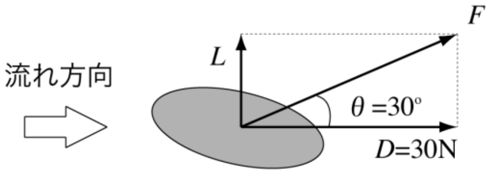
「流体力学」　第７章　問題の解答

７－１　ドリル問題

問題１　一様な空気流に置かれた物体に作用する流体力の方向が流れ方向と $\theta=30°$ の角度をなしていることがわかっている．抗力が D=30N であるとき揚力 L と流体力 F を求めよ．

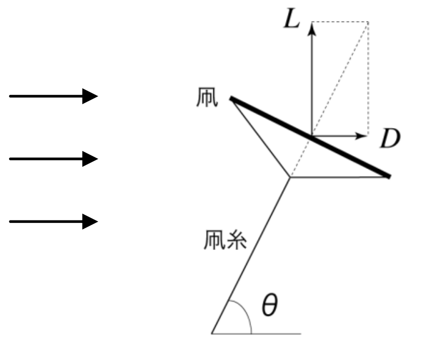


【略解】

$$L = D\tan\theta = 30\times\frac{1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} = 17.3\text{N}$$

$$F = \frac{D}{\cos\theta} = 30\times\frac{2}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} = 34.6\text{N}$$　　※ $F=\sqrt{D^2+L^2}$ で求めてもよい

問題２　河原で凧揚げを行った．凧糸がたるまずに水平方向と $\theta=60°$ の角度をなした状態で凧が上空に静止した．このとき，凧に作用している抗力 D と揚力 L の比を求めよ．

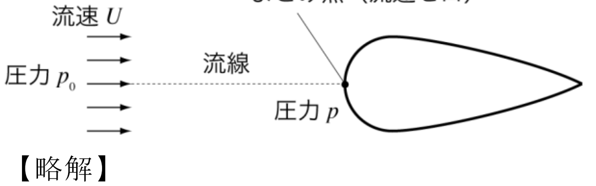


【略解】

流体力と抗力のなす角が $\theta=60°$ となるので，抗力と揚力の比は $\tan\theta$ となる．

$$\frac{L}{D} = \tan\theta = \tan 60° = \sqrt{3} = 1.7$$

問題３　流れに置かれた物体の前方には流速がゼロとなる「よどみ点」が存在する．物体の上流で圧力 p_0=101.3kPa，流速 U=60m/s のときのよどみ点の圧力 p を求めよ．流れは水平方向であるとし，流体の密度を $\rho=1.2\text{kg/m}^3$ とする．



【略解】

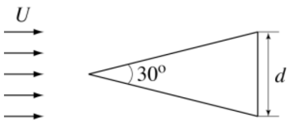
ベルヌーイの定理により上流とよどみ点との間に次の関係が成り立つ．

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = p$$

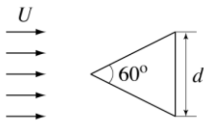
よって，よどみ点圧力は次のように求められる．

$$p = 101.3 + \frac{1}{2} \times 1.2 \times (60)^2 \times 10^{-3} = 101.3 + 2.16 = 103.5\mathrm{kPa}$$

問題４　底面の直径が d=30mm の円錐物体が流速 U=5.0m/s の空気流（密度 ρ ＝1.2kg/m^3）から受ける抗力を求めよ．ただし，(a) の場合の抗力係数は C_D=0.34，(b)の場合の抗力係数は C_D=0.51 である．また，同一の流速において(a)と(b)の場合の抗力が等しくなるためには，(b)の円錐底面の直径を(a)の何倍にすればよいか計算せよ．



(a) $C_D = 0.34$



(b) $C_D = 0.51$

【略解】

流れ方向投影面積 S は次のように求められる．

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times \left(30 \times 10^{-3}\right)^2}{4} = 7.07 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$

よって，抗力は次のように計算できる．

(a)　$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.34 \times \frac{1.2 \times 5.0^2 \times \left(7.07 \times 10^{-4}\right)}{2} = 36.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

(b)　$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.51 \times \frac{1.2 \times 5.0^2 \times \left(7.07 \times 10^{-4}\right)}{2} = 54.1 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

また，等しくなるためには次の関係が成り立てばよい（添え字は(a)と(b)を表している）

$$C_{D(a)} \left(\frac{\pi d_{(a)}{}^2}{4} \right) \frac{\rho U^2}{2} = C_{D(b)} \left(\frac{\pi d_{(b)}{}^2}{4} \right) \frac{\rho U^2}{2}$$

よって，次のように(b)の円錐の半径を(a)の 0.82 倍にすればよいことがわかる．

$$\frac{d_{(b)}}{d_{(a)}} = \sqrt{\frac{C_{D(a)}}{C_{D(b)}}} = \sqrt{\frac{0.34}{0.51}} = 0.82$$

問題５　流れ方向投影面積が S=0.01m^2，抗力係数が C_D=0.48 の物体を一様な水流中に置いて，抗力を測定したところ D=60N であった．このとき流速を求めよ．また，この流速と等しい速度をもつ空気流で同様の実験を行うと,抗力 D がいくらになるか計算せよ．ただし，水の密度は ρ_w＝1000kg/m^3，空気の密度は ρ_a＝1.2kg/m^3 とする．

【略解】

抗力の計算式を流速について整理し，値を代入すればよい．

$$U = \sqrt{\frac{2D}{C_D \rho_w S}} = \sqrt{\frac{2 \times 60}{0.48 \times 1000 \times 0.01}} = 5.0\mathrm{m/s}$$

また，空気の場合については，次のように計算できる．

$$D = C_D \frac{\rho_{\mathrm{a}} U^2 S}{2} = 0.48 \times \frac{1.2 \times 5.0^2 \times 0.01}{2} = 7.2 \times 10^{-2}\,\mathrm{N}$$

問題６　上部投影面積が S=1.0m^2 の板状物体を流速 U=10.0m/s の空気流の中に設置し揚力を測定したところ，L=39N であった．上部投影面積を基準とする揚力係数 C_L を求めよ．次に，流速を増加させたところ揚力が 1.5 倍になった．このときの流速 U を求めよ．ただし，空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3 とする．

【解答】

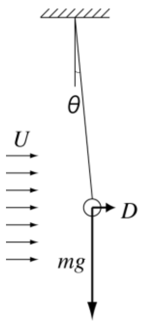
揚力の計算式から次のように揚力係数を求めることができる．

$$C_L = \frac{2L}{\rho U^2 S} = \frac{2 \times 39}{1.2 \times 10.0^2 \times 1.0} = 0.65$$

揚力が 1.5 倍になったときの流速は次のように求められる．

$$U = \sqrt{\frac{2(1.5 \times L)}{C_L \rho S}} = \sqrt{\frac{2(1.5 \times 39)}{0.65 \times 1.2 \times 1}} = \sqrt{150} = 12\mathrm{m/s}$$

問題７　図のように糸に吊るした直径 d=50mm，質量 m=25g の球に水平方向の空気流（密度ρ ＝1.2kg/m^3）を流速 U=10.0m/s で当てたところ鉛直方向に対して θ の角度をなして釣り合いの状態になった．抗力 D と角度 θ を求めよ．ただし，球の抗力係数は C_D=0.40 とし，重力加速度は g=9.8m/s^2 とする．



【略解】

流れ方向投影面積 S は次のように計算できる．

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times \left(50 \times 10^{-3}\right)^2}{4} = 1.96 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

球に作用する重力 W は次のようになる．

$$W = mg = 0.025 \times 9.8 = 0.245\mathrm{N}$$

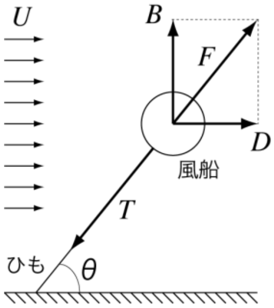
抗力は次のように計算できる．

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.4 \times \frac{1.2 \times 10^2 \times 1.96 \times 10^{-3}}{2} = 0.047\mathrm{N}$$

よって，角度は次のように計算できる．

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D}{W}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.047}{0.245}\right) = 11^{\mathrm{o}}$$

問題８　空気よりも軽いヘリウムガスを充填した直径 d=30cm の球形の風船にひもを付けて床に固定した．これに一様な風を当てたところ抗力を受けて，ひもが水平方向から θ ＝ 50° の角度をなした状態で静止した．ひものたるみは無く，風船の質量は無視できるとして，風速 U およびロープの張力 T を求めよ．なお，空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3，重力加速度は g=9.8m/s^2 とし，風船の抗力係数は C_D=0.40 とする．



【略解】

風船の体積 V は次のように計算できる．

$$V=\frac{\pi d^3}{6}=\frac{\pi\times 0.3^3}{6}=0.0141\mathrm{m}^3$$

よって，浮力 B は次のようになる．

$$B=\rho Vg=1.2\times 0.0141\times 9.8=0.166\mathrm{N}$$

ひもが水平となす角は浮力と抗力の合力が水平となす角に等しくなるので，抗力 D は次のように求められる．

$$D=\frac{B}{\tan\theta}=\frac{0.166}{\tan 50^\circ}=0.139\mathrm{N}$$

流れ方向投影面積 S は

$$S=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi\times 0.3^2}{4}=0.0707\mathrm{m}^2$$

と求められることから，この抗力が発生するときの流速は次のように求められる．

$$U=\sqrt{\frac{2D}{C_D\rho S}}=\sqrt{\frac{2\times 0.139}{0.4\times 1.2\times 0.0707}}=2.9\mathrm{m/s}$$

張力については，浮力と抗力の合力 F とつり合うので，次のように計算できる．

$$T=\sqrt{B^2+D^2}=\sqrt{(0.166)^2+(0.139)^2}=0.22\mathrm{N}$$

７－２　ドリル問題

問題１　理想流体の流れ（ポテンシャル流れ）に関する理論によると，密度 ρ，圧力 p_0，流速 U の一様な流れに置かれた円柱の表面上の速度 v_θ は角度 θ の関数として次のように表される。

$$v_\theta=2U\sin\theta$$

このとき，円柱表面上の圧力 p の分布を表す圧力係数 C_p を求めよ．ただし，位置エネルギ

一の差は無視できる程度であると仮定する.

$$C_p = \frac{p - p_0}{\rho U^2 / 2}$$

また，角度による圧力係数の変化を表すグラフを作成せよ（角度の範囲は 0°～180°とする）.

【略解】

一様な流れである上流と円柱表面上についてベルヌーイの定理を適用すると，次の関係式が得られる.

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{{v_\theta}^2}{2}$$

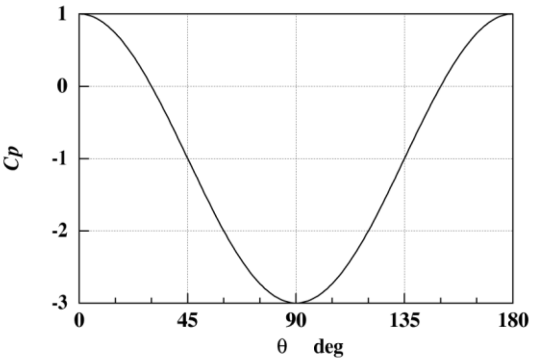
ここで，圧力について整理すると次式が得られる.

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2}\left(U^2 - {v_\theta}^2\right) = \frac{\rho}{2}\left\{U^2 - \left(2U\sin\theta\right)^2\right\} = \frac{\rho U^2}{2}\left(1 - 4\sin^2\theta\right)$$

これを圧力係数の定義式に代入すると圧力係数の分布を表す関係式が得られる.

$$C_p = \frac{p - p_0}{\rho U^2/2} = \frac{2\left(p - p_0\right)}{\rho U^2} = \frac{2}{\rho U^2} \times \frac{\rho U^2}{2}\left(1 - 4\sin^2\theta\right) = 1 - 4\sin^2\theta$$

これを図示すると次のようになる.



（答）

問題２　一様な流速 U=3.2m/s の空気の流れの中に置かれた直径 d=20mm，長さ L=120mm の円柱に作用する力を求めよ．空気の密度を ρ ＝1.2kg/m^3，動粘度を ν ＝16×10^{-6}m^2/s とする．抗力係数は図 7－17 から読み取ればよい.

【略解】

円柱の直径を代表長さとするレイノルズ数を計算すると次のようになる.

$$\mathrm{Re} = \frac{Ud}{\nu} = \frac{3.2 \times 20 \times 10^{-3}}{16 \times 10^{-6}} = 4000$$

図 7－17 から抗力係数 C_Dを求める.

$$C_D = 1$$

流れ方向投影面積 S は次のように計算される.

$$S = d \times L = \left(20 \times 10^{-3}\right) \times \left(120 \times 10^{-3}\right) = 2.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

よって，抗力は次のように計算される．

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 1 \times \frac{1.2 \times 3.2^2 \times \left(2.4 \times 10^{-3}\right)}{2} = 1.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{N}$$

（答）

問題３　流速 U=1.1m/s の川の底に直径 d=400mm の円柱の杭が水流に垂直になるように打ち込んである．水深は h=2.0m である．水流を一様な流れとして杭に作用する抗力を求めよ．水の密度は ρ ＝1000kg/m^3，動粘度を ν ＝1.1×10^{-6}m^2/s とする．抗力係数は図 7－17 から読み取ればよい．

【略解】

円柱の直径を代表長さとするレイノルズ数を計算する．

$$\mathrm{Re} = \frac{Ud}{\nu} = \frac{1.1 \times 400 \times 10^{-3}}{1.1 \times 10^{-6}} = 4.0 \times 10^5$$

図 7－17 から抗力係数 C_Dを求める．

$$C_D = 0.3$$

流れ方向投影面積は次のように計算される．

$$S = d \times h = 0.4 \times 2 = 0.8\mathrm{m}^2$$

よって，抗力は次のように計算される．

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.3 \times \frac{1000 \times 1.1^2 \times 0.8}{2} = 145\mathrm{N}$$　（答）

問題４　プロ野球の投手が投げる球速 U=150km/h のボールに作用する抗力を求めよ．ただし，ボールは直径 d=72mm の球と仮定し，回転は無いとする．抗力係数は図 7－17 あるいは 7－16 から求めよ．空気の密度を ρ ＝1.2kg/m^3，動粘度を ν ＝15×10^{-6}m^2/s とする．

【略解】

ボールの直径を代表長さとするレイノルズ数を計算する．

$$\mathrm{Re} = \frac{Ud}{\nu} = \frac{150 \times \frac{1000}{3600} \times 72 \times 10^{-3}}{15 \times 10^{-6}} = 2.0 \times 10^5$$

図 7－17 あるいは 7－16 から抗力係数を読み取る．

$$C_D = 0.4$$

流れ方向投影面積は次のように計算できる．

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times \left(72 \times 10^{-3}\right)^2}{4} = 4.07 \times 10^{-3}\mathrm{m}^2$$

よって，ボールに作用する抗力は次のように求められる．

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.4 \times \frac{1.2 \times \left(150 \times \frac{1000}{3600}\right)^2 \times 4.07 \times 10^{-3}}{2} = 1.7\mathrm{N}$$　（答）

問題５　ストークスの抵抗法則

密度が ρ の流体の速度 U の一様な流れに置かれた球について，直径 d を代表長さとするレイノルズ数 Re が 1 よりも十分に小さいときには,球に作用する抗力 D が次のように求められることが知られている． μ は流体の粘度である．

$$D = 3\pi\mu Ud$$

このとき，球の抗力係数 C_D が次のようにレイノルズ数 Re の関数として表されることを示せ．

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

【略解】

球に作用する抗力は次のようになる．

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = C_D \frac{\rho U^2}{2}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = C_D \frac{\pi\rho U^2 d^2}{8} = 3\pi\mu Ud$$

これを抗力係数について整理する．

$$C_D = 3\pi\mu Ud \frac{8}{\pi\rho U^2 d^2} = 24\left(\frac{\mu}{\rho Ud}\right)$$

ここで,レイノルズ数 Re の定義から上式の括弧内がレイノルズ数の逆数であることが分かる．

$$\mathrm{Re} = \frac{Ud}{\nu} = \frac{\rho Ud}{\mu}$$

よって，抗力係数は次のように表される．

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$ （答）

問題６　水の流れの中に直径 d=10mm の円柱を置き，円柱の下流の圧力を記録したところ f=100Hz の周波数の変動が見られた．圧力変動の周波数が渦の発生周波数と一致するとして，このときの水の流速 U を求めよ．ただし，ストローハル数は St=0.2 とする．

【解答】

ストローハル数の定義式から流速 U を求めることができる．

$$U = \frac{fd}{St} = \frac{100 \times 10 \times 10^{-3}}{0.2} = 5.0\mathrm{m/s}$$

問題７　流れ方向投影面積が S=1.25m^2,抗力係数が C_D=0.28 のレーシングカーが U=100km/h のスピードで走行する際の抗力を計算せよ．また，10m/s の風速の向かい風が吹いている場合の抗力を計算せよ．空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3 とする．

【略解】

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.28 \times \frac{1.2 \times \left(100 \times \frac{1000}{3600}\right)^2 \times 1.25}{2} = 162\mathrm{N}$$

向かい風が吹いている場合については,車速に風速を加えたものが正味の速度となるので,抗力は次のように計算できる.

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.28 \times \frac{1.2 \times \left(100 \times \frac{1000}{3600} + 10\right)^2 \times 1.25}{2} = 300\mathrm{N}$$

問題８　海底探査のために無線潜水艇を開発している．予め模型実験を実施して抗力係数が C_D=0.35 であることが分かっており，実物の流れ方向投影面積が S=0.3m^2 である．この潜水艇が海中を U=20km/h 一定で航行するために必要な動力を計算せよ.海水の密度は ρ＝1100kg/m^3 とする．海水は静止していると仮定してよい.

【略解】

潜水艇の抗力 D を求めると次のようになる.

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.35 \times \frac{1100 \times \left(20 \times \frac{1000}{3600}\right)^2 \times 0.3}{2} = 1782\mathrm{N}$$

推進に必要な動力 P は抗力 D と航行速度 U との積として計算できるので，次のように求められる.

$$P = DU = 1782 \times \left(20 \times \frac{1000}{3600}\right) = 9902\mathrm{N \cdot m/s} = 9.9\mathrm{kW}$$

問題９　直径 d=5mm の鉄球がグリセリンの中を一定速度 U で落下している．ストークスの抵抗法則が成り立つと仮定し，落下速度 U, 抗力 D, レイノルズ数 Re を計算せよ．グリセリンの密度は ρ ＝1300kg/m^3, 粘度は μ ＝2.5Pas であり,鉄の密度は ρ_s＝7800kg/m^3 とする.重力加速度は g=9.8m/s^2 とする.

【略解】

7-2-2 項の例題（粘性流体中の落下運動の速度）から，球の落下速度 U は次のように表される.

$$U = \frac{(\rho_s - \rho) d^2 g}{18\mu}$$

これに数値を代入すると落下速度 U が求められる.

$$U = \frac{(\rho_s - \rho) d^2 g}{18\mu} = \frac{(7800 - 1300) \times (5.0 \times 10^{-3})^2 \times 9.8}{18 \times 2.5} = 35.4 \times 10^{-3}\mathrm{m/s}$$

また，ドリル問題 7-2 の問題 5 のストークスの抵抗法則より，このときの抗力 D は次のように求められる.

$$D = 3\pi\mu U d = 3\pi \times 2.5 \times (35.4 \times 10^{-3}) \times 5.0 \times 10^{-3} = 4.2 \times 10^{-3}\mathrm{N}$$

レイノルズ数 Re は次のように求められる.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{1300 \times 35.4 \times 10^{-3} \times 5.0 \times 10^{-3}}{2.5} = 92 \times 10^{-3}$$

よって，レイノルズ数が 1 よりも十分小さいのでストークスの抵抗法則が使用できること

が確認された。

７－３　ドリル問題

問題１　翼面積 S=20m^2 の飛行機が速度 300km/h で飛行するときの揚力を計算せよ．ただし揚力係数は C_L=0.48 とし，空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3 とする．

【略解】

$$L = C_L \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.48 \times \frac{1.2 \times \left(300 \times \frac{1000}{3600}\right)^2 \times 20}{2} = 4.0 \times 10^4 \mathrm{N} = 40\mathrm{kN} \qquad \text{（答）}$$

問題２　翼幅が 48cm，翼弦長が 12cm の長方形の翼模型を用いて風速が U=45m/s のときの揚力と抗力を計測したところ，揚力が L=25N，抗力が D=3N であった．揚力係数 C_L と抗力係数 C_D を求めよ．空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3 とする．

略解

$$C_D = \frac{2D}{\rho U^2 S} = \frac{2 \times 3}{1.2 \times 45^2 \times 48 \times 12 \times 10^{-4}} = 0.043 \qquad \text{（答）}$$

$$C_L = \frac{2L}{\rho U^2 S} = \frac{2 \times 25}{1.2 \times 45^2 \times 48 \times 12 \times 10^{-4}} = 0.36 \qquad \text{（答）}$$

問題３　平板翼の揚力係数は迎え角を α とすると次式で与えられることが知られている．

$$C_L = 2\pi \sin\alpha$$

翼面積 S=10m^2 の平板翼について，速度 U=180km/h で L=4kN の揚力を得るための迎え角の大きさを求めよ．空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3 とする．

【略解】

$$U = 180\mathrm{km/h} = 180 \times \frac{1000}{3600}\mathrm{m/s} = 50\mathrm{m/s}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{C_L}{2\pi}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2\pi} \times \frac{2L}{\rho U^2 S}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{L}{\pi \rho U^2 S}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{4000}{\pi \times 1.2 \times 50^2 \times 10}\right\} = 2.43^\circ$$

（答）

問題４　乗務員を含む搭乗定員が 500 人の旅客機がある．乗務員と乗客を除いた総質量は 370t であり（1t=1000kg），主翼面積は S=540m^2 である．満席の状態でこの旅客機が 900km/h 一定で水平に飛行しているときの主翼の揚力係数 C_L を求めよ．ただし，乗務員と乗客の平均質重を 60kg とし，揚力は全て主翼で担うものと仮定する．なお，空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3，重力加速度は g=9.8m/s^2 として計算せよ．

【解答】

揚力は重力とつり合っていることから計算できる．

$$L = mg = \left(370 \times 10^3 + 500 \times 60\right) \times 9.8 = 3920\mathrm{kN}$$

飛行速度を換算．

$$U = 900 \times \frac{1000}{3600} = 250\mathrm{m/s}$$

これより揚力係数は次のように計算できる.

$$C_L = \frac{2L}{\rho U^2 S} = \frac{2 \times 3920 \times 10^3}{1.2 \times 250^2 \times 540} = 0.194$$ （答）

問題５　一様な速度 U=5.0m/s の空気流中に直径 d=50mm，長さ H=200mm の円柱を設置して n=600rpm で回転させる. 円柱に作用する揚力を求めよ. 空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3 とする.

【略解】

角速度を求めると次のようになる.

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 600}{60} = 20\pi = 62.8\ \mathrm{rad/s}$$

円柱表面の速度（周速度）は次のようになる.

$$v = \omega \frac{d}{2} = 20\pi \times \frac{0.05}{2} = \frac{\pi}{2} = 1.57\mathrm{m/s}$$

よって，式 7.20 から円柱表面の循環を計算することができる.

$$\Gamma = \pi d v = \pi \times 0.05 \times \frac{\pi}{2} = 0.2467\mathrm{m^2/s}$$

クッタ・ジューコフスキーの定理（式 7-21）から，円柱に生じる単位長さ当たりの揚力を求めることができるので，それに円柱の長さを掛けることで揚力が得られる.

$$L = \rho U \Gamma \times H = 1.2 \times 5.0 \times 0.2467 \times 0.2 = 0.3\mathrm{N}$$ （答）

問題６　レーシングカーは高速で走行するため,接地性を良くするために下向きの揚力(通称ダウンフォース）を得ることが重要となる. 流れ方向投影面積（代表面積）が S=1.4m^2, 揚力係数が C_L=3.6 のフォーミュラーカーが U=180km/h で走行する際のダウンフォースを求めよ. 空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3 とする.

【略解】

$$L = C_L \frac{\rho U^2 S}{2} = 3.6 \times \frac{1.2 \times \left(180 \times \frac{1000}{3600}\right)^2 \times 1.4}{2} = 7560\mathrm{N}$$

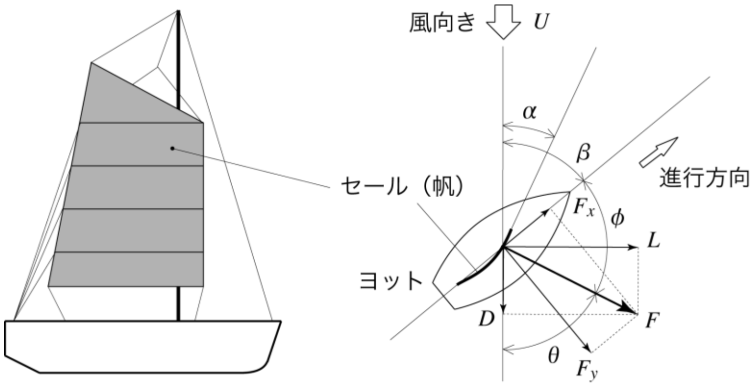
問題７　流れ方向投影面積（代表面積）が S=1.4m^2 のフォーミュラーカーが U=300km/h で走行する際に L=20kN のダウンフォースが必要とされている. 揚力係数 C_L がいくらであればよいか計算せよ. 空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3 とする.

【略解】

$$C_L = \frac{2L}{\rho U^2 S} = \frac{2 \times 20 \times 10^3}{1.2 \times \left(300 \times \frac{1000}{3600}\right)^2 \times 1.4} = 3.43$$

問題８　図に示すようにヨットはセール（帆）が風からうける力を利用して推進する. 面

積 S=30m^{2}のセールが速度 U=5m/s の風を受けているときの揚力 L と抗力 D を求めよ．また，ヨットの進行方向が風となす角度を $\beta=45°$ であるときの推進力 F_x を計算せよ．ただし，セール面積を代表面積とする揚力係数は C_L=1.0，抗力係数は C_D=0.3 であり，空気の密度は $\rho=1.2$kg/m^3 とする．



【略解】

揚力と抗力は次のように計算できる．

$$L = C_L \frac{\rho U^2 S}{2} = 1.0 \times \frac{1.2 \times 5.0^2 \times 30}{2} = 450\text{N}$$

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.3 \times \frac{1.2 \times 5.0^2 \times 30}{2} = 135\text{N}$$

これらの合力である流体力は次のようになる．

$$F = \sqrt{L^2 + D^2} = \sqrt{450^2 + 135^2} = 470\text{N}$$

流体力が風の方向となす角度は次のように求められる．

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{L}{D}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{450}{135}\right) = 73.3^{\circ}$$

したがって，ヨットの進行方向と流体力がなす角度は次のようになる．

$$\phi = 180^{\circ} - \beta - \theta = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 73.3^{\circ} = 61.7^{\circ}$$

以上より進行方向の力（推進力）は次のように求められる．

$$F_x = F\cos\phi = 470 \times \cos\left(61.7^{\circ}\right) = 223\text{N}$$

７－４　ドリル問題

問題１　図７－30 あるいは７－29 のような平行平板間のポアズイユ流れの速度分布は次のように表される．

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(hy - y^2\right)$$

この流れについて，流路中央（$y=h/2$）で流速 u が最大となることを示し，その最大流速 $u_{\max}$ を求めよ．また，流路中央でのせん断応力 τ_0 と平板上($y=0$)でのせん断応力 τ_w をそれぞれ求めよ．

【略解】

速度分布は二次関数であるので，次のように変形すると $y=h/2$ で流速が最大になることがわかる．

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left\{-\left(y-\frac{h}{2}\right)^2+\frac{h^2}{4}\right\}$$

このときの最大流速は次のようになる．

$$u_{\max}=-\frac{h^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

また，せん断応力の定義から流路中央ならびに平板上でのせん断応力を求めると次のようになる．

$$\frac{du}{dy}=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(h-2y)$$ を用いて

$$\tau_0=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=h/2}=-\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\left(h-2\times\frac{h}{2}\right)=0$$

$$\tau_w=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=-\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(h-2\times 0)=-\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}$$

この結果から，せん断応力は流路中央でゼロになり，平板表面上で最大の値となる．

問題２　図７－30 あるいは７－29 のようなクエット流れの速度分布が直線状になることを示せ．また，せん断応力の分布を求めよ．

【略解】

ナビエ・ストークス方程式（式 7-22）を二次元定常流れを仮定し簡略化すると，クエット流れを記述する x 方向の運動方程式は次の通りに整理できる．ここで，$\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, v, w, X などはゼロであり，圧力勾配によって流れないので $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ である。

$$\mu\frac{d^2u}{dy^2}=0$$

これを積分すると速度分布が決定される．ただし，C_1 と C_2 は積分定数である．

$$\frac{d^2u}{dy^2}=0\rightarrow\frac{du}{dy}=C_1\rightarrow u=C_1y+C_2$$

ここで境界条件として $y=0$ で $u=0$, $y=h$ で $u=U$ となる条件を与えると積分定数を決定することができる．

$$C_1=\frac{U}{h},\quad C_2=0$$

よって，クエット流れの速度分布は次のようになる．

$$u=\frac{U}{h}y$$ （答）

せん断応力の分布については，定義から次のように計算することができる．

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{\mu U}{h}$$ （答）

この結果からわかるように，クエット流れではせん断応力は流路内で一定である．

問題３　流速 U の一様な流れの中におかれた平板上の流れ（層流）について，壁面せん断応力が次のように局所レイノルズ数の関数となることを示せ．

$$\tau_w = \frac{3\mu U\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{9.82x}$$

【略解】

層流の速度分布は式 7-28 より次の通りである．

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

これより速度勾配を計算すると次のようになる．

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}\frac{U}{\delta}\left\{1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right\}$$

境界層厚さは局所レイノルズ数で次式 7-30 のように表される．

$$\delta = \frac{4.91x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

以上より，壁面せん断応力を求めると次のようになる．

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\mu U}{\delta} = \frac{3}{2}\mu U \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{4.91x} = \frac{3\mu U\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{9.82x}$$

問題４　流速 U=2.0m/s の一様な水の流れの中に流れに平行となるように長さ 2m，幅 1m の平板が置かれている．平板の先端から x=1m の位置における境界層厚さを求めよ．また，摩擦抗力係数を求め，平板の上面に作用する摩擦抗力を求めよ．水の密度は ρ ＝1000kg/m^3，粘度は μ ＝1.0×10^{-3}Pa・s とする．

【略解】

x=1m の位置における局所レイノルズ数を計算する．

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu} = \frac{\rho U x}{\mu} = \frac{1000 \times 2.0 \times 1.0}{1.0 \times 10^{-3}} = 2.0 \times 10^6$$

これより，$R_e \geq (3 \sim 5) \times 10^5$（7-4-4 項参照）であるから，流れは乱流であると判定できる．

よって，x=1m の位置における境界層厚さは式 7-31 より次のように計算できる．

$$\delta = 0.37x\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_x}\right)^{1/5} = 0.37 \times 1.0 \times \left(\frac{1}{2.0 \times 10^6}\right)^{0.2} = 0.0203\mathrm{m} = 20.3\mathrm{mm}$$ （答）

平板の長さを代表長さとするレイノルズ数を求めると次のようになる．

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{1000 \times 2.0 \times 2.0}{1.0 \times 10^{-3}} = 4.0 \times 10^6$$

よって，摩擦抗力係数は式 7-37 より次のように求められる．

$$C_f = 0.074\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\right)^{1/5} = 0.074\times\left(\frac{1}{4.0\times10^6}\right)^{0.2} = 3.5\times10^{-3}$$

これより，摩擦抗力は次のように求められる．

$$D_f = C_f\frac{\rho U^2 L}{2}H = 3.5\times10^{-3}\times\frac{1000\times2.0^2\times2.0}{2}\times1.0 = 14.0\mathrm{N} \qquad \text{（答）}$$

問題５　縦 L=1.8m，横 H=1.0m の長方形の太陽電池パネルを水平に搭載したソーラーカーがある．走行速度が U=36km/h のとき太陽電池パネルに作用する摩擦抗力を計算せよ．ただし，太陽電池パネルは平板と仮定し，パネルの縦方向が車の進行方向と一致しているとする．空気の密度は ρ ＝1.2kg/m^3，粘度は μ ＝18×10^{-6}Pa・s とする．

【略解】

パネルの長さを代表長さとするレイノルズ数を計算する．

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{1.2\times\left(36\times\dfrac{1000}{3600}\right)\times1.8}{18\times10^{-6}} = 1.2\times10^6$$

前述のドリル問題４．と同様に乱流であることが分かるので，摩擦抗力係数は式
7-37 より次のようになる．

$$C_f = 0.074\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\right)^{1/5} = 0.074\times\left(\frac{1}{1.2\times10^6}\right)^{0.2} = 4.5\times10^{-3}$$

これより，摩擦抗力は次のように求められる．

$$D_f = C_f\frac{\rho U^2 L}{2}H = 4.5\times10^{-3}\times\frac{1.2\times10^2\times1.8}{2}\times1.0 = 0.49\mathrm{N}$$

問題６　体長 L_1=50cm の魚が遊泳するときの魚体まわりの水流の様子を調べるために，縮小模型と小型水槽を用いて可視化する実験を計画している．模型の体長を L_2=10cm とするとき，魚が U_1=2.0m/s で泳ぐ状況を実験で再現するための水流の速度 U_2 を求めよ．また，同様の可視化実験を実寸法の模型を製作して風洞内の空気流で行う場合，空気流の速度をいくらにすればよいか計算せよ．ただし，空気の密度は ρ_a=1.2kg/m^3，粘度は μ_a=18×10^{-6}Pa・s，水の密度は ρ_w=1000kg/m^3，粘度は μ_w=1.0×10^{-3}Pa・s とする．

【略解】

実際の魚のレイノルズ数 Re_1 と模型のレイノルズ数 Re_2 を計算する．

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{\rho_w U_1 L_1}{\mu_w} = \frac{1000\times2.0\times0.5}{1.0\times10^{-3}} = 1.0\times10^6$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{\rho_w U_2 L_2}{\mu_w} = \frac{1000\times U_2\times0.1}{1.0\times10^{-3}} = 0.1\times10^6 U_2$$

両者が一致すればよいので，水槽の水流の速度は次のように求められる．

$$U_2 = \frac{1.0\times10^6}{0.1\times10^6} = 10.0\mathrm{m/s} \qquad \text{（答）}$$

空気流の実験の場合のレイノルズ数は次のようになる．

$$\mathrm{Re}_2{}' = \frac{\rho_a U_2{}' L_2{}'}{\mu_a} = \frac{1.2 \times U_2{}' \times 0.5}{18 \times 10^{-6}} = \frac{10}{3} \times 10^4 U_2{}'$$

よって，空気の流速は次のように求められる．

$$U_2{}' = \frac{1.0 \times 10^6}{10/3 \times 10^4} = 30.0\mathrm{m/s} \qquad （答）$$

問題７　トンボの翼の流体力学的な特徴を調べるための実験を計画している．翼の断面形状と相似な拡大模型を製作してグリセリンを用いた流れの可視化を行う．断面形状の長さが実物では L_1=4mm，模型では L_2=10cm とする．トンボの飛翔速度が U_1=0.4m/s の場合を再現するためにはグリセリンの流速 U_2 をいくらに設定すれば良いか計算せよ．ただし，空気の動粘度を $\nu_a=16\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，グリセリンの動粘度は $\nu_g=2\times10^{-3}\mathrm{m^2/s}$ とする．

【略解】

実物のレイノルズ数 Re_1 と拡大模型のレイノルズ数 Re_2 を求めると次のようになる．

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{U_1 L_1}{\nu_a} = \frac{0.4 \times 0.004}{16 \times 10^{-6}} = 100$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{U_2 L_2}{\nu_g} = \frac{U_2 \times 0.1}{2 \times 10^{-3}} = 50U_2$$

両者が等しくなればよいので，グリセリンの流速を次のように決定することができる．

$$U_2 = \frac{100}{50} = 2\mathrm{m/s} \qquad （答）$$

問題８　流れ方向に断面積が増加する拡大流路では,流路壁面からのはく離が生じやすい．この理由を説明せよ．

【略解】

拡大流路では，下流に進むにしたがって速度が減少する流れとなる．同時に圧力は上昇する傾向を示す．すなわち，流れ方向に圧力が増加する．壁面近傍では粘性の影響で運動量が減少していることから，圧力増加に抗することができずにはく離が生じてしまう．

（答）

第７章　演習問題

１. 凧揚げを行ったところ,凧糸に作用する張力が T=10N,凧糸が水平となす角度が θ=60°となった（凧が水平となす角度は 30°）．凧は縦 h=40cm，横 b=30cm の長方形平板である．凧糸のたるみは無いとし，凧は軽く質量は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 抗力 D と揚力 L を求めよ．

(2) 上空の空気流が水平方向の一様流れであると仮定し，その速度 U を求めよ．凧の抗力係数は C_D=1.2（流れ方向投影面積基準）であり，空気の密度は $\rho=1.2\mathrm{kg/m^3}$ とする．

(3) 揚力係数 C_L（流れ方向投影面積基準）を求めよ．

【略解】

(1) 凧に作用する流体力 F が凧糸の張力とつり合うことから，流体力 F の分力として抗力

Dと揚力 Lを求めることができる．

$$D = F\cos\theta = 10\times\cos 60^{\circ} = 5\text{N}$$ （答）

$$L = F\sin\theta = 10\times\sin 60^{\circ} = 5\sqrt{3} = 8.7\text{N}$$ （答）

(2) 凧は水平方向と 30° の角度をなしていることから，流れ方向投影面積 Sは次のようになる．

$$S = hb\sin 30^{\circ} = 0.4\times0.3\times0.5 = 0.06\text{m}^2$$

よって，抗力 Dの計算式から流速 Uを求めることができる．

$$U = \sqrt{\frac{2D}{C_D\rho S}} = \sqrt{\frac{2\times5}{1.2\times1.2\times0.06}} = 10.8\text{m/s}$$ （答）

(3) 流速 Uが計算されたので揚力係数 C_Lは次のように求められる．

$$C_L = \frac{2L}{\rho U^2 S} = \frac{2\times5\sqrt{3}}{1.2\times10.8^2\times0.06} = 2.1$$ （答）

２．ある箱形の乗用車が U=50km/h で走行する際に受ける全抵抗力を測定したところ 300N であることがわかった．詳細な解析の結果，抗力の割合が 80%であった．以下の問いに答えよ．空気の密度は ρ=1.2kg/m^3，粘度は μ=18×10^{-6}Pa・s とする．

(1) この乗用車の抗力係数を求めよ．流れ方向投影面積は S=4.0m^2 である．

(2) この乗用車の上面が幅 H=2.0m，長さ L=4.0m の平板とみなすとき，上面に作用する摩擦抗力 D_fを計算せよ．

【略解】

(1) 抗力が全抵抗力 300N の 60%であることから，抗力は D=240N であることがわかる．よって，抗力係数は次のように計算できる．

$$C_D = \frac{2D}{\rho U^2 S} = \frac{2\times240}{1.2\times\left(50\times\dfrac{1000}{3600}\right)^2\times4.0} = 0.52$$ （答）

(2) 上面の長さ L を代表長さとするレイノルズ数 Re_Lを計算する．

$$\text{Re}_L = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{1.2\times\left(50\times\dfrac{1000}{3600}\right)\times4.0}{18\times10^{-6}} = 3.7\times10^{6}$$

よって，流れは乱流である．式 7-37 より摩擦抗力係数 C_fを計算すると次のようになる．

$$C_f = 0.074\left(\frac{1}{\text{Re}_L}\right)^{1/5} = 0.074\times\left(\frac{1}{3.7\times10^6}\right)^{0.2} = 3.6\times10^{-3}$$

これより摩擦抗力 D_fは次のように求められる．

$$D_f = C_f\frac{\rho U^2 L}{2}H = 3.6\times10^{-3}\times\frac{1.2\times\left(50\times\dfrac{1000}{3600}\right)^2\times4.0}{2}\times2.0 = 3.3\text{N}$$ （答）

３．長さ b=1.8m，幅 h=0.9m の板状物体を流速 U=5m/s の空気流の中に設置し揚力を測定したところ，L=40N であった．以下の問いに答えよ．空気の密度は ρ =1.2kg/m^3，粘度は μ =18×10^{-6}Pa・s とする．

(1) この物体の揚力係数 C_L（物体の面積基準）を求めよ．

(2) この物体の抗力係数は C_D=0.15（物体の面積基準）である．抗力 D を求めよ．

(3) 流体力の大きさと流体力が流れ方向となす角度を求めよ．

(4) 長さが b'=45cm の縮小模型を用意して風洞内で流れの可視化実験を行う．この状況を再現するためには，風洞内の空気の流速 u をいくらに設定すればよいか計算せよ．

【略解】

(1) $C_L = \dfrac{2L}{\rho U^2 S} = \dfrac{2\times 40}{1.2\times 5.0^2 \times 1.8\times 0.9} = 1.65$

(2) $D = C_D \dfrac{\rho U^2 S}{2} = 0.15\times \dfrac{1.2\times 5.0^2 \times 1.8\times 0.9}{2} = 3.6\mathrm{N}$

(3) $F = \sqrt{D^2 + L^2} = \sqrt{3.7^2 + 40^2} = 40.2\mathrm{N}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{L}{D}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{40}{3.7}\right) = 85^{\mathrm{o}}$$

(4) 実物のレイノルズ数を計算する．

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U b}{\mu} = \frac{1.2\times 5.0\times 1.8}{18\times 10^{-6}} = 6.0\times 10^5$$

縮小模型の場合のレイノルズ数がこれと一致すればよいので,風洞内の流速が求められる．

$$u = \mathrm{Re}\frac{\mu}{\rho b'} = 6.0\times 10^5 \times \frac{18\times 10^{-6}}{1.2\times 0.45} = 20\mathrm{m/s}$$

同一の流体を利用する模型実験では，模型を 1/X 倍したとき流速を X 倍にすればよい．

４．パラシュートを利用して降下する運動を考える．降下後に十分な時間が経過すると重力と抗力がつり合って一定速度 U で落下運動をするようになる．人とパラシュートの質量の合計が m=80kg であるとき，落下時の衝撃が，パラシュート無しで空気抵抗を無視できる条件で h=1m の落差を飛び降りる（抵抗無しの自由落下）ときの衝撃と同じになるようにパラシュートを設計したい．パラシュートは半球形状とし抗力係数は C_D=1.3 とする．パラシュートの直径 d をいくらにすればよいか計算せよ．なお，無風状態を仮定し，空気の密度は ρ =1.2kg/m^3，重力加速度は g=9.8m/s とする．

【略解】

着地時の衝撃を落差 1m の自由落下と等しくするには,着地時の速度が自由落下の速度と等しくなればよい．その速度 U は次のように計算できる．

$$U = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 9.8\times 1.0} = 4.43\mathrm{m/s}$$

重力 mg と抗力 D がつりあうので，次の関係が成り立つ．

$$mg = C_D \frac{\rho U^2 S}{2}$$

これより流れ方向投影面積 S が次のように計算できる．

$$S = \frac{2mg}{C_D \rho U^2} = \frac{2\times 80\times 9.8}{1.3\times 1.2\times 4.43^2} = 51.2\mathrm{m}^2$$

投影面は直径 d の円であることから，直径 d を次のように求めることができる．

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\times 51.3}{\pi}} = 8.1\mathrm{m} \qquad \text{（答）}$$

５．直径 d=50mm，長さ h=100mm の円柱を用いて，円柱まわりの流れの可視化を行うための実験装置の製作を検討している．以下の問いに答えよ．空気の密度は $\rho=1.2\mathrm{kg/m^3}$，粘度は $\mu=18\times 10^{-6}\mathrm{Pa\cdot s}$ とする．

(1) 実験可能なレイノルズ数（直径基準）の範囲を $4.0\times 10^3 \le \mathrm{Re} \le 1.2\times 10^5$ としたい．この実験装置の風速操作範囲の仕様を決定せよ．

(2) 円柱を風洞内に固定する部品の強度を決定したい．どの程度の最大荷重が想定されるか計算せよ．

【略解】

(1) レイノルズ数と流速は比例するので，レイノルズ数の最小値 $Re_{min}=4.0\times 10^3$ と最大値 $Re_{max}=1.2\times 10^5$ から流速の範囲を決定することができる．

$$U_{\min} = \frac{\mu}{\rho d}\mathrm{Re}_{\min} = \frac{18\times 10^{-6}}{1.2\times 0.05}\times 4.0\times 10^3 = 1.2\mathrm{m/s}$$

$$U_{\max} = \frac{\mu}{\rho d}\mathrm{Re}_{\max} = \frac{18\times 10^{-6}}{1.2\times 0.05}\times 1.2\times 10^5 = 36.0\mathrm{m/s}$$

よって，流速の範囲は次の通りとなる．

$1.2\mathrm{m/s} \le U \le 36.0\mathrm{m/s}$ （答）

(2) 図 7-15 あるいは 7-16 より，このレイノルズ数の範囲では，抗力係数に極端な変化はない．おおむね $C_D=1.5$ 程度として抗力を見積もれば余裕のある設計となる．これに基づいて最大流速のときの抗力 D_{max} を計算すれば，これが最大荷重に相当する．

$$D_{\max} = C_D \frac{\rho {U_{\max}}^2 S}{2} = C_D \frac{\rho {U_{\max}}^2 dH}{2} = 1.5\times \frac{1.2\times 36^2\times 0.05\times 0.1}{2} = 5.83\mathrm{N}$$

６．高速増殖炉の冷却には液体ナトリウムが使用される．パイプの中を流れる 500℃程度の液体ナトリウムの温度を測定するために外径 d=10mm，長さ H=150mm の円筒形保護管をもつ熱電対を用意し，流れに垂直となるように設置することを計画している．液体ナトリウムの流速が U=1.0m/s であるとき，以下の問いに答えよ．液体ナトリウムの密度は $\rho=832\mathrm{kg/m^3}$，粘度は $\mu=2.46\times 10^{-4}\mathrm{Pa\cdot s}$，水の密度は $\rho_w=1000\mathrm{kg/m^3}$，粘度を $\mu_w=1.0\times 10^{-3}\mathrm{Pa\cdot s}$ とする．

(1) 熱電対まわりのナトリウムの流れのレイノルズ数 Re を計算せよ.代表長さは熱電対の外径とする.
(2) 熱電対に作用する抗力を求めよ. 抗力係数は C_D=1.2 とする.
事前準備としてこの熱電対周りの流れを調べるために水を用いた可視化実験を行う.
(3) ナトリウムの流れを再現するための水の流速を求めよ.
(4) 実験を実施し, 高速カメラで流れの観察を行ったところ熱電対下流への周期的な渦放出が確認された.このレイノルズ数におけるストローハル数 を St=0.18 として渦放出の周期 T を求めよ.

【略解】

(1) $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho U d}{\mu} = \dfrac{832 \times 1.0 \times 0.01}{2.46 \times 10^{-4}} = 3.38 \times 10^4$ （答）

(2) $D = C_D \dfrac{\rho U^2 S}{2} = C_D \dfrac{\rho U^2 dH}{2} = 1.2 \times \dfrac{832 \times 1.0^2 \times 0.01 \times 0.15}{2} = 0.75\mathrm{N}$ （答）

(3) ナトリウムの流れと水の流れのレイノルズ数が一致すれば良い.

$$U_w = \frac{\mu_w}{\rho_w d}\mathrm{Re} = \frac{1.0 \times 10^{-3}}{1000 \times 0.01} \times 3.38 \times 10^4 = 3.4\mathrm{m/s}$$ （答）

(4) ストローハル数 St の定義から, 渦放出の周波数 f が求められる.

$$f = \frac{St U_w}{d} = \frac{0.18 \times 3.4}{0.01} = 61\mathrm{Hz}$$

周期はその逆数なので次のように求められる.

$$T = \frac{1}{f} = 0.016\,\mathrm{sec}$$ （答）

7. ポアズイユ流れについて以下の問いに答えよ.
(1) 単位流路幅（＝1m）あたりの体積流量 Q は次のように定義される.

$$Q = \int_0^h u(y)\,dy$$

ポアズイユ流れの速度分布 $u(y)$ の式を用いて, 体積流量 Q を求めよ.
(2) 体積流量 Q と流路面積 A により平均流速が定義される.

$$u_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{h \times 1} = \frac{Q}{h}$$

設問(1)の結果に基づいて平均流速を求めよ.
(3) ポアズイユ流れの最大流速 u_{max} と平均流速 u_m との間には次の関係が成り立つことを示せ.

$$\frac{u_{\max}}{u_m} = \frac{3}{2}$$

(4) 代表長さとして平板間隔の２倍の長さ $2h$ をとり, 平均流速を用いてレイノルズ数 Re を定義する.

$$\mathrm{Re} = \frac{u_m \times 2h}{\nu} = \frac{2\rho u_m h}{\mu}$$

また, 摩擦係数 λ を次のように定義する.

$$\lambda = -\frac{dp}{dx}\left\{\left(\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{\rho u_m{}^2}{2}\right)\right\}^{-1}$$

このとき，摩擦係数・とレイノルズ数 Re の関係が次のように表されることを示せ．

$$\lambda = \frac{96}{\mathrm{Re}}$$

【略解】

(1) ポアズイユ流れの速度分布 $u(y)$ は次のように表される（7-4-2 項の例題ポアズイユ流れの速度分布を参照)。

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(hy - y^2\right)$$

これを体積流量 Q の定義式に代入して積分すればよい．

$$Q = \int_0^h \left\{-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(hy - y^2\right)\right\}dy = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int_0^h \left(hy - y^2\right)dy = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left[\frac{h}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^h = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

（答）

(2) $u_m = \frac{Q}{h} = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}\times\frac{1}{h} = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx}$ （答）

(3) 速度分布は $u(y)$ 次のように変形できる．

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left\{-\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4}\right\}$$

これより最大流速が求められる．

$$u_{\max} = u\big|_{y=h/2} = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

よって，最大流速 u_{max} と平均流速 u_m の関係は次のようになる．

$$\frac{u_{\max}}{u_m} = \frac{-\frac{h^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}}{-\frac{h^2}{12\mu}\frac{dp}{dx}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$ （答）

(4) 平均流速 u_m を表す式を圧力勾配について整理すると次のようになる．

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{12\mu}{h^2}u_m = \frac{\mu}{\rho u_m(2h)}\left(\frac{24\rho u_m{}^2}{h}\right) = \frac{\mu}{2\rho u_m h}\left(\frac{48}{h}\right)\left(\frac{\rho u_m{}^2}{2}\right) = \frac{96}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{\rho u_m{}^2}{2}\right)$$

これを摩擦係数 λ の定義式に代入すればよい．

$$\lambda = -\frac{dp}{dx}\left\{\left(\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{\rho u_m{}^2}{2}\right)\right\}^{-1} = \frac{\frac{96}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{\rho u_m{}^2}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2h}\right)\left(\frac{\rho u_m{}^2}{2}\right)} = \frac{96}{\mathrm{Re}}$$ （答）

８．クエット流れにおいて，一定の圧力勾配を与えたときの流速 u を求めよ．また，速度

分布がどのような形になるか説明せよ．
【略解】
圧力勾配を与える場合，運動方程式は次式 7-23 の通りとなる（ポアズイユ流れと同じである）．

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

これを２回積分すると流速が求められる．

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\rightarrow\frac{du}{dy}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y+C_1\rightarrow u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+C_1y+C_2$$

ここで境界条件として y=0 で u=0, y=h で u=U となる条件を与えると積分定数が次のように決定される．

$$C_1=\frac{U}{h}-\frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx},\quad C_2=0$$

これより速度分布は次のように決定される．

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(hy-y^2\right)+\frac{U}{h}y$$ （答）

右辺の第１項はポアズイユ流れと同じ放物線状の速度分布であり，第２項がクエット流れの直線状の速度分布を表している．この場合，両者の和が合成された速度分布になることがわかる．

７章　ワークシート問題

１．機体質量を 80kg の人力飛行機に質重 60kg のパイロットが２名乗って飛行する．翼の揚力係数は C_L=1.05，翼面積は．S=54m^2 である．水平飛行が可能な速度を求めよ．空気の密度を ρ =1.2kg/m^3 とする。
【解答】
水平飛行するために必要な揚力は重力と等しくなる．

$$L=mg=(80+60\times2)\times9.8=1960\mathrm{N}$$

よって，水平に飛行可能な速度は次のように求められる．

$$U=\sqrt{\frac{2L}{C_L\rho S}}=\sqrt{\frac{2\times1960}{1.05\times1.2\times54}}=7.6\mathrm{m/s}$$ （答）

２．学生フォーミュラー大会に出場するためのレーシングカー製作において車体の空力特性について検討している．実車の流れ方向投影面積を測定したところ S=1.0m^2 であった．この車が 60km/h で走行する際の抗力を求めたい．これについて以下の問いに答えよ．ただし，空気の密度は ρ =1.2kg/m^3，粘度は μ =18×10^{-6}Pa・s，水の密度は ρ_w=1000kg/m^3，粘度を μ_w =1.0×10^{-3}Pa・s とする．
(1) 抗力係数を求めるために各部の寸法を 1/2 にした縮小模型を用いて風洞実験を行う．

60km/h での走行を再現するための風洞内の気流の速度を求めよ．

(2) 設問(1)の速度で模型に作用する抗力が D=70N であった．抗力係数 C_Dを求めよ．

(3) 設問(2) で求めた抗力係数から，実車の場合に作用する抗力を求めよ．

(4) 実車の 1/10 の縮小模型を製作して水流を用いた可視化実験を行う場合には,水流の速度をいくらにすればよいか計算せよ．

【略解】

(1) レイノルズの相似則から模型を 1/2 に縮小しているので，流速は２倍になればよい．

$$U = \left(60 \times \frac{1000}{3600}\right) \times 2 = 33\text{m/s} \qquad \text{（答）}$$

(2) 模型の投影面積が実車の 1/4 になることに注意し，抗力係数の定義から計算できる．

$$C_D = \frac{2D}{\rho U^2 S} = \frac{2 \times 70}{1.2 \times 33^2 \times 0.25} = 0.43 \qquad \text{（答）}$$

(3) 実車の投影面積を用いて計算すればよい．

$$D = C_D \frac{\rho U^2 S}{2} = 0.43 \times \frac{1.2 \times \left(60 \times \frac{1000}{3600}\right)^2 \times 1.0}{2} = 72\text{N} \qquad \text{（答）}$$

(4) 実車のレイノルズ数と水流の実験におけるレイノルズ数が一致すればよい．

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\rho_w U' (L/10)}{\mu_w}$$

$$\to \quad U' = \frac{\rho}{\rho_w} \frac{\mu_w}{\mu} \times 10 \times \left(60 \times \frac{1000}{3600}\right) = \frac{1.2}{1000} \times \frac{1.0 \times 10^{-3}}{18 \times 10^{-6}} \times 10 \times \left(60 \times \frac{1000}{3600}\right) = 11\text{m/s}$$

（答）