ （答）

$$u_2\mathrm{m/s}\times\frac{\pi}{4}(80\times10^{-3}\mathrm{m})^2=0.015\mathrm{m^3/s},\quad u_2=0.015\times\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{0.08^2}\cong3.0\mathrm{m/s}$$ （答）

２．二次元非粘性非圧縮性流れを解く場合，以下の問いに答えよ。ただし，x および y 方向の速度成分を u,v とし，t を時間，p を圧力，ρ を密度，X,Y は単位質量に働く x,y 方向の質量力とする。

(a)必要な方程式を書きなさい。

(b)未知数は何か。

(c)壁面での境界条件を述べよ。

略解

(a)必要な方程式は，連続の式 3-36 と x および y 方向のオイラーの運動方程式(3-42,3-43)である。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (3\text{-}36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (3\text{-}42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (3\text{−}43) \qquad （答）$$

(b)　未知数は，x および y 方向の速度成分を u,v と，圧力 p の三つである。（答）

(c)壁面での境界条件は，壁面上での速度の壁面に対して垂直方向の成分と，壁面の移動速度の垂直方向成分との相対速度が 0 である。静止した壁面の場合，壁面上での速度の壁面に対して垂直方向の成分が 0 である。

３．水が内径 15.0㎜の円管内を流れている。乱流と層流の境目の速度（臨界速度）を求めよ。動粘度 ν は，1.0㎜^{2}/s とする。

略解

臨界レイノルズ数を R_{ec} (=2300)とすると式 3−16 より臨界速度 U_c は,

$$U_c=\frac{R_{ec}\nu}{L}=\frac{2300\times1.0\times10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}}{15.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}=0.15\mathrm{m/s}=15\mathrm{cm/s} \qquad （答）$$

となる。

４．二次元流れを考える。速度 1m/s の風が y 軸の正方向に時刻 0 から 2 秒間吹いた。次に急に風向きが変わり, 速度 1.414m/s で y 軸正方向から反時計回りに 45°方向に 1 秒間吹いた。さらに，x 軸負方向に 2m/s の風が 1 秒間吹いた。

1)それぞれの三つの時間帯での流線を 3 本ずつ描きなさい。

2)時刻 0 から原点から流れ出た流体粒子の流跡を描きなさい。

3)時刻 0 からの原点からの流脈を描きなさい。

略解

1)それぞれの時刻の流線を破線で図 1 に示す。　　　　（答）

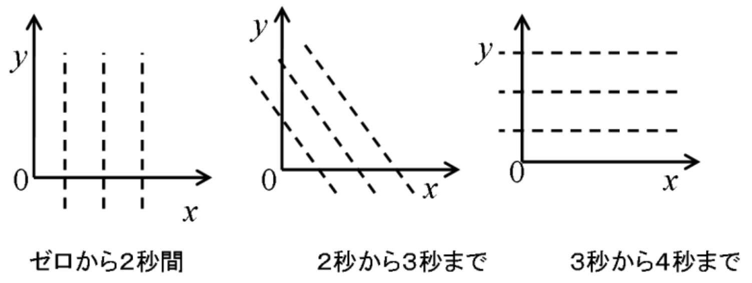


図 1

2)原点を時刻 0 に流れ出た流跡を破線で図 2 に示す。　　（答）

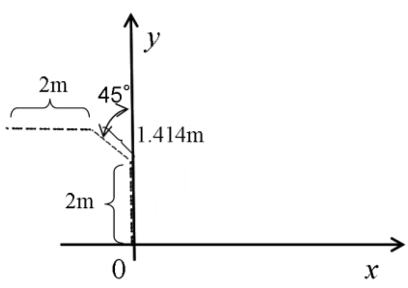


図 2

3)原点からの流脈を破線で図 3 に示す。　　　　　　　　（答）

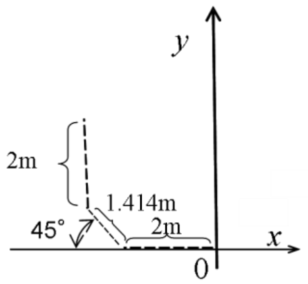


図３

５．x および y 方向の速度成分 u,v が，次式で与えられている。連続の式を満たすか調べよ。ただし，A は定数である。

$$u=\frac{Ax}{x^2+y^2},\quad v=\frac{Ay}{x^2+y^2}$$

略解：

式 3-36 より連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{A\left(x^2+y^2\right)-Ax\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{A\left(x^2+y^2\right)-Ay\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

となり満たす。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（答）

６．次式で与えられる速度成分を持つ流れの流線を求めよ。ただし, A は定数である。

$$u=\frac{Ay}{x^2+y^2},\quad v=-\frac{Ax}{x^2+y^2}$$

略解

略解

流線の方程式は，式 3−12 で与えられるから，上式を代入すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}=-\frac{x}{y},\quad \therefore ydy=-x\,dx$$ となり，積分をすると

$x^2+y^2=C^2$ 　　となる。ここで C は積分定数である。従って，流線は半径が C の多くの円になる。　　　　　　（答）