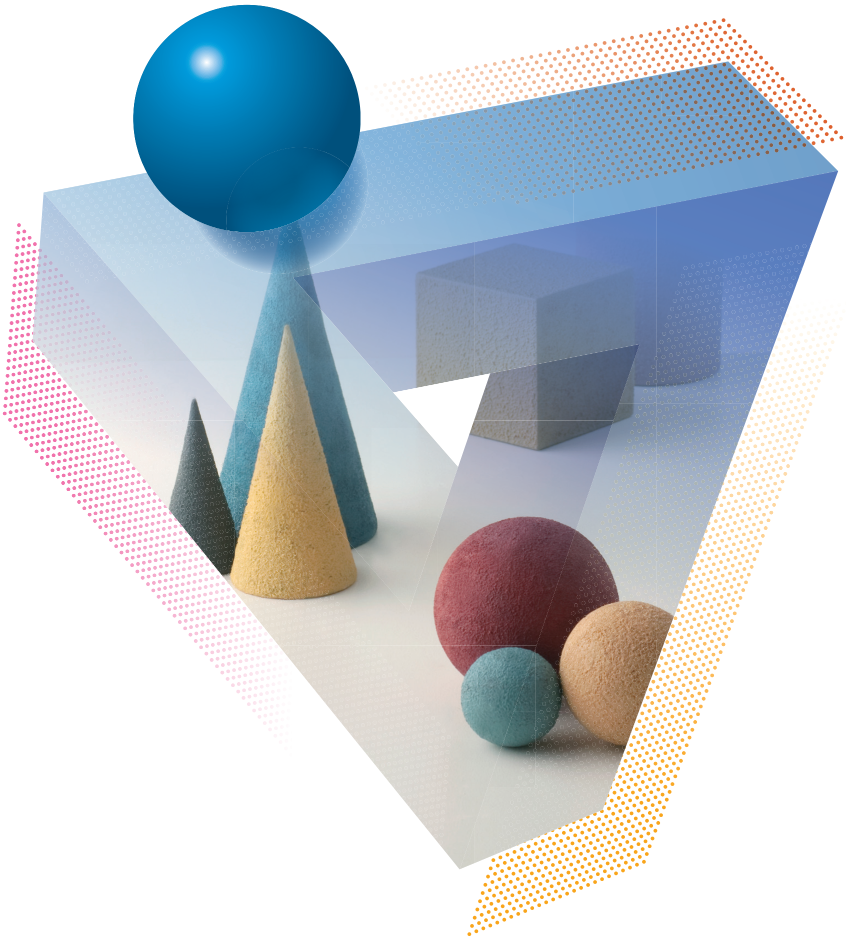
Primary
プライマリー大学ノート

よ·く·わ·か·る!

微分積分

Basic Calculus



藤田岳彦
石村直之
藤岡　敦
松田秀樹
今井仁司
石井昌宏
竹内慎吾
…………著

実教出版

まえがき

数学は世の中の役に立つ学問である．それには「数学的なものの考え方」といった間接的なご利益も含まれるが，自然科学や社会科学の多くの学問分野において，数学は必要欠くべからざる道具である．数学を学ぶことのない者も数学の恩恵に浴することはできるが，すべての人間が数学を学ぶことを止めてしまったとしたら人類は原始時代に戻らざるを得ないであろう．

数多くの専門分野に細分化された数学の中でも微分積分や線形代数はその根幹をなすものであるから，これらの内容は多くの大学の前期課程において必修科目や選択科目として提供されている．微分積分や線形代数の知識は前期課程の発展的な数学系の科目や後期課程の数学系の科目のみならず，数学以外の科目でも前提とされることがあるのである．

では，数学はどのように習得すればよいのであろうか？ 大学で開講されている多くの科目は講義形式で行われている．ただ漫然と講義を受け身の姿勢で聞くだけで数学的知識を身に付けることは可能であろうか？ 否，不可能である．数学の学習は習い事に似ている．ピアノでも水泳でもよいから，何か自分にとって親しみのある習い事を想像してみるとよい．しかるべき先生に付いてその人がどのようにピアノを弾いたり，泳いだりするのかを見るのも大切なことである．しかし，それだけでは自分自身が上手にピアノを弾けたり，泳げたりすることはないであろう．数学の学習においても，自分自身が実際に手を動かして計算したりすることがとても重要なのである．大学でも数学科のような学科では学生自身に多くの計算を行わせるために講義形式とは異なる演習の時間が設けられているが，そのような学科以外ではなかなか演習のために時間を割くことができないのが現状である．

この「Primary 大学ノートよくわかる微分積分」は，このような状況を打破するために生まれた前のシリーズの１つ「Primary 大学ノート微分積分」を全面的に書き改め，微分積分の初歩が初学者にとってさらに分かりやすく，身に付くよう十分な配慮を施したものである．扱う題材は前のシリーズよりも難易度を下げ，高等学校で学ぶべきことにも厭わず触れているが，新たに側注や脚注を生かしたことで，大学において初めて学ぶ微分積分の内容へと滑らかに到達できるようになっている．問題を解答するための余

白についても必要十分なものを用意したので，直接解答を記入することをお勧めする．学習が進むにつれ，自分自身が書き込んだ解答は大きな達成感を生み出し，数学に対する自信をもたらすばかりでなく，さらなる進んだ学習への意欲をも駆り立てることを期待する．

具体的な内容について簡単に触れておこう．第 1 章では多項式関数，分数関数，無理関数，対数関数，三角関数といった初等関数を扱っている．ここでは特にそれらの関数のグラフを実際に自分自身で手を動かして描いてみるということに力点を置いた．なお，通常の微分積分の講義では数列の極限の概念から始めるのが論理的には正しいであろうが，ここでは微分積分で必要とされる最低限の知識を身に付けることに重きをおき，数列は最後の第 4 章で扱うこととした．本書を授業で使う際に，中間試験などに時間を割かれる場合は思い切って第 4 章を自学自習に譲ることも可能である．また，関数のグラフを描かせる問題は第 2 章の微分法の応用でも十分に練習できるように心掛けた．第 3 章の積分法では応用として簡単な微分方程式を扱っている．

最後に，本書を完成させるにあたり，実教出版の高久充昭さんには多くの執筆者達の意見やスケジュールの調整に際し，大変なご苦労を掛けることとなってしまった．高久さんへ心からの謝辞を送らせて頂きたい．

目　次

本書の使い方

本書に決まった使い方があるというわけではありませんが，本書の特徴および著者らが想定している使い方を述べておきますので参考にしてください.

1 ……読者は大学初年次であることを想定しています.

2 ……読者の予備知識として高校数学Ⅰ・A，Ⅱ・B の内容を想定していますが，もう一度学び直すという姿勢で本書を活用してください．既に知っている用語などもあるでしょうが，なるべく解説するようにしました．もし解説されていない用語でわからないものがあるときは，高校の教科書や参考書などを調べてください.

3 ……1 章から読み始めることが望ましいですが，各章は独立しているので，読者の理解度に合わせてとばしたり順序を変えたりしても構いません.

4 ……説明や公式を記憶してしまうくらいに，熟読・精読を心掛けてください.

5 ……各講は解説・例題・練習問題で構成されています.

6 ……解説・例題の右側の余白には注があります．用語の説明，本文のより丁寧な解説，間違いやすい点や公式の使い方，問題を解くための補足，豆知識，アドバイス，数学者の紹介などです．また例題・練習問題は基本・標準・発展に分かれています.

7 ……練習問題は全部自力で解いてみてください．そのほとんどが例題の解法をマスターすれば解ける問題です．脚注にヒントを載せていることもあるので参考にしてください.

8 ……各章の最後にまとめの問題があります．その章で学んだことの総復習になります.

9 ……各章の終わりにはコラムを入れました．その章の内容に関する話題なので，ぜひ読んでください.

10……巻末には問題の解答を入れました．さらに詳しい解答が必要な場合には，次の Web サイトからダウンロードできます．http://www.jikkyo.co.jp/download/

▶微積

第1章

関数

微分積分の得手不得手は関数が自由に扱えるか否かにかかっている．関数を自由に扱うためにはその十分な理解が不可欠であるが，パソコンのない昔は，手でグラフを描いて理解を深めた．しかし，便利になった現在はかえって頭を使わなくなり，理解不足を招きかねない．不便な時代のときと同じように実際にグラフを描いて，頭を使うことを心掛け，関数に対する理解を深めよう．

1講 初等関数とグラフ(1)

解説

●関数とグラフ

実数 x に対応して実数 y がただひとつ定まるとき，y を x の**関数**といい，$\boldsymbol{y=f(x)}$ などと書く．このとき $y=f(x)$ を満たす平面上の点（x, y）の集合を関数 $f(x)$ の**グラフ**という．

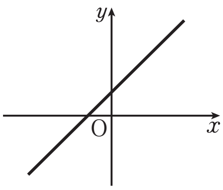
▶ x を**独立変数**，y を**従属変数**という．
$f(x)$ だけでも関数ということもある．グラフを図形ということもある．

●多項式関数

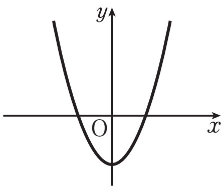
$f(x)$ が多項式であるとき $y=f(x)$ を**多項式関数**という．多項式の次数が n であるとき $\boldsymbol{n}$ **次関数**といい，次のように書ける．

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_0\neq 0$$

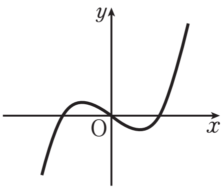
▶ 0 次関数は**定数関数**（$y=a$, a は定数）のこと．
3 次以上の関数は 4 講から扱う．



1 次関数



2 次関数



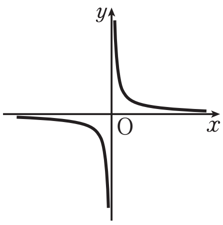
3 次関数

●有理関数

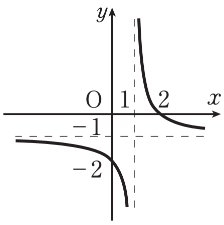
$f(x)$, $g(x)$ が多項式であるとき $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を**有理関数**という．有理関数は次のように書ける．

▶ 有理関数を**分数関数**ともいう．

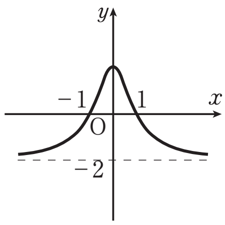
$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$



$y=\dfrac{1}{x}$



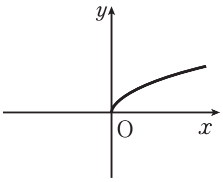
$y=\dfrac{2-x}{x-1}$



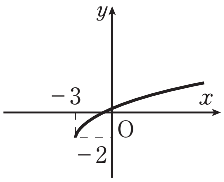
$y=\dfrac{2-2x^2}{x^2+1}$

●無理関数

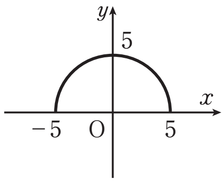
x と y の多項式 $f(x,\ y)$ に対して $f(x,\ y)=0$ を考える．このとき，x の関数 y のうちで有理関数でないものを**無理関数**という．



$y=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{x+3}-2$



$y=\sqrt{25-x^2}$

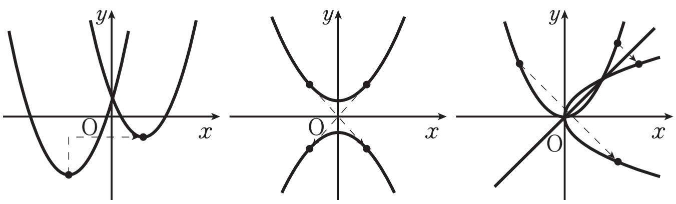
●グラフの移動

平面上の点 $(x,\ y)$ を点 $(x',\ y')$ に移す規則によって関数のグラフが移動する．

▶点対称移動の式は原点に関してのもの．線対称移動の式は直線 $y=x$ に関してのもの．回転移動の式の $a,\ b$ は $a^2+b^2=1$ を満たす（2講の三角関数になる）．

変換と像

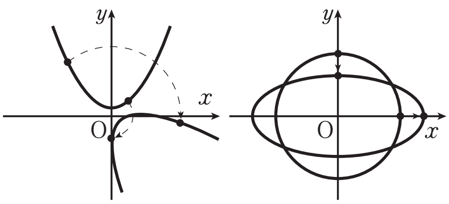
平面上の各点Pに対応して，同じ平面上の点Qが1つに定まるとき，この対応を平面上の変換といい，点Qを点Pの像という．同様に，平面上の図形がこの変換によって移されたとき，移された図形をもとの図形の像という．



平行移動
$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$$

点対称移動
$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$$

線対称移動
$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$$



回転移動
$$\begin{cases} x'=ax-by \\ y'=bx+ay \end{cases}$$

拡大・縮小移動
$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \end{cases}$$

グラフの移動と行列

グラフの移動は行列（よくわかるシリーズ 線形代数）を用いれば理解しやすい．

●逆関数と合成関数

$y=f(x)$ を x に関する方程式とみる．これを解いて $x=g(y)$ が得られたとき，x と y をいれかえて得られる関数 $y=g(x)$ を $y=f(x)$ の**逆関数**といい $\boldsymbol{y=f^{-1}(x)}$ と書く．

$y=f(g(x))$ を $\boldsymbol{y=(f\circ g)(x)}$ と書いて $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という．

▶逆関数や合成関数のイメージ図は5講参照．

例題

1 ●基本● 次の直線の方程式を求めなさい.

(1)　傾きが 2，y 切片が -1.　(2)　傾きが -1，点 $(1,\ -2)$ を通る.

(3)　2 点 $(-1,\ 3)$，$(2,\ -3)$ を通る.

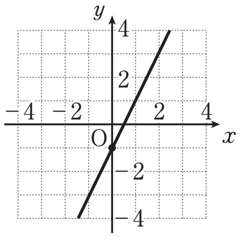
解　(1)　直線の方程式(1)より　$y=2x-1$

(2)　直線の方程式(2)より　$y-(-2)=(-1)(x-1)$

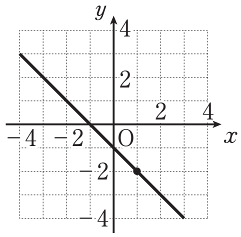
よって　$y=-x-1$

(3)　直線の方程式(3)より　$(2-(-1))(y-3)=((-3)-3)(x-(-1))$

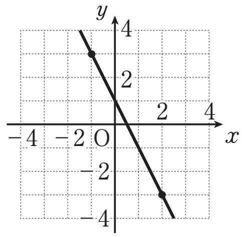
よって　$y=-2x+1$



(1)　$y=2x-1$



(2)　$y=-x-1$



(3)　$y=-2x+1$

直線の方程式

(1)　傾きが a，y 切片が b の直線は $y=ax+b$.

(2)　傾きが a で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線は $y-y_1=a(x-x_1)$.

(3)　2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線は $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$.

2 ●基本● 次の放物線の方程式を求めなさい.

(1)　軸が $x=1$，2 点 $(2,\ -1)$，$(-1,\ 2)$ を通る.

(2)　軸が $x=-1$，頂点が $(-1,\ 2)$，y 切片が 1.

(3)　x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 切片が -3.

解　(1)　放物線の方程式(1)より　$y=a(x-1)^2+b$

これが 2 点 $(2,\ -1)$，$(-1,\ 2)$ を通るので

$$\begin{cases} -1=a(2-1)^2+b \\ 2=a(-1-1)^2+b \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} a+b=-1 \\ 4a+b=2 \end{cases}$$

よって $a=1$，$b=-2$　放物線の方程式は $y=(x-1)^2-2$

(2)　放物線の方程式(2)より　$y=a(x+1)^2+2$

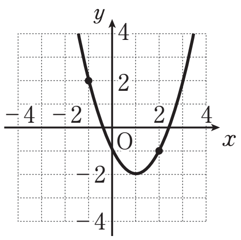
y 切片が 1 であるので　$1=a(0+1)^2+2$　よって　$a=-1$

放物線の方程式は　$y=-(x+1)^2+2$

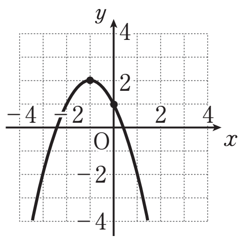
(3)　放物線の方程式(3)より　$y=a(x+1)(x-3)$

y 切片が -3 であるので　$-3=a(0+1)(0-3)$　よって　$a=1$

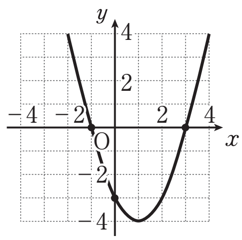
放物線の方程式は　$y=(x+1)(x-3)$



(1)　$y=(x-1)^2-2$



(2)　$y=-(x+1)^2+2$



(3)　$y=(x+1)(x-3)$

放物線の方程式

(1)　軸が $x=p$ の放物線は $y=a(x-p)^2+b$.

(2)　軸が $x=p$，頂点が $(p,\ q)$ の放物線は $y=a(x-p)^2+q$.

(3)　x 軸と 2 点 $(x_1,\ 0)$，$(x_2,\ 0)$ で交わる放物線は $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3 **●基本●** 次の移動による放物線 $y=x^2$ の像を求めなさい．

(1)　x 軸方向に 2，y 軸方向に -4 の平行移動

(2)　原点に関する対称移動　　(3)　x 軸に関する対称移動

(4)　y 軸に関する対称移動　　(5)　直線 $y=x$ に関する対称移動

解　(1)　平行移動の式は解説にあるように

$x'=x+2,\ y'=y-4$　よって　$x=x'-2,\ y=y'+4$

これを放物線の式に代入すると

$y'+4=(x'-2)^2$　よって　$y'=(x'-2)^2-4$

$x',\ y'$ を $x,\ y$ におきかえて，像は放物線　$y=(x-2)^2-4$

(2)　原点に関する対称移動の式は解説にあるように

$x'=-x,\ y'=-y$　よって　$x=-x',\ y=-y'$

これを放物線の式に代入すると

$-y'=(-x')^2$　よって　$y'=-x'^2$

$x',\ y'$ を $x,\ y$ におきかえて，像は放物線　$y=-x^2$

(3)　x 軸に関する対称移動の式は側注の(1)にあるように

$x'=x,\ y'=-y$　よって　$x=x',\ y=-y'$

これを放物線の式に代入すると

$-y'=x'^2$　よって　$y'=-x'^2$

$x',\ y'$ を $x,\ y$ におきかえて，像は放物線　$y=-x^2$

(4)　y 軸に関する対称移動の式は側注の(2)にあるように

$x'=-x,\ y'=y$　よって　$x=-x',\ y=y'$

これを放物線の式に代入すると

$y'=(-x')^2$　よって　$y'=x'^2$

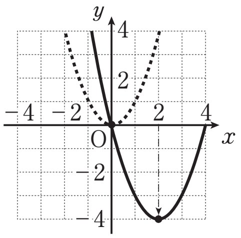
$x',\ y'$ を $x,\ y$ におきかえて，像は同じ放物線　$y=x^2$（図略）

(5)　$y=x$ に関する対称移動の式は解説にあるように

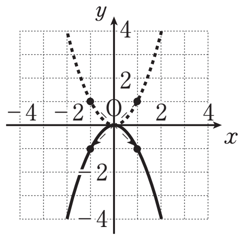
$x'=y,\ y'=x$　よって　$x=y',\ y=x'$

これを放物線の式に代入すると　$x'=y'^2$

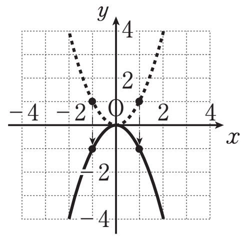
$x',\ y'$ を $x,\ y$ におきかえて，像は放物線　$x=y^2$



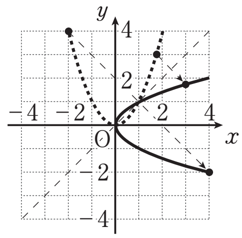
(1)　$y=(x-2)^2-4$



(2)　$y=-x^2$



(3)　$y=-x^2$



(5)　$x=y^2$

像の方程式

点 $(x,\ y)$ を点 $(x',\ y')$ に移す式を $x,\ y$ に関して解くと，$x,\ y$ は $x',\ y'$ で表される．これをもとの図形の方程式に代入する．その後 $x',\ y'$ を $x,\ y$ におきかえると，像の方程式が得られる．

軸対称移動の式

軸対称移動は x 軸あるいは y 軸という直線に関する対称移動である．

(1)　x 軸に関する対称移動

$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$

(2)　y 軸に関する対称移動

$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$

4 ●基本● 次の移動による双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の像を求めなさい．

(1)　x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 の平行移動

(2)　原点に関する対称移動　　(3)　x 軸に関する対称移動

(4)　y 軸に関する対称移動　　(5)　直線 $y=x$ に関する対称移動

(6)　x 軸方向に 2 倍拡大移動

漸近線

グラフが限りなく近づく直線または曲線を漸近線という．

$y=\dfrac{k}{x-a}+b$ のグラフの漸近線は $x=a$，$y=b$

解　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおいて側注の像の公式を適用する．

(1)　像の方程式(1)より $y=f(x-(-1))+2$

よって　$y=f(x+1)+2$　よって　$y=\dfrac{1}{x+1}+2$

これは $x=-1$，$y=2$ を漸近線とする双曲線を表す．

(2)　像の方程式(2)より $y=-\dfrac{1}{-x}$　よって　$y=\dfrac{1}{x}$

これはもとの双曲線と同じ（図略）．

(3)　像の方程式(3)より　$y=-\dfrac{1}{x}$

これは $x=0$，$y=0$ を漸近線とする双曲線を表す．

(4)　像の方程式(4)より $y=\dfrac{1}{-x}$　よって　$y=-\dfrac{1}{x}$

これは $x=0$，$y=0$ を漸近線とする双曲線を表す．

(5)　像の方程式(5)より $x=\dfrac{1}{y}$　よって　$y=\dfrac{1}{x}$

これはもとの双曲線と同じ（図略）．

(6)　像の方程式(7)より $y=\dfrac{1}{\frac{x}{2}}$　よって　$y=\dfrac{2}{x}$

これは $x=0$，$y=0$ を漸近線とする双曲線を表す．

注意

漸近線も同時に移動する．

移動による像の方程式

移動による関数 $y=f(x)$ のグラフの像の方程式の求め方は前ページの側注に記した．最終的な像の方程式を次にまとめる．

(1)　x 軸方向に a，y 軸方向に b の平行移動
$y=f(x-a)+b$

(2)　原点対称移動
$y=-f(-x)$

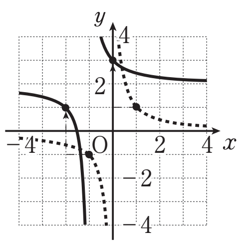
(3)　x 軸に関する対称移動
$y=-f(x)$

(4)　y 軸に関する対称移動
$y=f(-x)$

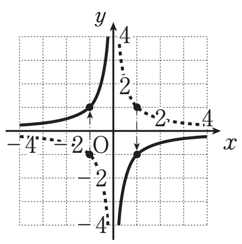
(5)　$y=x$ に関する対称移動
$x=f(y)$

(6)　回転移動（a，b は解説のもの）
$-ax+by=f(ax+by)$

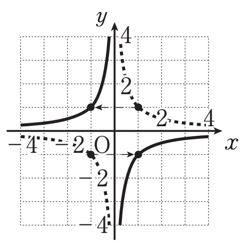
(7)　拡大・縮小移動（a，b は解説のもの）
$y=bf\left(\dfrac{x}{a}\right)$



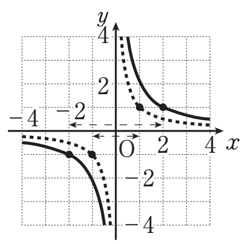
(1)　$y=\dfrac{1}{x+1}+2$



(3)　$y=-\dfrac{1}{x}$



(4)　$y=-\dfrac{1}{x}$



(6)　$y=\dfrac{2}{x}$

5 ■標準■ 次の無理関数の式を $f(x,\ y)=0$ の形に変形しなさい．ただし，$f(x,\ y)$ は x と y の多項式とする．

(1)　$y=\sqrt{x}$　　(2)　$y=\sqrt{x+3}-2$　　(3)　$y=\sqrt{25-x^2}$

解 (1)　$y=\sqrt{x}$ の両辺を 2 乗して $y^2=x$　よって　$y^2-x=0$

(2)　$y=\sqrt{x+3}-2$　よって　$y+2=\sqrt{x+3}$

この両辺を 2 乗して $(y+2)^2=x+3$　よって　$(y+2)^2-x-3=0$

(3)　$y=\sqrt{25-x^2}$ の両辺を 2 乗して $y^2=25-x^2$

よって　$x^2+y^2-25=0$

▶これは原点を中心とする半径 5 の円の方程式（解説にあるグラフは円の上半分）．

6 ●基本● $f(x)=3x-2$ とする．関数 $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，そのグラフを描きなさい．

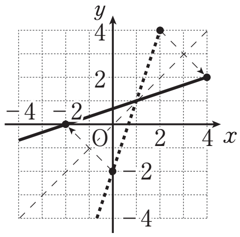
解 $y=3x-2$ を x について解くと

$$x=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$$

x と y をいれかえて逆関数は

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

よって　$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$



逆関数とそのグラフの求め方

関数の式の x と y をいれかえれば逆関数の式が得られる．これは，関数のグラフを直線 $y=x$ に関して対称移動すれば逆関数のグラフが得られることを意味する．

注意

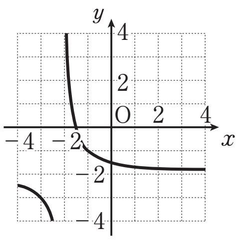
逆関数 $f^{-1}(x)$ に対して，

一般に　$f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$

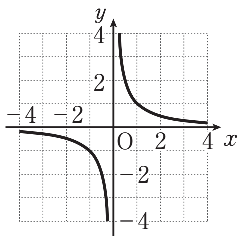
7 ●基本● $f(x)=x-2,\ g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ のとき，合成関数 $(f\circ g)(x)$，$(g\circ f)(x)$ を求め，そのグラフを描きなさい．

解 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=g(x)-2=\dfrac{1}{x+2}-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{f(x)+2}=\dfrac{1}{x}$



$y=(f\circ g)(x)$



$y=(g\circ f)(x)$

注意

一般に，

$(f\circ g)(x) \neq (g\circ f)(x)$．

▶問題のグラフはどちらも直角双曲線であり，左のグラフの漸近線は $x=-2,\ y=-2$，右のグラフの漸近線は $x=0,\ y=0$．

1 章 関数

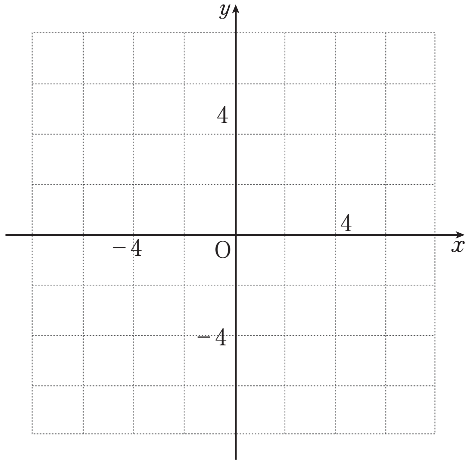
練習問題

（注意）　グラフや図形をきれいに描くために必要な計算は電卓で行ってよい.

1　**●基本●**　次の図形の方程式を求めて方眼紙に描きなさい.

(1)　2 点 $(-4,\ -4)$，$(4,\ 2)$ を通る直線

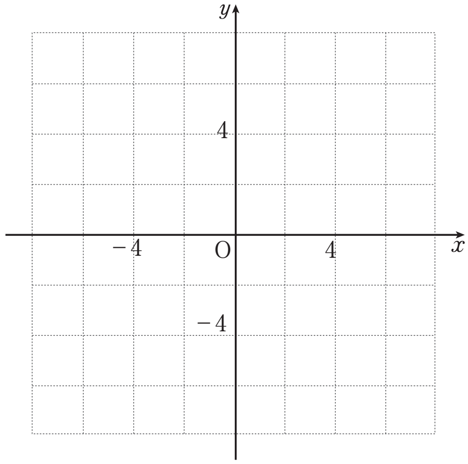
(2)　x 軸と 2 点 $(-2,\ 0)$，$(4,\ 0)$ で交わり，y 切片が 4 の放物線



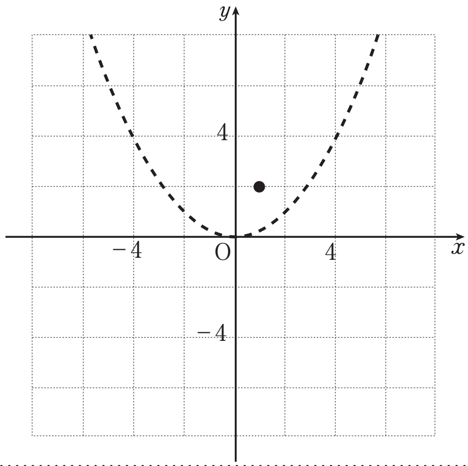
2　**■標準■**　次の関数のグラフを描きなさい. また，その関数は括弧の中の関数をどのように平行移動して得られたか.

(1)　$y=\dfrac{5-2x}{2-x}$　$\left(y=-\dfrac{1}{x}\right)$

(2)　$y=\sqrt{x+4}-6$　$(y=\sqrt{x})$



3　**■標準■**　$y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフを点 $(1,\ 2)$ に関して対称移動した図形の方程式を求め，図形を方眼紙に描きなさい.



ヒント②　平行移動したグラフの式は例題 4 の側注の(1)にある.

ヒント③　点 $(a,\ b)$ に関する対称移動の式は，中点が点 $(a,\ b)$ と一致することから　$x'=2a-x$，$y'=2b-y$