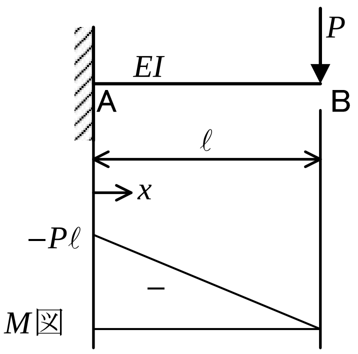
構造力学第１３章 Web にリンク

13-4 節　たわみ角法

予習

(1) v_B，θ_B（仮想仕事の原理）

［実系］



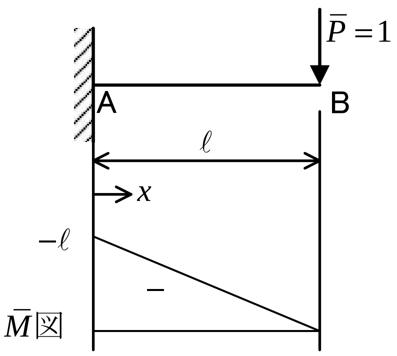
支点反力

$V_A = P$，$M_A = -P\ell$

曲げモーメント

$M = -Px$　（$0 \le x \le \ell$）

［仮想系１］v_B（自由端Ｂに鉛直下向きに単位仮想集中荷重）



支点反力

$\bar{V}_A = \bar{P} = 1$，$\bar{M}_A = -\ell$

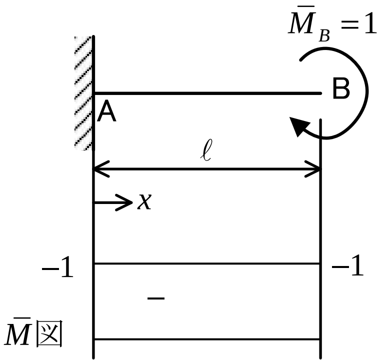
曲げモーメント

$\bar{M} = -x$　（$0 \le x \le \ell$）

仮想仕事の原理より，自由端Ｂのたわみ

$$\bar{P} \bullet v_B = v_B = \int \frac{\bar{M}M}{EI} dx = \int_0^{\ell} \frac{1}{EI}(-x)(-Px)\,dx = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

［仮想系２］θ_B（支点Ｂに時計回りの単位仮想モーメント荷重）



支点反力

$\bar{V}_A = 0$，$\bar{M}_A = -\bar{M}_B = -1$

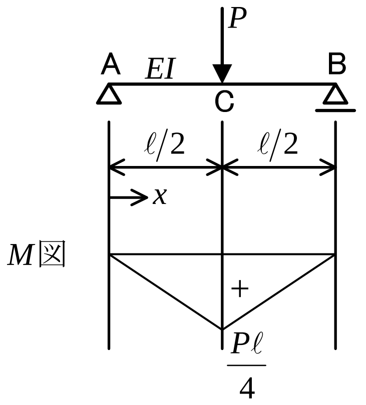
曲げモーメント

$\bar{M} = -\bar{M}_B = -1$　（$0 \le x \le \ell$）

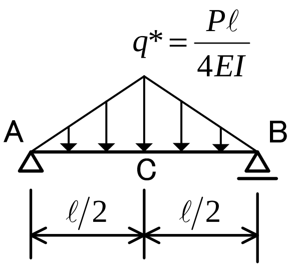
仮想仕事の原理より，自由端Ｂのたわみ

$$\bar{M}_B \bullet \theta_B = \theta_B = \int \frac{\bar{M}M}{EI} dx = \int_0^{\ell} \frac{1}{EI}(-1)(-Px)\,dx = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

(2) v_C， θ_A（弾性荷重法）



当該の問題の曲げモーメント図を曲げ剛性 EI で除したものを分布荷重（弾性荷重）として，対応する「共役ばり」（単純ばりの共役ばりは単純ばり）に作用させる。そのとき，「モールの定理」より，たわみ δ_C， θ_A はそれぞれ共役ばりの中央点Cの曲げモーメント $\bar{M}_C$，支点Aのせん断力 $\bar{Q}_A$ より求めることができる：



弾性荷重（最大値）

$$q^* = \frac{P\ell}{4EI}$$

支点反力

$$V_A{}^* = V_B{}^* = \frac{q^*\ell}{4}$$

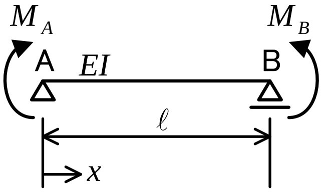
中央点Cのたわみ

$$v_C = M_C{}^* = V_A{}^* \times \frac{\ell}{2} - \frac{1}{4} q^* \ell \times \frac{\ell}{6} = \frac{q^* \ell^2}{12} = \frac{P\ell^3}{48EI}$$

支点Aのたわみ角（時計回りを正）

$$\theta_A = Q_A{}^* = V_A{}^* = \frac{q^* \ell^2}{4} = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

(3) θ_A， θ_B（微分方程式法）



支点反力

$$R_A=\frac{M_B-M_A}{\ell}, \quad R_B=\frac{M_A-M_B}{\ell}$$

曲げモーメント

$$M=R_Ax+M_A=\frac{M_B-M_A}{\ell}x+M_A \quad (0\le x\le \ell)$$

たわみvの微分方程式を下記境界条件の下で解く

$$EIv''=-M=\frac{M_A-M_B}{2}x-M_A \quad (0\le x\le \ell)$$

境界条件

支点A（$x=0$）：たわみ$v_A=0$

支点B（$x=\ell$）：たわみ$v_B=0$

つまり，積分定数をC_1， C_2とおくと，

$$EIv'=\frac{M_A-M_B}{2\ell}x^2-M_Ax+C_1$$

$$EIv=\frac{M_A-M_B}{6\ell}x^3-\frac{M_A}{2}x+C_1x+C_2$$

上記境界条件より， $C_1=\dfrac{(2M_A+M_B)\ell}{6}$， $C_2=0$，よって，たわみv，たわみ角$v'=\theta$は，

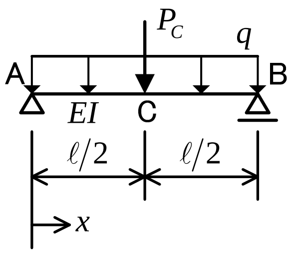
$$EIv'=EI\theta=\frac{M_A-M_B}{2\ell}x^2-M_Ax+\frac{(2M_A+M_B)\ell}{6}$$

$$EIv=\frac{M_A-M_B}{6\ell}x^3-\frac{M_A}{2}x^2+\frac{(2M_A+M_B)\ell}{6}x$$

これより，

$$\theta_A=\theta(x=0)=\frac{(2M_A+M_B)\ell}{6EI}, \quad \theta_B=\theta(x=\ell)=-\frac{(M_A+2M_B)\ell}{6EI}$$

(4) v_C，θ_B（カステリアーノの定理）



点Ｃのたわみ δ_C（鉛直下向き）を求めるためには，点Ｃに鉛直下向きの集中荷重 P_C を付加した系を考える。

支点反力

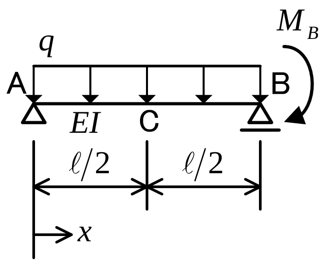
$$V_A = V_B = \frac{q\ell}{2} + \frac{P_C}{2}$$

曲げモーメント（点Ｃで左右対称）

$$M = V_A x - \frac{q}{2}x^2 = \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2 + \frac{P_C}{2}x \ \rightarrow \ \frac{\partial M}{\partial P_C} = \frac{x}{2}$$

カステリアーノの定理より，

$$v_C = \left.\frac{\partial U}{\partial P_C}\right|_{P_C=0} = \int \frac{M|_{P_C=0}}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_C}dx = 2\times\int_0^{\ell/2}\frac{1}{EI}\left(\frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{5q\ell^4}{384EI}$$



また，支点Ｂのたわみ角 θ_B（時計回りを正）を求めるためには，支点Ｂに時計回りのモーメント荷重 M_B を付加した系を考える。

支点反力

$$V_A = \frac{q\ell}{2} - \frac{M_B}{\ell}, \quad V_B = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_B}{\ell}$$

曲げモーメント

$$M = V_A x - \frac{q}{2}x^2 = \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2 - \frac{M_B}{\ell}x \ \rightarrow \ \frac{\partial M}{\partial M_B} = -\frac{x}{\ell}$$

カステリアーノの定理より，

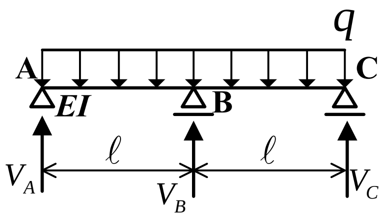
$$\theta_C = \left.\frac{\partial U}{\partial M_B}\right|_{M_B=0} = \int \frac{M|_{M_B=0}}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_B}dx = \int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2\right)\left(-\frac{x}{\ell}\right)dx = -\frac{q\ell^3}{24EI}$$

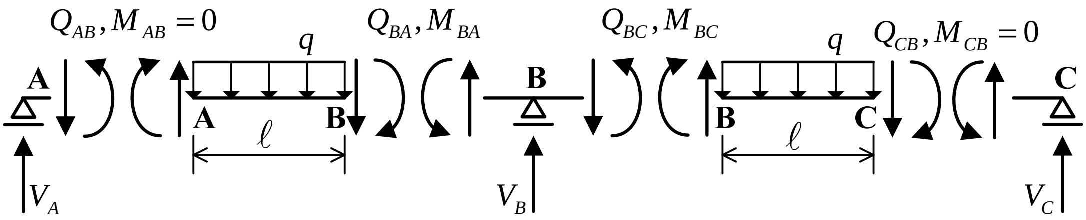
演習問題Ａ

13-4-A1

(1)（１３－２節余力法の本文中の説明例題と同じ）

たわみ角法





基準剛度と各部材の剛度

$$K_0 = \ell/I\,,\quad k_{AB} = k_{BC} = 1$$

部材回転角

すべてゼロ

たわみ角式

(i)部材ＡＢ（左端Ａヒンジ）

$$M_{AB} = 0\,,\qquad M_{BA} = 1\times\left(\frac{3}{2}\varphi_B\right) + H_{BA} = \frac{3}{2}\varphi_B + \frac{q\ell^2}{8}$$

(ii)部材ＢＣ（右端Ｃヒンジ）

$$M_{BC} = 1\times\left(\frac{3}{2}\varphi_B\right) + H_{BC} = \frac{3}{2}\varphi_B - \frac{q\ell^2}{8}\,,\qquad M_{CB} = 0$$

節点方程式（節点Ｂ）は,

$$M_{AB} + M_{BC} = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_B = 0$$ （たわみは中央支点Ｂで左右対称）

材端モーメント

$$M_{AB} = 0\,,\qquad M_{BA} = \frac{q\ell^2}{8}\,,\qquad M_{BC} = -\frac{q\ell^2}{8}\,,\qquad M_{CB} = 0$$

材端せん断力

(i)部材ＡＢ

$$\sum M_{(\mathrm{A})}=0\ :\ M_{BA}+Q_{BA}\ell+\frac{q\ell^2}{2}=0 \quad\rightarrow\quad Q_{BA}=-\frac{M_{BA}}{\ell}-\frac{q\ell}{2}=-\frac{5}{8}q\ell$$

$$\sum V=0\ :\ Q_{AB}=Q_{BA}+q\ell=\frac{3}{8}q\ell$$

(i)部材ＢＣ

$$\sum M_{(\mathrm{B})}=0\ :\ M_{BC}+\frac{q\ell^2}{2}+Q_{CB}\ell=0 \quad\rightarrow\quad Q_{CB}=-\frac{M_{BC}}{\ell}-\frac{q\ell}{2}=-\frac{3}{8}q\ell$$

$$\sum V=0\ :\ Q_{BC}=q\ell+Q_{CB}=\frac{3}{8}q\ell$$

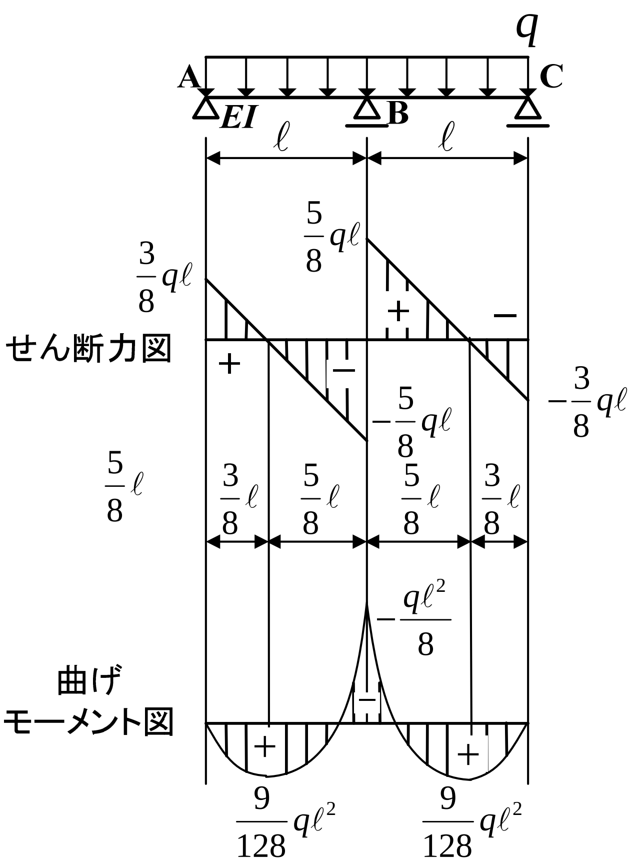
支点反力

$$V_A=Q_{AB}=\frac{3}{8}q\ell$$

$$V_B=Q_{BC}-Q_{BA}=\frac{5}{4}q\ell$$

$V_C=-Q_{CB}=\dfrac{3}{8}q\ell$ （もちろん，$V_A+V_B+V_C=2q\ell$ → ＯＫ）

断面力図



参考（三連モーメント法）

三連モーメント式

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{I}\right)M_B+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_C=6E\left(\theta_B^L-\theta_B^R\right)$$

ここで，$M_A=0$，$M_C=0$，$\theta_B^L=-\dfrac{q\ell^3}{24EI}$，$\theta_B^R=\dfrac{q\ell^3}{24EI}$ より，

$$M_B=-\frac{q\ell^2}{8}$$

支点反力

$$V_A=\frac{q\ell}{2}+\frac{M_B}{\ell}=\frac{3}{8}q\ell$$

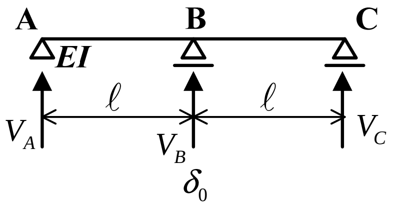
$$V_B=\left(\frac{q\ell}{2}-\frac{M_B}{\ell}\right)+\left(\frac{q\ell}{2}-\frac{M_B}{\ell}\right)=\frac{5}{4}q\ell$$

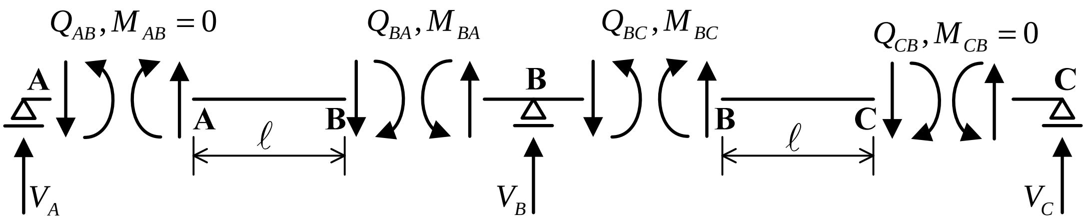
$$V_C=\frac{q\ell}{2}+\frac{M_B}{\ell}=\frac{3}{8}q\ell$$

（もちろん，$V_A+V_B+V_C=2q\ell$　→　ＯＫ）

(2)

たわみ角法





基準剛度と各部材の剛度

$$K_0=\ell/I\,,\quad k_{AB}=k_{BC}=1$$

部材回転角

$$R_{AB}=\frac{\delta_0-0}{\ell}=\frac{\delta_0}{\ell}\quad\rightarrow\quad\psi_{AB}=-6EK_0R_{AB}=-\frac{6EI}{\ell^2}\delta_0$$

$$R_{BC}=\frac{0-\delta_0}{\ell}=-\frac{\delta_0}{\ell}\quad\rightarrow\quad\psi_{BC}=-6EK_0R_{BC}=\frac{6EI}{\ell^2}\delta_0$$

たわみ角式

(i)部材ＡＢ（左端Ａヒンジ）

$$M_{AB}=0\,,\qquad M_{BA}=1\times\left(\frac{3}{2}\varphi_B+\frac{1}{2}\psi_{AB}\right)=\frac{3}{2}\varphi_B-\frac{3EI}{\ell^2}\delta_0$$

(ii)部材ＢＣ（右端Ｃヒンジ）

$$M_{BC}=1\times\left(\frac{3}{2}\varphi_B+\frac{1}{2}R_{BC}\right)=\frac{3}{2}\varphi_B+\frac{3EI}{\ell^2}\delta_0\,,\qquad M_{CB}=0$$

節点方程式（節点Ｂ）は,

$$M_{AB}+M_{BC}=0\quad\rightarrow\quad\varphi_B=0$$ （たわみは中央支点Ｂで左右対称）

材端モーメント

$$M_{AB}=0\,,\qquad M_{BA}=-\frac{3EI}{\ell^2}\delta_0\,,\qquad M_{BC}=\frac{3EI}{\ell^2}\delta_0\,,\qquad M_{CB}=0$$

材端せん断力

(i)部材ＡＢ

$$\sum M_{(A)} = 0 \;:\; M_{BA} + Q_{BA}\ell = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{BA} = -\frac{M_{BA}}{\ell} = \frac{3EI}{\ell^3}\delta_0$$

$$\sum V = 0 \;:\; Q_{AB} = Q_{BA} = \frac{3EI}{\ell^3}\delta_0$$

(i)部材ＢＣ

$$\sum M_{(B)} = 0 \;:\; M_{BC} + Q_{CB}\ell = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{CB} = -\frac{M_{BC}}{\ell} = -\frac{3EI}{\ell^3}\delta_0$$

$$\sum V = 0 \;:\; Q_{BC} = Q_{CB} = -\frac{3EI}{\ell^3}\delta_0$$

支点反力

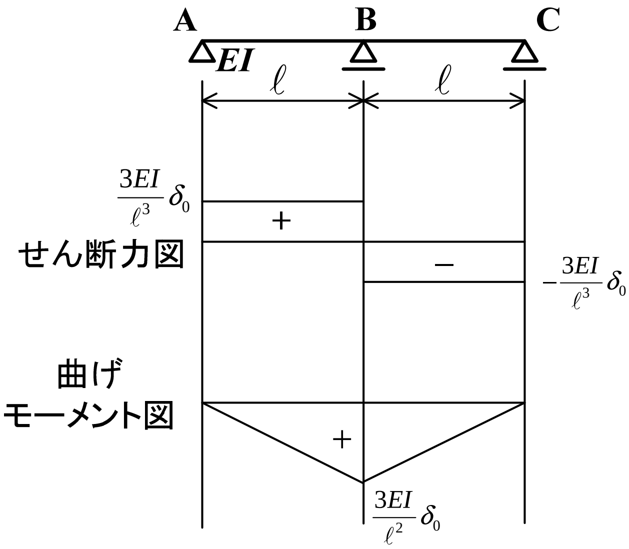
$$V_A = Q_{AB} = \frac{3EI}{\ell^3}\delta_0$$

$$V_B = Q_{BC} - Q_{BA} = -\frac{6EI}{\ell^3}\delta_0$$

$$V_C = -Q_{CB} = \frac{3EI}{\ell^3}\delta_0$$

（もちろん，$V_A + V_B + V_C = 0$ → ＯＫ）

断面力図（支点Ｂが鉛直下向きにδ_0沈下）



参考（三連モーメント法）

部材回転角

$$R_{AB} = \frac{\delta_0 - 0}{\ell} = \frac{\delta_0}{\ell}, \quad R_{BC} = \frac{0 - \delta_0}{\ell} = -\frac{\delta_0}{\ell}$$

三連モーメント式

$$\left(\frac{\ell}{I}\right) M_A + 2\left(\frac{\ell}{I} + \frac{\ell}{I}\right) M_B + \left(\frac{\ell}{I}\right) M_C = 6E\left(R_B^L - R_B^R\right)$$

ここで，$M_A = 0$，$M_C = 0$，$R_B^L = R_{AB} = \frac{\delta_0}{\ell}$，$R_B^R = -\frac{\delta_0}{\ell}$ より，

$$M_B = \frac{3EI}{\ell^2}\delta_0$$

支点反力

$$V_A = \frac{M_B}{\ell} = \frac{3EI}{\ell^3}\delta_0$$

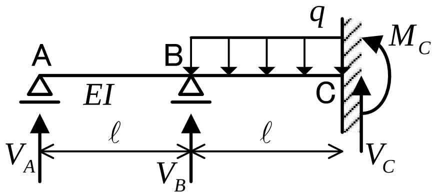
$$V_B = \left(-\frac{M_B}{\ell}\right) + \left(-\frac{M_B}{\ell}\right) = -\frac{6EI}{\ell^3}\delta_0$$

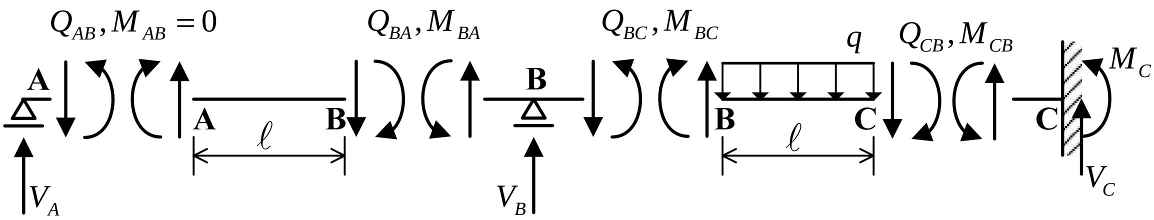
$$V_C = \frac{M_B}{\ell} = \frac{3EI}{\ell^3}\delta_0$$

（もちろん，$V_A + V_B + V_C = 0$　→　ＯＫ）

(3)（１３－２節余力法の演習問題 13-2-B1(2)と同じ）

たわみ角法





基準剛度と各部材の剛度

$K_0 = \ell/I$， $k_{AB} = k_{BC} = 1$

部材回転角

すべてゼロ

たわみ角式

(i)部材ＡＢ（左端Ａヒンジ）

$$M_{AB} = 0, \qquad M_{BA} = 1 \times \left(\frac{3}{2} \varphi_B \right) = \frac{3}{2} \varphi_B$$

(ii)部材ＢＣ（支点Ｃ固定端： $\varphi_C = 0$）

$$M_{BC} = 1 \times (2\varphi_B) + C_{BC} = 2\varphi_B - \frac{q\ell^2}{12}$$

$$M_{CB} = 1(\varphi_B) + C_{CB} = \varphi_B + \frac{q\ell^2}{12}$$

節点方程式（節点Ｂ）は,

$$M_{AB} + M_{BC} = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_B = \frac{q\ell^2}{42}$$

材端モーメント

$$M_{AB} = 0, \qquad M_{BA} = \frac{q\ell^2}{28}, \qquad M_{BC} = -\frac{q\ell^2}{28}, \qquad M_{CB} = 0$$

材端せん断力

(i)部材ＡＢ

$$\sum M_{(\mathrm{A})}=0\ :\ M_{BA}+Q_{BA}\ell=0 \quad \rightarrow \quad Q_{BA}=-\frac{M_{BA}}{\ell}=-\frac{q\ell}{28}$$

$$\sum V=0\ :\ Q_{AB}=Q_{BA}=-\frac{q\ell}{28}$$

(i)部材ＢＣ

$$\sum M_{(\mathrm{B})}=0\ :\ M_{BC}+M_{CB}+\frac{q\ell^2}{2}+Q_{CB}\ell=0 \quad \rightarrow \quad Q_{CB}=-\frac{M_{BC}+M_{CB}}{\ell}-\frac{q\ell}{2}=-\frac{4}{7}q\ell$$

$$\sum V=0\ :\ Q_{BC}=q\ell+Q_{CB}=\frac{3}{7}q\ell$$

支点反力

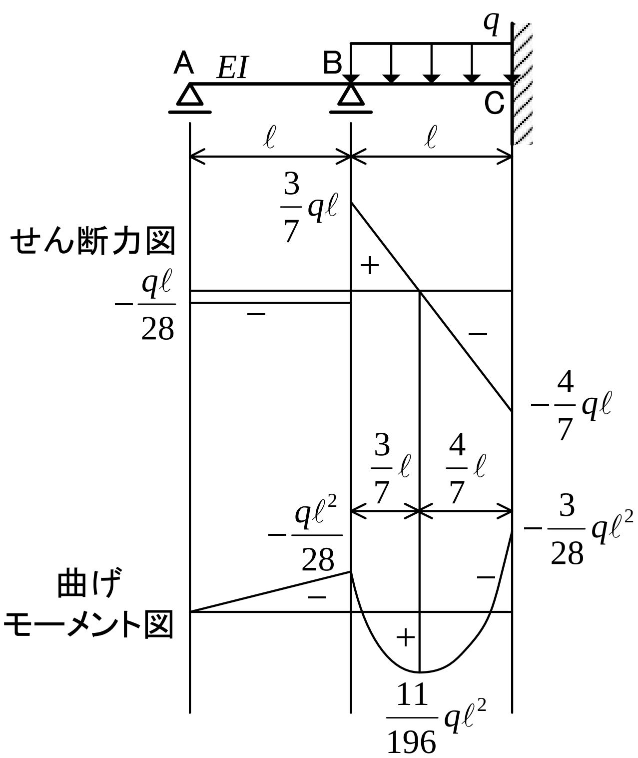
$$V_A=Q_{AB}=-\frac{q\ell}{28}$$

$$V_B=Q_{BC}-Q_{BA}=\frac{13}{28}q\ell$$

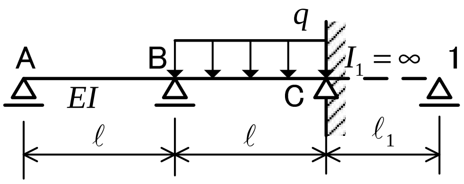
$$V_C=-Q_{CB}=\frac{4}{7}q\ell$$

（もちろん，$V_A+V_B+V_C=q\ell$ → ＯＫ）

断面力図



参考（三連モーメント法）



三連モーメント式

(i)はりＡ－Ｂ－Ｃ（支点Ｂ）

三連モーメント式

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{I}\right)M_B+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_C=6E\left(\theta_B^L-\theta_B^R\right)$$

ここで，$M_A=0$，$\theta_B^L=0$，$\theta_B^R=\dfrac{q\ell^3}{24EI}$ より，

$$4M_B+M_C=-\frac{q\ell^2}{4} \quad ①$$

(ii)はりＢ－Ｃ－１（支点Ｂ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_B+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_C+\left(\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_1=6E\left(\theta_C^L-\theta_C^R\right)$$

ここで，$I_1=\infty$，$\theta_C^L=-\dfrac{q\ell^3}{24EI}$，$\theta_C^R=0$ より，

$$M_B+2M_C=-\frac{q\ell^2}{4} \quad ②$$

①と②から，

$$M_B=-\frac{q\ell^2}{28},\quad M_C=-\frac{3}{28}q\ell^2$$

支点反力

$$V_A=\frac{M_B}{\ell}=-\frac{q\ell}{28}$$

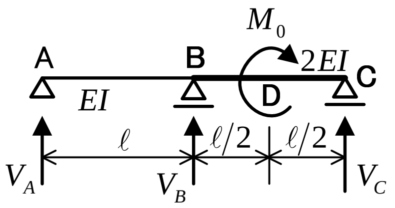
$$V_B=\left(-\frac{M_B}{\ell}\right)+\left(\frac{q\ell}{2}-\frac{M_B}{\ell}+\frac{M_C}{\ell}\right)=\frac{13}{28}q\ell$$

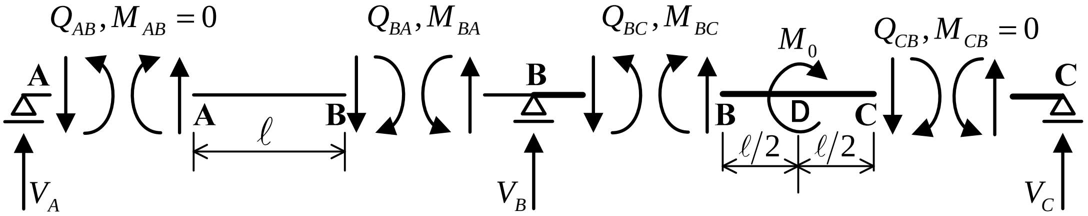
$$V_C=\frac{q\ell}{2}+\frac{M_B}{\ell}-\frac{M_C}{\ell}=\frac{16}{28}q\ell$$

（もちろん，$V_A+V_B+V_C=q\ell$　→　ＯＫ）

(4)

たわみ角法





基準剛度と各部材の剛度

$$K_0 = \ell/I\ ,\quad k_{AB} = 1\ ,\quad k_{BC} = \frac{2I/\ell}{K_0} = 2$$

部材回転角

すべてゼロ

たわみ角式

(i)部材ＡＢ（左端Ａヒンジ）

$$M_{AB} = 0\ ,\qquad M_{BA} = 1\times\left(\frac{3}{2}\varphi_B\right) = \frac{3}{2}\varphi_B$$

(ii)部材ＢＣ（右端Ｃヒンジ）

$$M_{BC} = 2\times\left(\frac{3}{2}\varphi_B\right) + H_{BC} = 3\varphi_B + \frac{M_0}{8}$$

$$M_{CB} = 0$$

節点方程式（節点Ｂ）は,

$$M_{AB} + M_{BC} = 0 \quad\rightarrow\quad \varphi_B = -\frac{M_0}{36}$$

材端モーメント

$$M_{AB} = 0\ ,\qquad M_{BA} = -\frac{M_0}{24}\ ,\qquad M_{BC} = \frac{M_0}{24}\ ,\qquad M_{CB} = 0$$

材端せん断力

(i)部材ＡＢ

$$\sum M_{(\mathrm{A})}=0\ :\ M_{BA}+Q_{BA}\ell=0 \quad \rightarrow \quad Q_{BA}=-\frac{M_{BA}}{\ell}=\frac{M_0}{24\ell}$$

$$\sum V=0\ :\ Q_{AB}=Q_{BA}=\frac{M_0}{24\ell}$$

(i)部材ＢＣ

$$\sum M_{(\mathrm{B})}=0\ :\ M_{BC}+M_0+Q_{CB}\ell=0 \quad \rightarrow \quad Q_{CB}=-\frac{M_{BC}+M_0}{\ell}=-\frac{25M_0}{24\ell}$$

$$\sum V=0\ :\ Q_{BC}=Q_{CB}=-\frac{25M_0}{24\ell}$$

支点反力

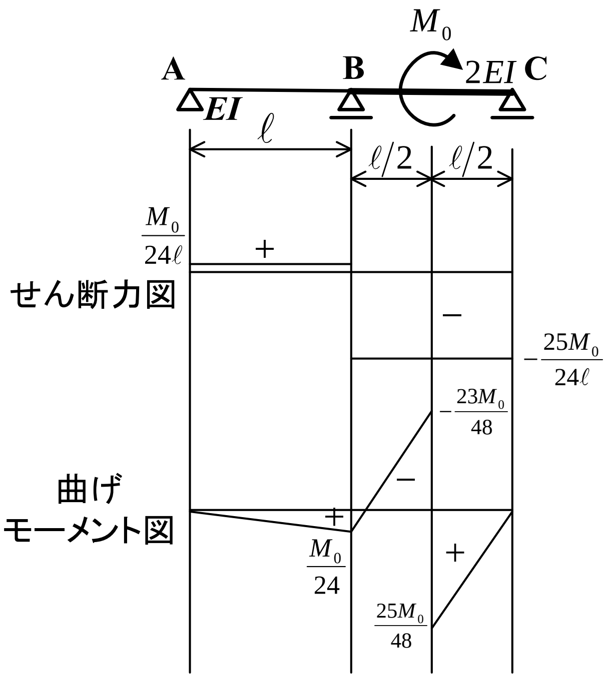
$$V_A=Q_{AB}=\frac{M_0}{24\ell}$$

$$V_B=Q_{BC}-Q_{BA}=-\frac{13M_0}{12\ell}$$

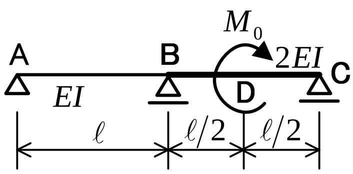
$$V_C=-Q_{CB}=\frac{25M_0}{24\ell}$$

（もちろん，$V_A+V_B+V_C=0$ → ＯＫ）

断面力図



参考（三連モーメント法



三連モーメント式

三連モーメント式

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A + 2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{I}\right)M_B + \left(\frac{\ell}{I}\right)M_C = 6E\left(\theta_B^L - \theta_B^R\right)$$

ここで， $M_A = 0$， $M_C = 0$， $\theta_B^L = 0$， $\theta_B^R = \frac{M_0\ell}{6(2EI)}\left(1-3\times\frac{1}{4}\right) = -\frac{M_0\ell}{48EI}$ より，

$$M_B = \frac{M_0}{24}$$

支点反力

$$V_A = \frac{M_B}{\ell} = \frac{M_0}{24\ell}$$

$$V_B = \left(-\frac{M_B}{\ell}\right) + \left(-\frac{M_0}{\ell} - \frac{M_B}{\ell}\right) = -\frac{13M_0}{12}$$

$$V_C = \frac{M_0}{\ell} + \frac{M_B}{\ell} = \frac{25M_0}{24\ell}$$

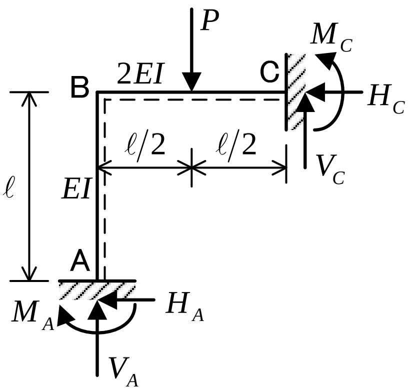
（もちろん， $V_A + V_B + V_C = 0$　→　ＯＫ）

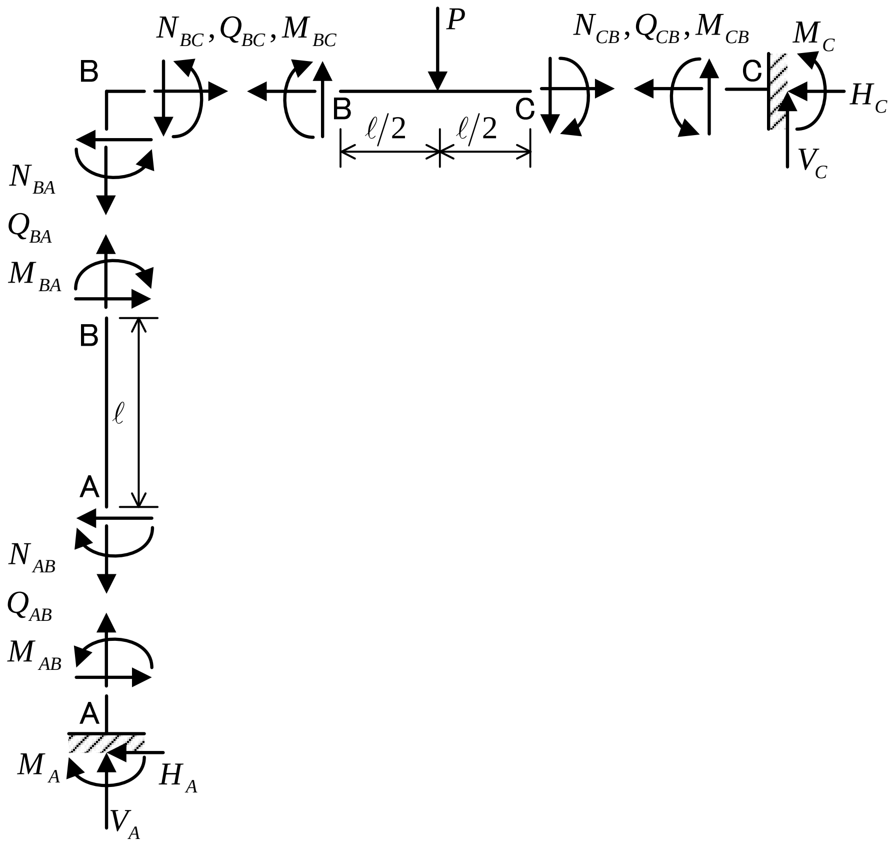
演習問題Ｂ

13-4-B1

(1)

たわみ角法





基準剛度と各部材の剛度

$K_0 = \ell / I$，　$k_{AB} = 1$，　$k_{BC} = 2$

部材回転角

全てゼロ

たわみ角式

(i)部材ＡＢ（支点Ａ固定端：$\varphi_A = 0$）

$$M_{AB} = 1\left(2\varphi_A + \varphi_B\right) = \varphi_B$$

$$M_{BA} = 1 \times (\varphi_A + 2\varphi_B) = 2\varphi_B$$

(ii)部材ＢＣ（支点Ｃ固定端：$\varphi_C = 0$）

$$M_{BC} = 2 \times (2\varphi_B + \varphi_C) + \mathrm{C}_{BC} = 4\varphi_B - \frac{P\ell}{8}$$

$$M_{CB} = 2 \times (\varphi_B + 2\varphi_C) + \mathrm{C}_{CB} = 2\varphi_B + \frac{P\ell}{8}$$

節点方程式（節点Ｂ）

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_B = \frac{P\ell}{48}$$

材端モーメント

(i)部材ＡＢ

$$M_{AB} = \varphi_B = \frac{P\ell}{48}, \quad M_{BA} = 2\varphi_B = \frac{P\ell}{24}$$

(ii)部材ＢＣ

$$M_{BC} = 4\varphi_B - \frac{P\ell}{8} = -\frac{P\ell}{24}, \quad M_{CB} = 2\varphi_B + \frac{P\ell}{8} = \frac{P\ell}{6}$$

材端せん断力

(i)部材ＡＢ

$$\sum M_{(\mathrm{A})} = 0 \ : \ M_{AB} + M_{BA} + Q_{BA}\ell = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{BA} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell} = -\frac{P}{16}$$

$$\sum V = 0 \ : \ Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{P}{16}$$

(ii)部材ＢＣ

$$\sum M_{(\mathrm{C})} = 0 \ : \ M_{BC} + M_{CB} + Q_{BC}\ell - \frac{P\ell}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{BC} = \frac{P}{2} - \frac{M_{BC} + M_{CB}}{\ell} = \frac{3}{8}P$$

$$\sum V = 0 : Q_{CB} = Q_{BC} - P = -\frac{5}{8}P$$

材端軸力（節点Ｂ）

$$N_{BC} = Q_{BA} = -\frac{P}{16} = N_{CB}, \quad N_{BA} = -Q_{BC} = -\frac{3}{8}P = N_{AB}$$

支点反力

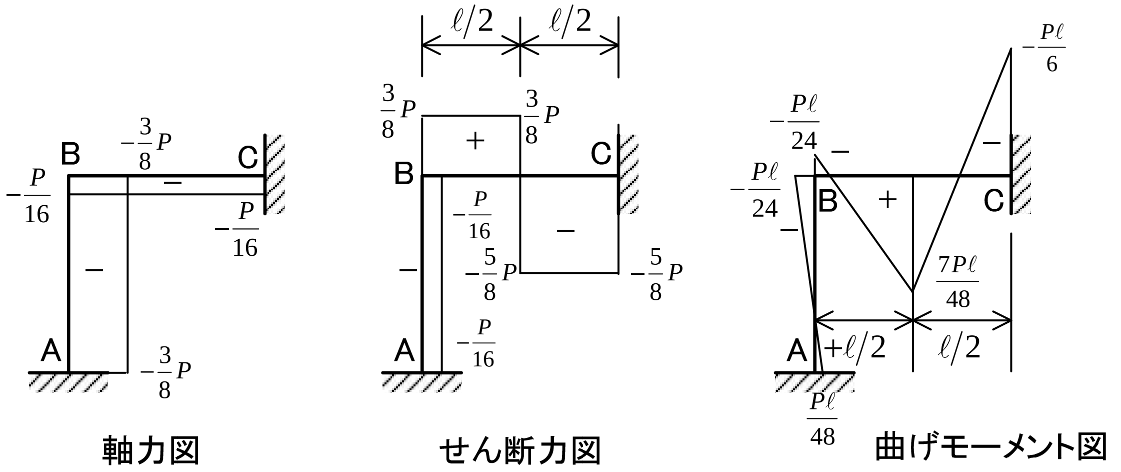
(i)支点A

$$H_A = Q_{AB} = -\frac{P}{16},\quad V_A = -N_{AB} = \frac{3}{8}P,\quad M_A = M_{AB} = \frac{P\ell}{48}$$

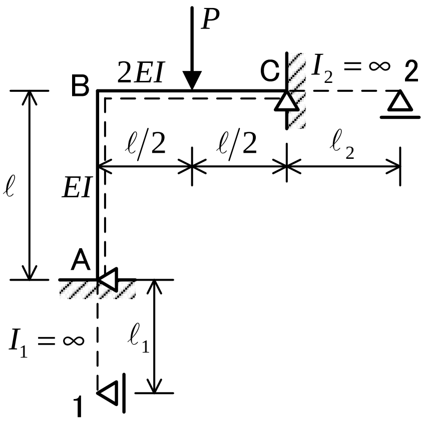
(ii)支点C

$$H_C = -N_{CB} = \frac{P}{16},\quad V_C = -Q_{CB} = \frac{5}{8}P,\quad M_C = -M_{CB} = -\frac{P\ell}{6}$$

断面力図



参考（三連モーメント法）



三連モーメント法をラーメンに適用する。部材回転角はゼロで，固定端Ａ，Ｃを仮想はりで置き換える。

三連モーメント式

(i)はり１－Ａ－Ｂ（支点Ａ）

$$\left(\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_1+2\left(\frac{\ell_1}{I_1}+\frac{\ell}{I}\right)M_A+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_B=0$$

ここで，$I_1=\infty$とすると，

$$2M_A+M_B=0 \qquad ①$$

(ii)はりＡ－Ｂ－Ｃ（節点Ｂ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{2I}\right)M_B+\left(\frac{\ell}{2I}\right)M_C=6E\left(\theta_B^L-\theta_B^R\right)$$

ここで，$\theta_B^L=0$，$\theta_B^L=\dfrac{P\ell^3}{16(2EI)}=\dfrac{P\ell^3}{32EI}$とおくと，

$$2M_A+6M_B+M_C=-\frac{3}{8}P\ell \qquad ②$$

(iii)はりＢ－Ｃ－２（支点Ｃ）

$$\left(\frac{\ell}{2I}\right)M_B+2\left(\frac{\ell}{2I}+\frac{\ell_2}{I_2}\right)M_C+\left(\frac{\ell_2}{I_2}\right)M_2=6E\left(\theta_C^L-\theta_C^R\right)$$

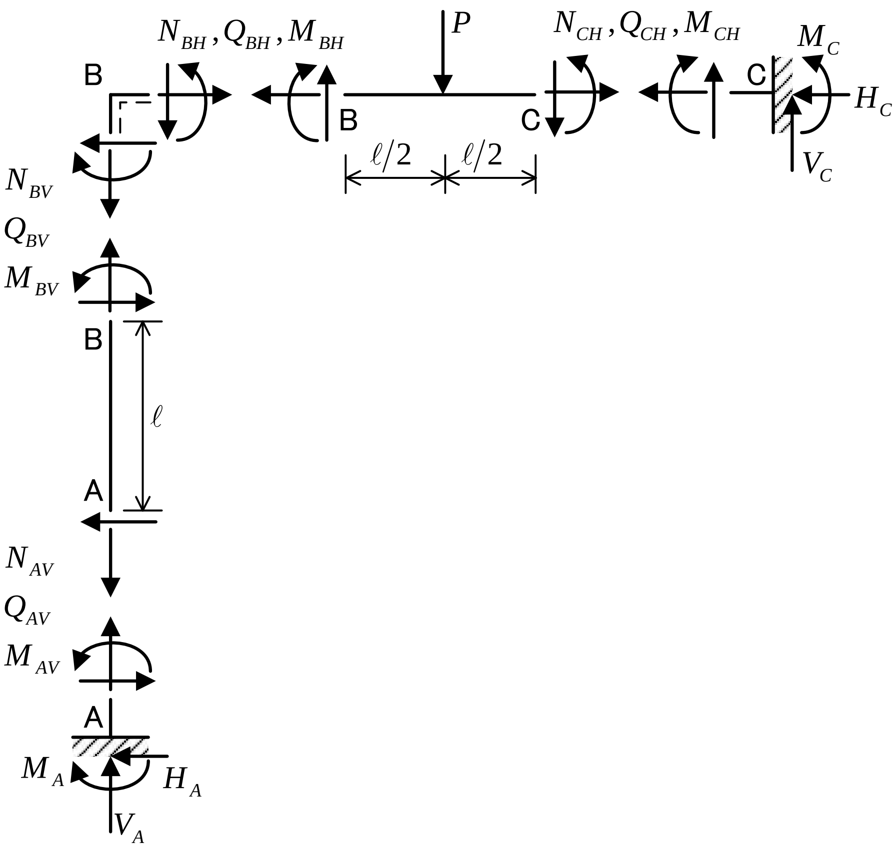
ここで，$I_2=\infty$,，$\theta_C^L=-\dfrac{P\ell^3}{16(2EI)}=-\dfrac{P\ell^3}{32EI}$，$\theta_C^R=0$とおくと，

$$M_B+2M_C=-\frac{3}{8}P\ell \qquad ③$$

①から③より，

$$M_A = \frac{P\ell}{48},\quad M_B = -\frac{P\ell}{24},\quad M_C = -\frac{P\ell}{6}$$

たわみ角法と同様に，断面力と支点反力を求める（曲げモーメントの正の向きに注意！）。



断面力

$$M_{AV} = M_A = \frac{P\ell}{48},\quad M_{BV} = M_{BH} = M_B = -\frac{P\ell}{24},\quad M_{CH} = M_C = -\frac{P\ell}{6}$$

(i)部材ＡＢ

$$\sum M_{(A)} = 0\ :\ M_{AV} - M_{BV} + Q_{BV}\ell = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{BV} = \frac{M_{BV} - M_{AV}}{\ell} = -\frac{P}{16}$$

$$\sum H = 0\ :\ Q_{AV} = Q_{BV} = -\frac{P}{16}$$

$$\sum V = 0\ :\ N_{AV} = N_{BV} = -\frac{3}{8}P$$ （←下記（iii））

(ii)節点Ｂ

$$\sum M_{(B)} = 0\ :\ M_{BV} - M_{BH} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{BV} = M_{BH} = M_B = -\frac{P\ell}{24}$$

$$\sum H = 0\ :\ N_{BH} = Q_{BV} = -\frac{P}{16}$$

$$\sum V = 0\ :\ N_{BV} = -Q_{BH} = -\frac{3}{8}P$$ （←下記(iii)）

(iii)部材ＢＣ

$$\sum M_{(\mathrm{C})}=0\ :\ M_{BH}-M_{CH}+Q_{BH}\ell-\frac{q\ell^2}{2}=0 \quad \rightarrow \quad Q_{BH}=\frac{q\ell}{2}+\frac{M_{CH}-M_{BH}}{\ell}=\frac{3}{8}P$$

$$\sum H=0\ :\ N_{CH}=N_{BH}=-\frac{P}{16}\quad (\leftarrow \text{上記(ii)})$$

$$\sum V=0\ :\ Q_{CH}=Q_{BH}-q\ell=-\frac{5}{8}P$$

支点反力

(i)支点Ａ

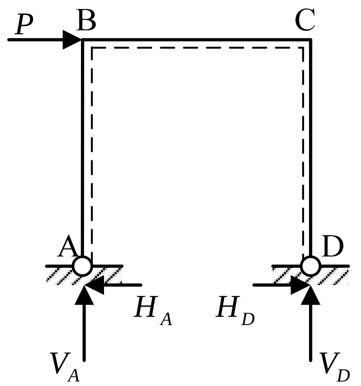
$$H_A=Q_{AV}=\frac{P}{16},\quad V_A=-N_{AV}=\frac{3}{8}P,\quad M_A=\frac{P\ell}{48}$$

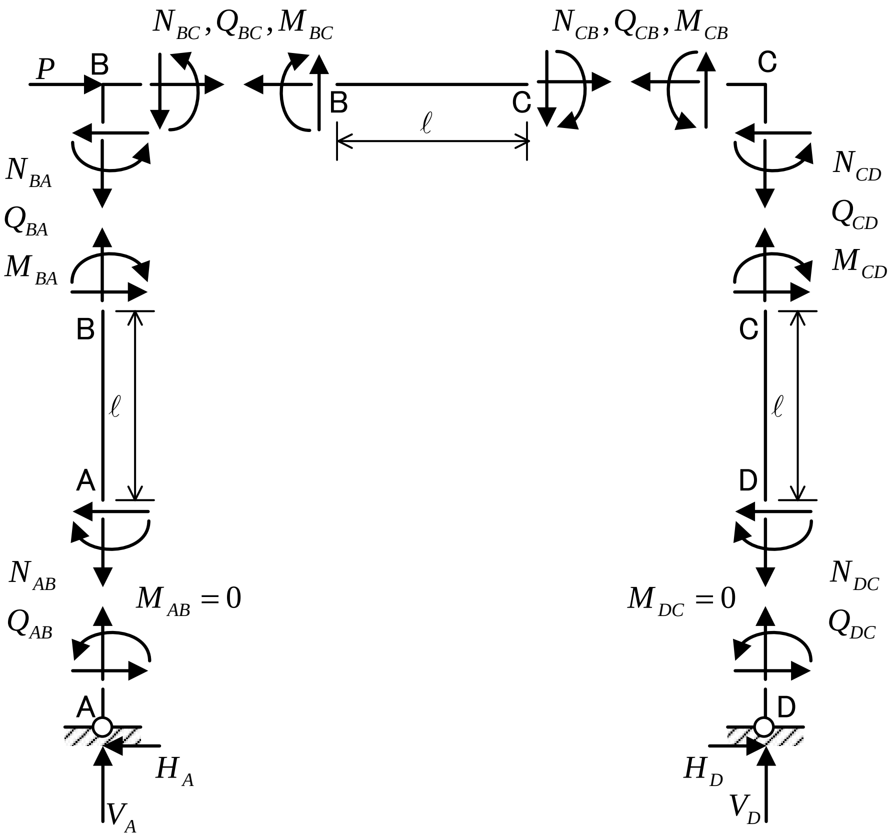
(ii)支点Ｃ

$$H_C=-N_{CH}=\frac{P}{16},\quad V_C=-Q_{CH}=\frac{5}{8}P,\quad M_C=M_{CH}=-\frac{P\ell}{6}$$

(2)

たわみ角法





基準剛度と各部材の剛度

$K_0 = \ell / I$， $k_{AB} = k_{BC} = k_{CD} = 1$

このラーメンには，水平荷重 P により節点Ｂ，Ｃは水平方向へ移動する。部材の軸方向の伸縮量は，曲げによる田和に量に比べて無視できるとすると，水平部材ＢＣは伸縮しないので，節点Ｂ，Ｃの水平移動量は同じであると考えられる。したがって，節点Ｂ，Ｃの水平移動により部材ＡＢ，ＣＤには同じ部材回転角 $R_{AB} = R_{CD} = R$ が生じる。つまり，

$$\psi_{AB} = \psi_{CV} = \psi = -6EK_0R$$

とおく。なお，水平部材ＢＣには部材回転角は生じない。

たわみ角式

(i)部材ＡＢ（左端Ａヒンジ）

$$M_{AB}=0$$

$$M_{BA}=1\times(\frac{3}{2}\varphi_B+\frac{1}{2}\psi)=\frac{3}{2}\varphi_B+\frac{1}{2}\psi$$

(ii)部材ＢＣ

$$M_{BC}=1\times(2\varphi_B+\varphi_C)=2\varphi_B+\varphi_C$$

$$M_{CB}=1\times(\varphi_B+2\varphi_C)=\varphi_B+2\varphi_C$$

(ii)部材ＣＤ（右端Ｄヒンジ）

$$M_{CD}=1\times(\frac{3}{2}\varphi_C+\frac{1}{2}\psi)=\frac{3}{2}\varphi_C+\frac{1}{2}\psi$$

$$M_{DC}=0$$

節点方程式

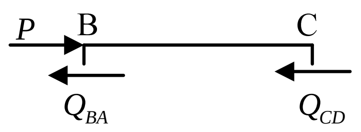
(i)節点Ｂ

$$M_{AB}+M_{BC}=0 \quad \rightarrow \quad 7\varphi_B+2\varphi_C+\psi=0 \qquad ①$$

(ii)節点Ｃ

$$M_{CB}+M_{CD}=0 \quad \rightarrow \quad 2\varphi_B+7\varphi_C+\psi=0 \qquad ②$$

層方程式（節点Ｂ，Ｃの直下の断面で）



$$\sum H=0\ :\ Q_{BA}+Q_{CD}=P$$

部材ＡＢ

$$\sum M_{(A)}=0\ :\ M_{BA}+Q_{BA}\ell=0 \rightarrow \quad Q_{BA}=-\frac{M_{BA}}{\ell}$$

部材ＣＤ

$$\sum M_{(D)}=0\ :\ M_{CD}+Q_{CD}\ell=0 \rightarrow \quad Q_{CD}=-\frac{M_{CD}}{\ell}$$

よって，層方程式にこれらを代入すると，

$$3\varphi_B+3\varphi_C+2\psi=-2P\ell \qquad ③$$

①，②，③より，

$$\varphi_B=\varphi_C=\frac{P\ell}{6}, \qquad \psi=-\frac{3}{2}P\ell \qquad (\rightarrow \quad R=-\frac{\psi}{6EK_0}=\frac{P\ell^2}{4EI})$$

材端モーメント

(i)部材ＡＢ

$$M_{AB}=0,\quad M_{BA}=-\frac{P\ell}{2}$$

(ii)部材ＢＣ

$$M_{BC}=\frac{P\ell}{2},\qquad M_{CB}=\frac{P\ell}{2}$$

(iii)部材ＣＤ

$$M_{CD}=-\frac{P\ell}{2},\qquad M_{DC}=0$$

材端せん断力

(i)部材ＡＢ

$$Q_{BA}=-\frac{M_{BA}}{\ell}=\frac{P}{2},\quad Q_{AB}=Q_{BA}=\frac{P}{2}$$

(ii)部材ＢＣ

$$\sum M_{(\mathrm{B})}=0\ :\ M_{BC}+M_{CB}+Q_{CB}\ell=0\ \rightarrow\ Q_{CB}=-P$$

$$\sum V=0:Q_{BC}-Q_{CB}=0\ \rightarrow\ Q_{BC}=-P$$

(iii)部材ＣＤ

$$Q_{CD}=-\frac{M_{CD}}{\ell}=\frac{P}{2},\quad Q_{DC}=Q_{CD}=\frac{P}{2}$$

材端軸力

(i)節点Ａ

$$N_{BA}=-Q_{BC}=P,\quad N_{AB}=N_{BA}=P$$

$$N_{BC}=Q_{BA}-P=-\frac{P}{2},\quad N_{CB}=N_{BC}=-\frac{P}{2}$$

(ii)節点Ｃ

$$N_{CD}=Q_{CB}=-P,\quad N_{DC}=N_{CD}=-P$$

$$N_{CB}=-Q_{CD}=-\frac{P}{2}\ \rightarrow\ \text{ＯＫ}$$

支点反力

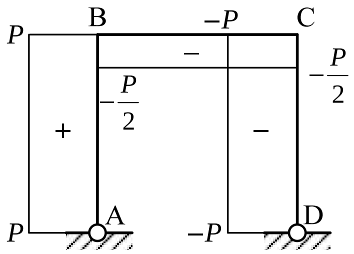
(i)支点Ａ

$$H_A=Q_{AB}=\frac{P}{2},\qquad V_A=-N_{AB}=-P$$

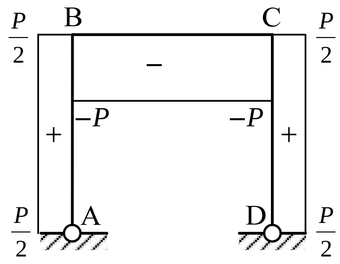
(ii)支点Ｄ

$$H_D=-Q_{DC}=-\frac{P}{2},\qquad V_D=-N_{DC}=P$$

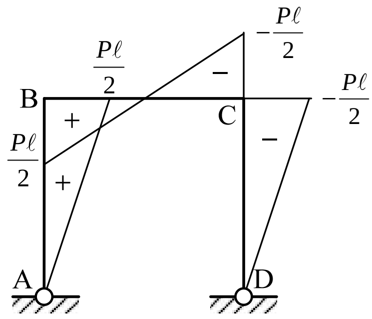
断面力図



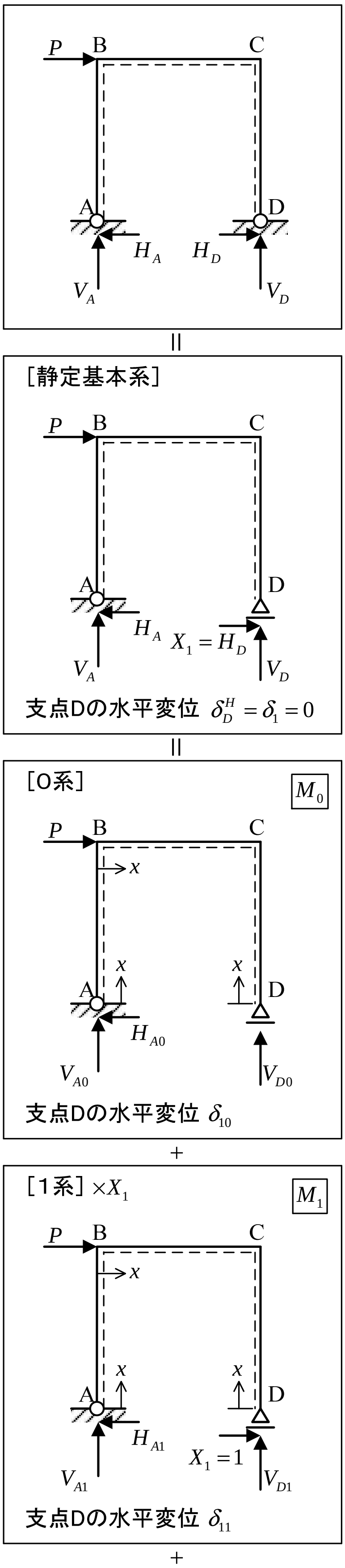
軸力図



せん断力図



曲げモーメント図



適合条件式
支点Dの水平変位 $\delta_D^H = \delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$

参考１（余力法）

不静定次数

$r = 4$, $h = 0$ → $n = r - 3 - h = 1$ ：１次不静定

不静定力（余力） $X_1 = H_D$

適合条件式

支点Ｄの水平変位 $\delta_D^H = \delta_1 = 0$

［０系］静定基本系に元の荷重

支点反力

$$H_{A0} = P,\quad V_{A0} = -P,\quad V_{D0} = P$$

断面力

(i)柱ＡＢ（$0 \le x \le \ell$）

$$N_0 = -V_{A0} = P,\quad Q_0 = H_{A0} = P,\quad M_0 = P\ell$$

(ii)はりＢＣ（$0 \le x \le \ell$）

$$N_0 = H_{A0} - P = 0,\quad Q_0 = V_{A0} = -P,\quad M_0 = P(\ell - x)$$

(iii)柱ＣＤ（$0 \le x \le \ell$）

$$N_0 = -V_{D0} = -P,\quad Q_0 = 0,\quad M_0 = 0$$

［１系］静定基本系に余力 X_1

支点反力

$$H_{A1} = 1,\quad V_{A1} = 0,\quad V_{D0} = 0$$

断面力

(i)柱ＡＢ（$0 \le x \le \ell$）

$$N_1 = -V_{A1} = 0,\quad Q_1 = H_{A1} = 1,\quad M_1 = x$$

(ii)はりＢＣ（$0 \le x \le \ell$）

$$N_1 = H_{A1} = 1,\quad Q_1 = V_{A1} = 0,\quad M_1 = \ell$$

(iii)柱ＣＤ（$0 \le x \le \ell$）

$$N_1 = -V_{D1} = 0,\quad Q_1 = -1,\quad M_1 = x$$

このとき，

$$\delta_{10}=\int\frac{M_1M_0}{EI}dx=\int_\ell^\ell\frac{1}{EI}(x)(Px)dx+\int_0^\ell\frac{1}{EI}(\ell)\{P(\ell-x)\}dx+\int_0^\ell\frac{1}{EI}(x)\times0dx=\frac{5P\ell^3}{6EI}$$

$$\delta_{11}=\int\frac{M_1M_1}{EI}dx=\int_\ell^\ell\frac{1}{EI}(x)^2dx+\int_0^\ell\frac{1}{EI}(\ell)^2dx+\int_\ell^\ell\frac{1}{EI}(x)^2dx=\frac{5\ell^3}{3EI}$$

したがって，適合条件式（支点Ｄの水平変位）

$$\delta_D^H=\delta_1=\delta_{10}+\delta_{11}X_1=0$$

に代入し，余力 X_1 について解くと，

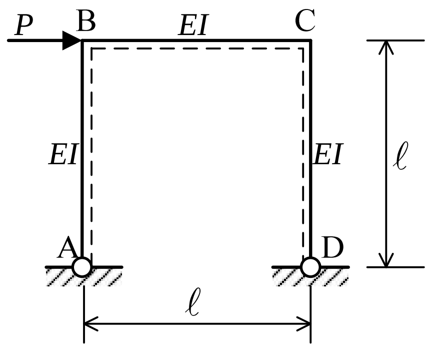
$$X_1=-\frac{P}{2}=H_D$$

支点反力

$$H_A=H_{A0}+H_{A1}X_1=\frac{P}{2},\quad V_A=V_{A0}+V_{A1}X_1=-P$$

$$H_D=X_1=-\frac{P}{2},\quad V_D=V_{D0}+V_{D1}X_1=P$$

参考２（三連モーメント法）



部材回転角

$R_{AB}=R_{CD}=R$，$R_{BC}=0$

三連モーメント式

(i)部材Ａ－Ｂ－Ｃ（節点Ｂ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{I}\right)M_B+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_C=6E\left(R_B^L-R_B^R\right)$$

ここで，$M_A=0$，$R_B^L=R$，$R_B^R=0$ より，$\psi=-\frac{6EI}{\ell}R$ とおくと，

$$4M_B+M_C=-\psi \qquad ①$$

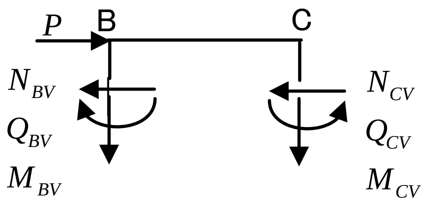
(ii)部材Ｂ－Ｃ－Ｄ（節点Ｃ）

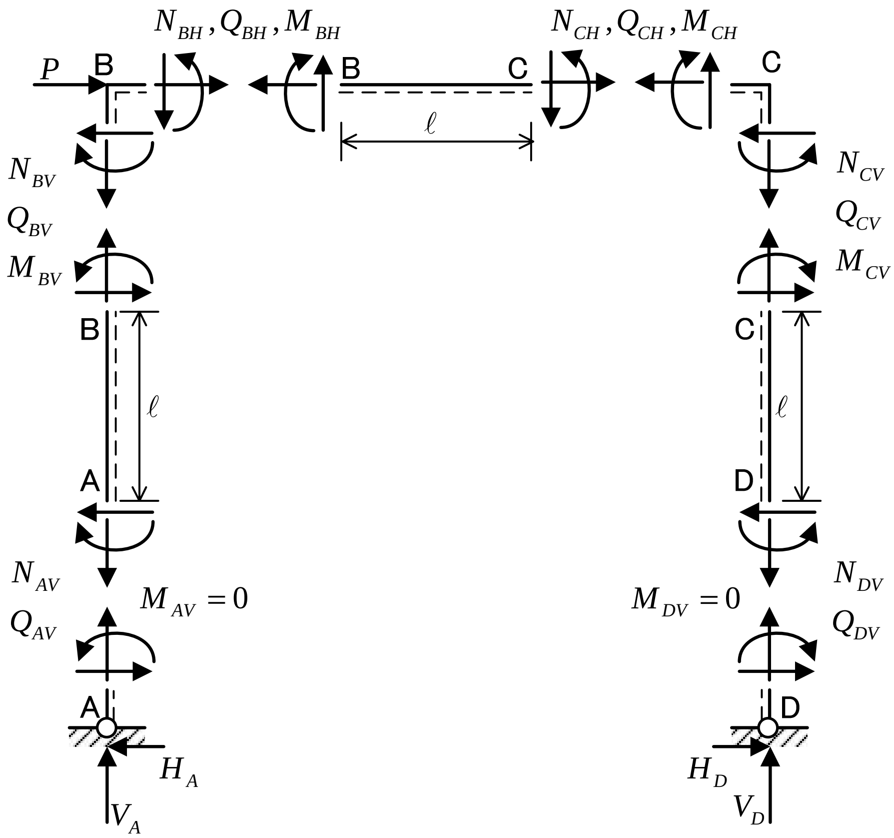
$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_B+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{I}\right)M_C+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_D=6E\left(R_C^L-R_C^R\right)$$

ここで，$M_D=0$，$R_C^L=0$，$R_C^R=R$ より，$\psi=-\frac{6EI}{\ell}R$ とおくと，

$$M_B+4M_C=\psi \qquad ②$$

層方程式





節点Ｂ，Ｃの直下で部材ＡＢ，ＣＤを切断し，

$$\sum H = 0 \ : \ Q_{BV} + Q_{CV} = P$$

部材ＡＢで，

$$\sum M_{(\mathrm{A})} = 0 \ : \ Q_{BV}\ell - M_{BV} = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{BV} = \frac{M_{BV}}{\ell} = \frac{M_B}{\ell}$$

部材ＡＢで，

$$\sum M_{(\mathrm{D})} = 0 \ : \ Q_{CV}\ell + M_{CV} = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{CV} = -\frac{M_{CV}}{\ell} = -\frac{M_C}{\ell}$$

よって，層方程式は

$$M_B - M_C = 0 \qquad ③$$

①～③より，

$$M_B = \frac{P\ell}{2}, \quad M_C = -\frac{P\ell}{2}, \quad \psi = \frac{3}{2}P\ell = -\frac{6EI}{\ell}R \quad \rightarrow \quad R = -\frac{P\ell^2}{4EI}$$

以下，たわみ角法と同様にして。部材の断面力と支点反力をすべて求めることができる。