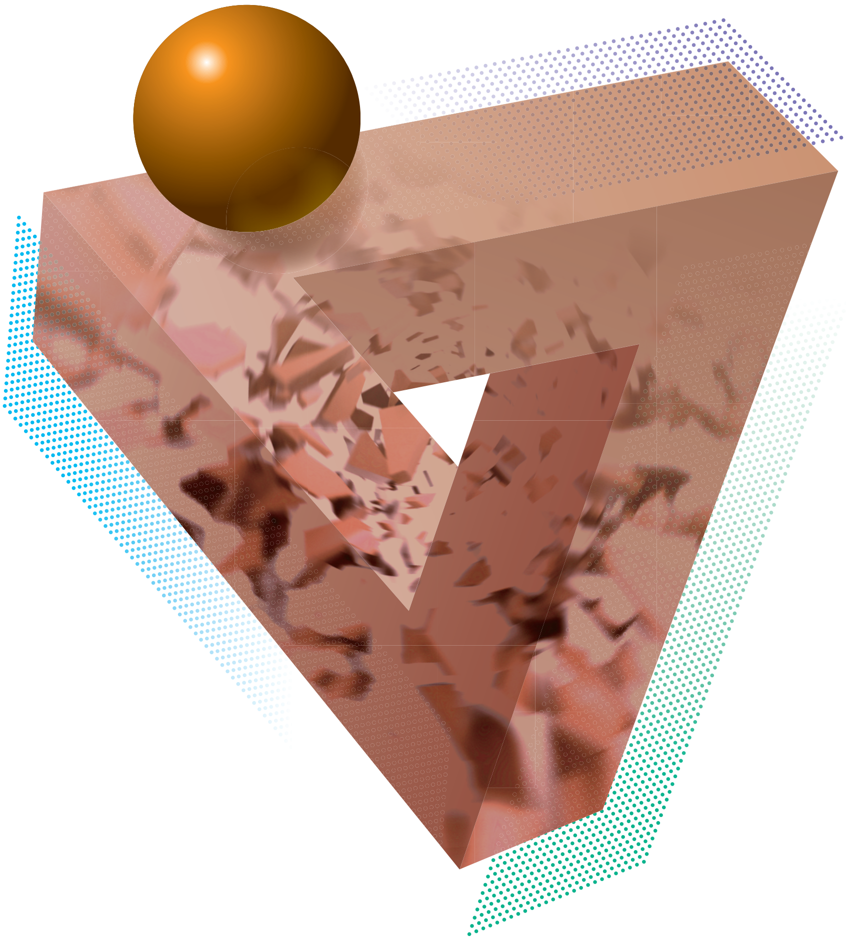
Primary
プライマリー大学ノート

よ・く・わ・か・る！線形代数

Basic Linear Algebra



藤田岳彦
石村直之
藤岡　敦
松田秀樹
今井仁司
石井昌宏
竹内慎吾
…………著

実教出版

まえがき

数学の学習では，問題や例を，実際に自分の手で計算することが大切です．多くの大学において一般教育課程で提供される微分積分と線形代数では，その自分の手を動かすことが特に重要となります．というのは，高等学校までの授業と異なり，大学での講義はともすれば一方的となり，それを補うための演習の時間は，設けられていない場合もあるからです．

この「Primary 大学ノートよくわかる線形代数」は，前のシリーズ「Primary 大学ノート線形代数（微分積分，基礎数学)」と同様に，このような状況を改善しようとの考えから生まれました．今回のシリーズでは，より初等的な題材から取り扱い，大学入学前までに学ぶべき内容も大学の視点から触れています．第 1 章ではベクトルを復習し，第 2 章で行列を導入します．第 3 章では行列を用いた連立 1 次方程式の解法を与え，第 4 章で行列式を考察します．第 5 章では 1 次変換について学習します．高等学校までの数学と大学の数学が，滑らかに接続されるよう配慮しています．

実際の使い方は「本書の使い方」を参照してください．全 5 章（14 講）のうち，第 1 章と第 5 章は計画や進度に応じて省略することも可能です．また，解答を直接余白に書き込むことができ，その使用法を推奨しています．

本シリーズは，前のシリーズの藤田岳彦（中央大)，石村直之（一橋大)，藤岡敦（一橋大）に，新たに松田秀樹（大阪工業大)，今井仁司（徳島大)，石井昌宏（上智大)，竹内慎吾（芝浦工業大）が加わり大まかな構成を議論しました．本書は，第 1 章を石村，第 2 章と第 4 章を竹内，第 3 章を石井，第 5 章を藤田がそれぞれ主に執筆し，後で細かな用語など全体の調整を行いました．

最後になりましたが，実教出版の高久充昭さんには，企画の段階から始まり会議の日程調整，意見の集約などさまざまな形でお世話になりました．高久さんのご尽力がなければ本書が世に出ることはなかったでしょう．著者一同感謝いたします．

目　次

本書の使い方

本書に決まった使い方があるというわけではありませんが，本書の特徴および著者らが想定している使い方を述べておきますので参考にしてください．

1 ……読者は大学初年次であることを想定しています．

2 ……読者の予備知識として高校数学Ⅰ・A，Ⅱ・B の内容を想定していますが，もう一度学び直すという姿勢で本書を活用してください．既に知っている用語などもあるでしょうが，なるべく解説するようにしました．もし解説されていない用語でわからないものがあるときは，高校の教科書や参考書などを調べてください．

3 ……1 章から読み始めることが望ましいですが，各章は独立しているので，読者の理解度に合わせてとばしたり順序を変えたりしても構いません．

4 ……説明や公式を記憶してしまうくらいに，熟読・精読を心掛けてください．

5 ……各講は解説・例題・練習問題で構成されています．

6 ……解説・例題の右側の余白には注があります．用語の説明，本文のより丁寧な解説，間違いやすい点や公式の使い方，問題を解くための補足，豆知識，アドバイスなどです．また例題・練習問題は基本・標準・発展に分かれています．

7 ……練習問題は全部自力で解いてみてください．そのほとんどが例題の解法をマスターすれば解ける問題です．脚注にヒントを載せていることもあるので参考にしてください．

8 ……各章の最後にまとめの問題があります．その章で学んだことの総復習になります．

9 ……各章の終わりにはコラムを入れました．その章の内容に関する話題なので，ぜひ読んでください．

10……巻末には問題の解答を入れました．さらに詳しい解答が必要な場合には，次の Web サイトからダウンロードできます．http://www.jikkyo.co.jp/download/

▶線形代数

第1章

ベクトル

線形代数は，ベクトルの集合である線形空間に関する性質を調べる．たとえば次章で学ぶ行列は，ベクトルの間の1次変換を表現するものと考えることができる．この章では，これら線形代数の主要な対象であるベクトルについて，その幾何学的な性質を重視しながら基礎事項を学習しよう．

1 講 ベクトル

解説

●ベクトル

数を並べてひとまとまりに考えたものを**ベクトル**という.

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)：2\text{ 次（元）行ベクトル}$$

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}：2\text{ 次（元）列ベクトル}$$

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)：3\text{ 次（元）行ベクトル}$$

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}：3\text{ 次（元）列ベクトル}$$

ベクトルは向きと大きさ（次講参照）を表す．この章では主に行ベクトルで表す.

２つのベクトルは，対応する成分がすべて等しいとき，等しいという．たとえば，$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$ に対して

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\end{cases}$$

$\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,\ 1)$ を**２次元基本ベクトル**という.

$\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{e}_3=(0,\ 0,\ 1)$ を**３次元基本ベクトル**という.

ベクトルの型

２次元行ベクトルは 1×2 行列

２次元列ベクトルは 2×1 行列

３次元行ベクトルは 1×3 行列

３次元列ベクトルは 3×1 行列

３次元ベクトルの相等

３次元ベクトル

$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，

$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ に対して

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$$

●ベクトルの演算

同じ型のベクトルの和は成分ごとに行う．実数倍も成分ごとに行う．たとえば，$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ に対して

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

$$\alpha\boldsymbol{a}=(\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3)\qquad(\alpha\in\boldsymbol{R})$$

異なる型のベクトルの和

型が異なるベクトルでは和を考えない．

たとえば，$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，

$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ に対して

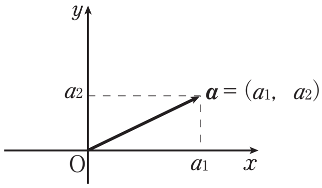
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は考えない.

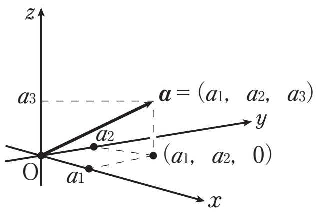
▶ $\boldsymbol{R}$ は実数の集合を表す.

$\alpha\in\boldsymbol{R}$ は α が実数であることを意味する.

●ベクトルと座標

2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$ は，2 次元基本ベクトルを用いて $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$ と表すことができる．3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ も 3 次元基本ベクトルを用いて $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ と表すことができる．このことは，2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$，3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を，それぞれ平面座標 $(a_1,\ a_2)$，空間座標 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を終点とし，原点を始点とするベクトルとみなすことに他ならない．このように，平面ベクトルと平面座標とを，空間ベクトルと空間座標とを関連させて考えると便利なことが多い．ベクトルの和と実数倍を，座標平面上，空間座標上で図示することができる．





成分表示

$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$ などをベクトルの成分表示ということもある．

零ベクトル

成分がすべて 0 のベクトルを零ベクトルという

$\boldsymbol{0}=(0,\ 0)$

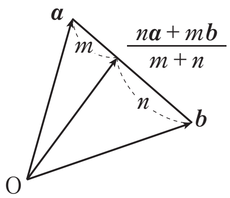
$\boldsymbol{0}=(0,\ 0,\ 0)$

●内分点・外分点

ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，および m，$n>0$ に対して

$$\frac{n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{m+n}$$

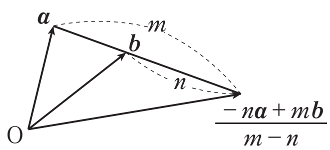
で表されるベクトルは，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ を $m:n$ に内分する点を表す．



ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，および m，$n>0$ $(m\neq n)$ に対して

$$\frac{-n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}}{m-n}$$

で表されるベクトルは，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ を $m:n$ に外分する点を表す．



内分点・外分点の成分表示

平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

$m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

空間内の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n},\ \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$$

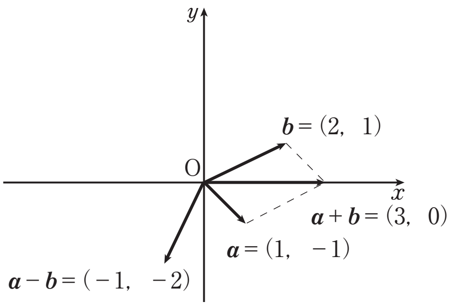
$m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n},\ \frac{-nz_1+mz_2}{m-n}\right)$$

例題

1 ●基本● ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,\ -1)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 1)$ およびベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ を，座標平面上に図示しなさい．

解



2 ●基本● 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,\ 1)$ に対して，次のベクトルを計算しなさい．

(1)　$2\boldsymbol{a}$　　(2)　$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　(3)　$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$

3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,\ 3,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,\ 1,\ -2)$ ではどうか．同じ(1)(2)(3)を計算しなさい．

解　定義に従って計算する．まず 2 次元ベクトルのときは

(1)　$2\boldsymbol{a}=(4,\ 6)$

(2)　$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,\ -3)+(-1,\ 1)=(-3,\ -2)$

(3)　$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(2,\ 3)-(-3,\ 3)=(5,\ 0)$

3 次元ベクトルのときは

(1)　$2\boldsymbol{a}=(4,\ 6,\ 0)$

(2)　$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,\ -3,\ 0)+(-1,\ 1,\ -2)=(-3,\ -2,\ -2)$

(3)　$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(2,\ 3,\ 0)-(-3,\ 3,\ -6)=(5,\ 0,\ 6)$

3 ■標準■ 次の方程式をみたす 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．

(1)　$(1,\ -1)+\boldsymbol{x}=(5,\ 2)$

(2)　$2\boldsymbol{x}+(4,\ -1)=(-2,\ 3)$

解　(1)　$\boldsymbol{x}=(5,\ 2)-(1,\ -1)=(4,\ 3)$

(2)　$2\boldsymbol{x}=(-2,\ 3)-(4,\ -1)=(-6,\ 4)$ なので

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}(-6,\ 4)=(-3,\ 2)$$

4 ■標準■ 次の方程式をみたす3次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めなさい.

(1) $(1,\ -1,\ 0)+\boldsymbol{x}=(5,\ 2,\ -2)$

(2) $2\boldsymbol{x}+(4,\ -1,\ 2)=(-2,\ 3,\ 0)$

解 (1) $\boldsymbol{x}=(5,\ 2,\ -2)-(1,\ -1,\ 0)=(4,\ 3,\ -2)$

(2) $2\boldsymbol{x}=(-2,\ 3,\ 0)-(4,\ -1,\ 2)=(-6,\ 4,\ -2)$ なので

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}(-6,\ 4,\ -2)=(-3,\ 2,\ -1)$$

5 ●基本● 平面上に2点A$(1,\ 2)$, B$(3,\ -1)$ がある.

(1) 線分ABの中点の座標を求めなさい.

(2) 線分ABを2:1に内分する点の座標を求めなさい.

(3) 線分ABを3:2に外分する点の座標を求めなさい.

中点
1:1に内分する点が中点である.

解 公式に従って計算する.

(1) $\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{2-1}{2}\right)=\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\left(\dfrac{1\cdot1+2\cdot3}{2+1},\ \dfrac{1\cdot2+2\cdot(-1)}{2+1}\right)=\left(\dfrac{7}{3},\ 0\right)$

(3) $\left(\dfrac{(-2)\cdot1+3\cdot3}{3-2},\ \dfrac{(-2)\cdot2+3\cdot(-1)}{3-2}\right)=(7,\ -7)$

6 ■標準■ 空間内に2点A$(1,\ 2,\ 3)$, B$(3,\ -1,\ -2)$ がある.

(1) 線分ABの中点の座標を求めなさい.

(2) 線分ABを2:1に内分する点の座標を求めなさい.

(3) 線分ABを3:2に外分する点の座標を求めなさい.

解 公式に従って計算する.

(1) $\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{2-1}{2},\ \dfrac{3-2}{2}\right)=\left(2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\left(\dfrac{1\cdot1+2\cdot3}{2+1},\ \dfrac{1\cdot2+2\cdot(-1)}{2+1},\ \dfrac{1\cdot3+2\cdot(-2)}{2+1}\right)$

$=\left(\dfrac{7}{3},\ 0,\ -\dfrac{1}{3}\right)$

(3) $\left(\dfrac{(-2)\cdot1+3\cdot3}{3-2},\ \dfrac{(-2)\cdot2+3\cdot(-1)}{3-2},\ \dfrac{(-2)\cdot3+3\cdot(-2)}{3-2}\right)$

$=(7,\ -7,\ -12)$

練習問題

1 ●基本● ベクトル $\boldsymbol{a}=(-1,\ 1)$, $\boldsymbol{b}=(2,\ 0)$, $\boldsymbol{c}=(0,\ 1)$ に対して，次のベクトルを座標平面上に図示しなさい．

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

2 ●基本● 3次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(1,\ 2,\ -1)$, $\boldsymbol{b}=(-2,\ -1,\ 1)$, $\boldsymbol{c}=(0,\ 3,\ 2)$ に対して，次のベクトルを計算しなさい．

(1) $-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　　(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$　　(3) $-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

3 ■標準■ 次の方程式をみたす3次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めなさい．

(1) $(1,\ -1,\ 3)+\boldsymbol{x}=(-3,\ 5,\ 2)$

(2) $-2\boldsymbol{x}+(3,\ 6,\ -1)=(-1,\ -2,\ 3)$

(3) $3\boldsymbol{x}+(1,\ 2,\ -2)=(3,\ -4,\ 0)+\boldsymbol{x}$