

2章 問題解答

2-1

予習

1.

(1)密度 [ML⁻³] (2)単位体積重量 [ML⁻²T⁻²] (3)圧力[ML⁻²T⁻¹]

2.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{4.3^2 + 2.5^2} = 5.0\text{N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x} = \tan^{-1} \frac{2.5}{4.3} = 30.2^\circ$$

演習問題 A

2-1-A1 1013hPa

2-1-A2

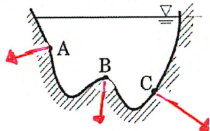
$$p = \rho gh + p_0 = 1000 \times 9.8 \times 10 + 101.3 \times 10^3 = 199300 \text{ N} = 199.3 \text{ kPa}$$

2-1-A3

$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2} \quad \text{より} \quad P_1 = P_2 \times \frac{A_1}{A_2} = 2 \times \frac{10}{30} = 0.7 \text{ kN}$$

2-1-A4

図のように面に直角に作用する（3つの力の大きさ（矢印の長さ）も水深に応じて変化させること）。



演習問題 B

2-1-B1

油の単位重量 $\gamma' = 0.92\gamma = 0.92 \times 9.8 = 9.016 \text{ kN/m}^3$

水の単位重量 $\gamma = \rho g = 9.8 \text{ kN/m}^3$

海水の単位重量 $\gamma'' = 1.025\gamma = 1.025 \times 9.8 = 10.05 \text{ kN/m}^3$

①油と水との境界面

$$p' = \gamma' h_1 = 9.016 \times 2.2 = 19.8 \text{ kPa}$$

②水と海水との境界面

$$p = p' + \gamma h_2 = 19.8 + 9.8 \times 1.9 = 38.5 \text{ kPa}$$

③水槽の底面

$$p'' = p + \gamma'' h_3 = 38.5 + 10.05 \times 3.7 = 75.6 \text{ kPa}$$

2-1-B2

$$\text{全水圧 } P = \rho g H A = 9.8 \times 1.5 \times \frac{\pi \times 1.2^2}{4} = 16.6 \text{ kN}$$

左側の池から右側の池に向かって作用する。

$$\text{作用点 } H_c = 1.5 + 0.6 + 0.6 = 2.7 \text{ m}$$

2-1-B3

$$(1) \text{ 全水圧は } P = \rho g H_G A = 9.8 \times 3 \times 6 = 176.4 \text{ kN}$$

となる。したがって、3つの部材には

$$176.4 \div 3 = 58.8 \text{ kN}$$

ずつ受け持たせればよい。

$$\frac{1}{2} \rho g h_1^2 = 58.8 \text{ kN}$$

より

$$h_1 = 3.46 \text{ m}$$

となる。また、

$$\frac{1}{2} \rho g h_2^2 = 58.8 \times 2 \text{ kN}$$

より

$$h_2 = 4.90 \text{ m}$$

$$(2) d_1 = 6 - \frac{2}{3} h_1 = 6 - \frac{2}{3} \times 3.46 = 3.69 \text{ m}$$

$$58.8 \times (6 - d_2) = (58.8 \times 2) \times \frac{2}{3} h_2 - 58.8 \times \frac{2}{3} h_1$$

したがって

$$d_2 = 6 - \frac{(58.8 \times 2) \times \frac{2}{3} \times 4.90 - 58.8 \times \frac{2}{3} \times 3.46}{58.8}$$

$$= 1.77 \text{ m}$$

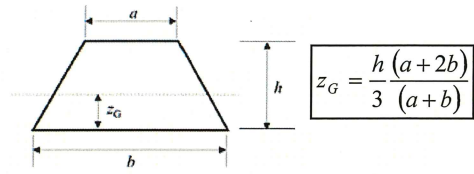
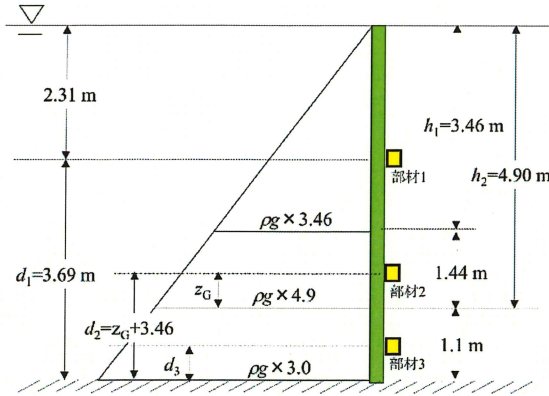
$$58.8 \times (6 - d_3) = (58.8 \times 3) \times \frac{2}{3} \times 6 - (58.8 \times 2) \times \frac{2}{3} h_2$$

したがって

$$d_3 = 6 - \frac{(58.8 \times 3) \times \frac{2}{3} \times 6 - (58.8 \times 2) \times \frac{2}{3} \times 4.90}{58.8}$$

$$= 0.53 \text{ m}$$

【別解】 d_3 と d_2 については、台形の図心より求めることもできる（下図参照）。



$$d_3 = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)} = \frac{1.1(6.0\rho g + 2 \times 4.9\rho g)}{3(6.0\rho g + 4.9\rho g)} = 0.53 \text{ m}$$

$$d_2 = 1.1 + z_G = 1.1 + \frac{h(a+2b)}{3(a+b)} = \frac{1.1(4.9\rho g + 2 \times 3.46\rho g)}{3(4.9\rho g + 3.46\rho g)} = 1.1 + 0.68 = 1.78 \text{ m}$$

2-1-B4

(1)作用点

$$s_c = s_G + \frac{I_G}{s_G A}$$

$$= \frac{0.9}{\sin 60^\circ} + \frac{1 \times \left(\frac{1.8}{\sin 60^\circ}\right)^3}{\left(\frac{0.9}{\sin 60^\circ}\right) \left(\left(\frac{1.8}{\sin 60^\circ}\right) \times 1\right)} = 1.39 \text{ m}$$

$$d = \frac{1.8}{\sin 60^\circ} - s_c = 2.08 - 1.39 = 0.69 \text{ m}$$

(2)全水圧

$$P = \rho g H_G A = 1000 \times 9.8 \times 0.9 \times 2.078 = 18.330 \text{ N} = 18.33 \text{ kN}$$

2-2

予習

1.

(1) 浮力=その物体の空中での重さと水中での重さの差=1.2-0.8=0.4 N

(2) 水の単位体積重量 9800 N/m³ より 0.4 ÷ 9800 = 4.1 × 10⁻⁵ m³ = 41 cm³

演習問題 A

2-2-A1

水面下にある氷山の容積を V [m³] とする。重力と浮力のつり合いから

$$\rho_i g(V_i + 120) = \rho_s g V_i$$

$$V_i = \frac{\rho_i \times 120}{\rho_s - \rho_i} = \frac{920 \times 120}{1025 - 920} = 1051 \text{ m}^3$$

2-2-A2

物体の体積を V [m^3]とする。アルキメデスの原理より、物体が排除した水の重量分の浮力 B を受けるので、次式が成り立つ。

$$B = \rho_s g V$$

$$V = \frac{B}{\rho g} = \frac{250 - 160}{1000 \times 9.8} = 9.2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

2-2-A3

水中重量 W' は、空気中での重量 W から鋼棒の受ける浮力 B を差し引いて得られる。

$$W' = W - B$$

$$= \rho' g V - \rho g V = (\rho' - \rho) g V = (7850 - 1000) \times 9.8 \times \left(\frac{\pi \times 0.02^2}{4} \right) = 21.1 \text{ N}$$

2-2-A4

きつ水を x として、空気中での木材の重量と、水没した木材が押しつけた水の重量のつり合いの関係から、

$$650 \times \frac{\pi \times 0.8^2}{4} \times 1 = 1000 \times \frac{\pi \times 0.8^2}{4} \times x$$

$$x = \frac{650}{1000} = 0.65 \text{ m}$$

2-2-A5

円柱の底から重心までの距離

$$\overline{BG} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ m}$$

円柱の底から浮心までの距離

$$\overline{BC} = \frac{x}{2} = \frac{0.65}{2} = 0.325 \text{ m}$$

浮心から重心までの距離

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 0.5 - 0.325 = 0.175 \text{ m}$$

断面二次モーメント

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.8^4}{64} = 0.0201 \text{ m}^4$$

水没した木材の体積

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \times x = \frac{\pi \times 0.8^2}{4} \times 0.65 = 0.327 \text{ m}^3$$

傾心高

$$\overline{MG} = \frac{I_y}{V} - \overline{CG} = \frac{0.0201}{0.327} - 0.175 = -0.113 \text{ m}$$

演習問題 B

2-2-B1 (解答例)

ケーソンの自重 W は全体がコンクリートで満たされたと仮定した場合の重量 W_1 から内部空間に見合うコンクリートの重量 W_2 を引いて求められる。

$$\begin{aligned} W &= W_1 - W_2 = 2.4\rho g \{(7.5 \times 4 \times 5) - 2 \times (3.3 \times 3.4 \times 4.5)\} \\ &= 1153.0 \text{ kN} \end{aligned}$$

底面から重心までの距離 \overline{BG} は底面まわりのモーメントより求められる。

$$\begin{aligned} W \times \overline{BG} &= W_1 \times \overline{BG}_1 - W_2 \times \overline{BG}_2 \\ \overline{BG} &= \frac{W_1 \times \overline{BG}_1 - W_2 \times \overline{BG}_2}{W} = \frac{2.4\rho g \times (7.5 \times 4 \times 5) \times \frac{5}{2} - 2.4\rho g \times 2 \times (3.3 \times 3.4 \times 4.5) \times \left(0.5 + \frac{5-0.5}{2}\right)}{1153.0 \times 10^3} \\ &= 1.98 \text{ m} \end{aligned}$$

きつ水 x は浮力 B と重力 W のつり合いより求められる。浮力は

$$B = 1.025\rho g(7.5 \times 4.0 \times x) = 301.4x \text{ kN}$$

となる。 $B=W$ より

$$301.4x = 1153.0$$

$$x = 3.83 \text{ m}$$

となる。よって、ケーソン底から浮心までの距離は

$$\overline{BC} = \frac{x}{2} = \frac{3.83}{2} = 1.92 \text{ m}$$

となる。

断面二次モーメントは、より小さくなる長軸まわりで考える。

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{7.5 \times 4.0^3}{12} = 40 \text{ m}^4$$

水没したケーソンの体積は

$$V = 7.5 \times 4 \times 3.83 = 114.9 \text{ m}^3$$

となる。浮心から重心までの距離は

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 1.98 - 1.92 = 0.06 \text{ m}$$

となり、傾心高は

$$\overline{MG} = \frac{I_y}{V} - \overline{CG} = \frac{40}{114.9} - 0.06 = 0.288 \text{ m}$$

となる。 $\overline{MG} > 0$ なので、このケーソンは安定である。

2-2-B2

各部分の体積は、

$$V_0 = \frac{\pi D^2}{4}(H_1 + H_2) = \frac{\pi D^2}{4} \times (4+1) = 1.25\pi D^2, \quad V_1 = \frac{\pi D^2}{4} H_1 = \frac{\pi D^2}{4} \times 4 = \pi D^2,$$

$$V_2 = \frac{\pi D^2}{4} H_2 = \frac{\pi D^2}{4} \times 1 = 0.25\pi D^2$$

きつ水を x とすると、物体に作用する重力 W と浮力 B のつり合いより、

$$W = 0.8\rho g V_1 + 1.3\rho g V_2 = \rho g (0.8 \times \pi D^2 + 1.3 \times 0.25 \times \pi D^2) = 1.125\rho g \pi D^2$$

$$B = \rho g \left(\frac{\pi D^2}{4} x \right) = 0.25\rho g \pi D^2 x$$

となる。 $B=W$ より、 $0.25\rho g \pi D^2 x = 1.125\rho g \pi D^2$

したがって、

$$x = \frac{1.125\rho g \pi D^2}{0.25\rho g \pi D^2} = 4.5 \text{ m}$$

となり、円筒の底から浮心までの距離は

$$\overline{BC} = \frac{x}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ m}$$

となる。

重心の位置は、円筒底の中心点Bまわりのモーメントのつり合いから考える。各部分に作用する重力 W_1, W_2 は、

$$W_1 = 0.8\rho g V_1 = 0.8\rho g \pi D^2, \quad W_2 = 1.3\rho g V_2 = 0.325\rho g \pi D^2$$

であり、円筒底の中心点Bからの距離 L_1, L_2 はそれぞれ 3.0m, 0.5m である。

$$W \times \overline{BG} = W_1 \times L_1 + W_2 \times L_2$$

$$\overline{BG} = \frac{W_1 \times L_1 + W_2 \times L_2}{W} = \frac{0.8\rho g \pi D^2 \times 3 + 0.325\rho g \pi D^2 \times 0.5}{1.125\rho g \pi D^2} = 2.28 \text{ m}$$

浮心から重心までの距離は

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 2.28 - 2.25 = 0.03 \text{ m}$$

となる。傾心高は

$$\overline{MG} = \frac{I_y}{V} - \overline{CG} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{\pi D^2}{4} \times 4.52} - 0.02 = 0.0138D^2 - 0.02 \text{ m}$$

となる。浮体は $\overline{MG} > 0$ のとき、安定する。したがって、 $0.0138D^2 - 0.02 > 0$ を満たす直径 D の場合に安定する。この条件を求めると、

$$D > \sqrt{\frac{0.02}{0.0138}} = 1.20 \text{ m}$$

となり、直径 D が 1.2m 以上で安定する。

2-2-B3

円錐体の高さを H 、きつ水を x とすると、円錐体に作用する重力 W 、浮力 B は

$$W = 0.6 \rho g V = 0.6 \rho g \left(\frac{1}{3} \pi r^2 H \right) = 0.2 \rho g \pi r^2 H$$

$$B = \rho g V' = \rho g \left(\frac{1}{3} \pi r'^2 x \right)$$

と表せる。 $W = B$ より、

$$\rho g \left(\frac{1}{3} \pi r'^2 x \right) = 0.2 \rho g \pi r^2 H$$

$$x = 0.6 \left(\frac{r'}{r} \right)^2 H = 0.6 \left(\frac{H \tan \theta}{x \tan \theta} \right)^2 H$$

したがって、 $x = 0.6^{\frac{1}{3}} H \dots (\ast)$

円錐体の頂点から重心までの距離は、 $\overline{BG} = \frac{3}{4} H$ 、同じく浮心までの距離は、 $\overline{BC} = \frac{3}{4} x$ である。よって、浮心から重心までの距離は

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = \frac{3}{4} (H - x)$$

となり、傾心高は

$$\begin{aligned} \overline{MG} &= \frac{I_y}{V} - \overline{CG} = \frac{\frac{\pi r'^4}{4}}{\frac{1}{3} \pi r'^2 x} - \frac{3}{4} (H - x) = \frac{\frac{1}{4} \pi x^4 \tan^4 \theta}{\frac{1}{3} \pi x^3 \tan^2 \theta} - \frac{3}{4} (H - x) \\ &= \frac{3}{4} x \tan^2 \theta - \frac{3}{4} (H - x) \\ &= \frac{3}{4} (x \tan^2 \theta - H + x) \end{aligned}$$

となる。式 (\ast) を代入してさらに整理すると、

$$\begin{aligned} \overline{MG} &= \frac{3}{4} (x \tan^2 \theta - H + x) = \frac{3}{4} \left(0.6^{\frac{1}{3}} H \tan^2 \theta - H + 0.6^{\frac{1}{3}} H \right) \\ &= \frac{3}{4} \left(0.6^{\frac{1}{3}} (\tan^2 \theta + 1) - 1 \right) H \end{aligned}$$

$\overline{MG} > 0$ を満たす θ の場合に安定し、 $\overline{MG} = 0$ で中立、 $\overline{MG} < 0$ で不安定となる。求める θ は、

$$\overline{MG} = 0 \text{ から式を変形して、} \theta = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{0.6^{\frac{1}{3}}} - 1} \right) = 23.3^\circ \text{ となる。}$$

2-3

予習

1.

物体は列車の進行方向とは反対向きに、 Ma の慣性力を受ける。

2.

$$\text{周期 } T = \frac{t}{n} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ s}, \quad \text{角速度 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.5} = 2.5 \text{ rad/s}$$

演習問題 A

2-3-A1

トラックの加速度を

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{60-0}{5} = 12 \text{ m/s}^2$$

水平面と水面のなす角度を θ とすると

$$\tan \theta = \frac{a}{g}$$

より,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a}{g} = \tan^{-1} \frac{12}{9.8} = 50.7^\circ$$

2-3-A2

角速度は

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 50}{60} = 5.24 \text{ rad/s}$$

式 2-45 を変形して

$$\begin{aligned} h_a - h_0 &= \frac{\omega^2 a^2}{2g} \\ &= \frac{5.24^2 \times 0.1^2}{2 \times 9.8} = 0.01 \text{ m} \end{aligned}$$

演習問題 B

2-3-B1

静止状態の水槽中心での水面を原点として、水平方向に x 軸、鉛直方向に z 軸をとる (問題文横の図参照)。式 2-35 において、

$$X = -a \cos \theta$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g - a \sin \theta$$

として解き、境界条件を与えると

$$z = \frac{a \cos \theta}{g + a \sin \theta} x$$

となる。水平面と水面のなす角度を β とすると、

$$\beta = \tan^{-1} \frac{a \cos \theta}{g + a \sin \theta}$$

2-3-B2

式 2-35 において,

$$X = g \sin \theta \cos \theta$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g + g \sin \theta \sin \theta$$

として, $x=0$ で $y=0$ のもとで積分すると

$$z = \frac{g \sin \theta \cos \theta}{-g + g \sin \theta \sin \theta} x = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \sin \theta \sin \theta} x$$

となる。水平面と水面のなす角度を β とすると

$$\tan \beta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \sin \theta \sin \theta}$$

よって,

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \sin \theta \sin \theta}$$

2-3-B3

容器の中心を原点として, 水平方向に x 軸, 鉛直上向きに z 軸をとる。式 2-35 において,

$$X = -0.6\omega^2$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g$$

として解き, 境界条件を与えると

$$z = \frac{0.6\omega^2}{g} x$$

となる。水平面と水面のなす角度を β とすると

$$\tan \beta = \frac{0.6\omega^2}{g}$$

となる。この角度 β が x 軸に対する容器の傾き (60°) と平行になれば水はなくなる。

$$\tan \beta = \tan 60^\circ = \frac{0.5\omega^2}{g}$$

より

$$\omega = 5.31 \text{ rad/s}$$

したがって回転数 n は, $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ より,

$$n = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{60 \times 5.31}{2\pi} = 50.7 \text{ rpm}$$