4 章 フーリエ解析

２節 フーリエ変数（P.232～244）

P. 233 練習 $\boxed{1}$

$k=0$ のとき $E(0)=\int_{-a}^{a} dx = 2a$

$k \neq 0$ のとき

$E(k)=\int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-ikx}\, dx = \left[\frac{1}{-ik} e^{-ikx} \right]_{-a}^{a} = \frac{1}{ik}\left(e^{ika} - e^{-ika} \right) = \frac{2}{k}\sin ka$ であるが，

この結果は $\lim_{k \to 0} \frac{2}{k} \sin ka = \lim_{k \to 0} \frac{2a}{k} \cdot \frac{\sin ka}{a} = 2a \cdot 1 = 2a$ より $k=0$ の場合も含む。

（新版微分積分Ⅰ P.55 公式 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$）

P. 239 練習 $\boxed{2}$

$f(x)$， $f'(x)$ の条件から $\mathcal{F}\left[f''(x) \right] = ik \mathcal{F}\left[f'(x) \right] = (ik)^2 \mathcal{F}\left[f(x) \right]$ （前ページ性質［5］より）

P. 239 練習 $\boxed{3}$

$F(k)=\mathcal{F}\left[f(x) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx$ の両辺を k で微分すればよい。

P. 240 練習 $\boxed{4}$ 【例題 6】から

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$ であり，文字 x と k を入れ替えて複素共役をとると

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2} e^{ikx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$ となる。右辺を $G(k)=e^{-\alpha k^2}$ の逆フーリエ変換の定義式に代入する。

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\alpha k^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2} e^{ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

P. 241 練習 $\boxed{5}$

$$e^{-x^2} * e^{-x^2} = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[e^{-x^2} * e^{-x^2} \right] \right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\pi e^{-\frac{k}{2}} \right] \quad \text{（例 3 より）}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi e^{-\frac{k}{2}} e^{ikx}\, dk = \pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}} e^{ikx}\, dk$$

$$= \pi \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{k}{2}} \right] = \pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot \frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \left(\text{練習 } \boxed{4} \text{ で } \alpha = \frac{1}{2} \text{ とした} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

P. 242 練習 $\boxed{6}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(-x)\,dx$ において $-x=t$ と変換するとこのページの①，②より次の 2 番目の等号が成立し，

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\delta(t)\,dt = f(-0) = f(0)$ となる。これは $\delta(-x)=\delta(x)$ を意味している。

P. 244 練習 $\boxed{7}$

$$E(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{4k^2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4k^2t}} = \frac{1}{\sqrt{4k^2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}$$ より

(i)
$$E_t(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{4k^2\pi}}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4k^2t}} + t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}\frac{x^2}{4k^2t^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4k^2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}\left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4k^2t^2}\right)$$

(ii)
$$E_x(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{4k^2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}\left(-\frac{x}{2k^2t}\right)$$ より

$$k^2E_{xx}(x,\ t) = \frac{k^2}{\sqrt{4k^2\pi}} t^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}\left(-\frac{x}{2k^2t}\right)^2 + e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}\left(-\frac{1}{2k^2t}\right)\right)$$
$$= \frac{k^2}{\sqrt{4k^2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}\left(\frac{x^2}{4k^2t^2} - \frac{1}{2k^2t}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4k^2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}\left(\frac{x^2}{4k^2t^2} - \frac{1}{2t}\right)$$

(i)(ii) より $E_t(x,\ t) = k^2E_{xx}(x,\ t)$

４章２節

節末問題 P.245

１.

⑴　$f\left(x\right)$ が奇関数であることに注意する。

$$k=0 \;\Rightarrow\; F\left(0\right)=\int_{-1}^{1} f\left(x\right)^{-i0x}\,dx=0$$

$k\neq 0$ のとき　$f\left(x\right)\cos kx$ が奇関数であることに注意して

$$F\left(k\right)=\int_{-1}^{1} f\left(x\right)e^{-ikx}\,dx=\int_{-1}^{1} f\left(x\right)\left(\cos kx-i\sin kx\right)\,fx=-2i\int_{0}^{1}\sin kx\,dx$$

$$=2i\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{0}^{1}=2i\frac{\cos k-1}{k}$$

であるが　$\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{\cos k-1}{k}=0$ であるので，これは $k=0$ の場合も含むことを意味する。

$$\therefore\; F\left(k\right)=\mathcal{F}\left[\,f\left(x\right)\right]=2i\frac{\cos k-1}{k}$$

⑵　$f\left(x\right)$ が偶関数であることに注意する。

$$k=0 \;\Rightarrow\; F\left(0\right)=\int_{-1}^{1} f\left(x\right)^{-i0x}\,dx=\int_{-1}^{0}\left(1+x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(1-x\right)dx=1$$

$k\neq 0$ のとき　フーリエ余弦変換すると

$$F\left(k\right)=2\int_{0}^{1} f\left(x\right)\cos kx\,dx=2\int_{0}^{1} f\left(1-x\right)\cos kx\,dx$$

$$=2\left(\left[\left(1-x\right)\frac{\sin kx}{k}\right]_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\frac{\sin kx}{k}\,dx\right)=2\int_{0}^{1}\frac{\sin kx}{k}\,dx \quad \leftarrow \; 31$$

$$=2\left[-\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{0}^{1}=\frac{2}{k^2}\left(1-\cos k\right)$$

（新版微分積分 II P.28 ロピタルの定理）

↓

であるが　$\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{2\left(1-\cos k\right)}{k^2}=\lim_{k\to 0}\frac{2\sin k}{2k}=1$ (新版微分積分Ⅰ P.55 公式) であるので,

これは $k=0$ の場合も含むことを意味する。

$$\therefore\; F\left(k\right)=\mathcal{F}\left[\,f\left(x\right)\right]=\frac{2}{k^2}\left(1-\cos k\right)$$

(3)　$f(x)$ が奇関数であることに注意する。

$$F(k)=\int_{-1}^{1} f(x)e^{-ikx}\,dx=\int_{-1}^{1}\sin x\left(\cos kx-i\sin kx\right)dx=-2i\int_{0}^{1}\sin x\sin kx\,dx \quad ㋐$$

$$=i\int_{0}^{1}\left(\cos(k+1)x-\cos(1-k)x\right)dx \leftarrow \boxed{10}\ (2)(4)$$

ここで $k\neq\pm1$ なら

$$=i\left[\frac{1}{k+1}\sin(k+1)x-\frac{1}{1-k}\sin(1-k)x\right]_{0}^{1}=i\left(\frac{\sin(k+1)}{k+1}-\frac{\sin(1-k)}{1-k}\right) \quad ㋑$$

で，$\displaystyle\lim_{k\to\pm1} i\left(\frac{\sin(k+1)}{k+1}-\frac{\sin(1-k)}{1-k}\right)=\pm i\left(\frac{\sin 2}{2}-1\right)$ となる。

一方 $k=\pm1$ のとき

$$F(\pm1)=\int_{-1}^{1} f(x)e^{\mp ix}\,dx\overset{㋐}{=}\mp2i\int_{0}^{1}\sin^2 x\,dx=\mp2i\int_{0}^{1}\frac{1-\cos2x}{2}\,dx \leftarrow \boxed{10}\ (1)(2)$$

$$=\mp i\left[x-\frac{1}{2}\sin x\right]_{0}^{1}=\pm i\left(\frac{\sin 2}{2}-1\right)\ \text{である。}$$

よって㋑を答えとしてよい。

$$\therefore\quad F(k)=\mathcal{F}\left[f(x)\right]=i\left(\frac{\sin(k+1)}{k+1}-\frac{\sin(1-k)}{1-k}\right)$$

(4)　$f(x)$ が偶関数であることに注意する。

$k=0$ のとき $F(0)=\displaystyle\int_{-1}^{1}1\cdot e^{-i0x}\,dx=\int_{-1}^{1}1\,dx=2$

$k\neq0$ のとき $f(x)$ が偶関数なのでフーリエ余弦変換より

$$F(k)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cdot\cos kx\,dx=2\int_{0}^{1}1\cdot\cos kx\,dx$$

$$=2\frac{1}{k}\left[\sin kx\right]_{0}^{1}=\frac{2}{k}\sin k \quad ㋒$$

ここで　$\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{2}{k}\sin k=2\cdot1$　　（新版微分積分 I P.55 公式）

$=2$

なので㋒は $k=0$ の場合も含む答である。

(5)

$$F(k)=2\int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ikx}\,dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-(1+ik)x}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{1+ik}e^{-(1+ik)x}\right]_{0}^{\infty}=\frac{1}{1+ik}=\frac{1-ik}{1+k^2}$$

$$\therefore\quad F(k)=\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\frac{1-ik}{1+k^2}$$

P.245　２.

(1)　ガウス関数のフーリエ変換は $\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right]=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$　$(a>0)$ であった。　P.240 例題 6

$a=1$ とすれば $\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right]=\sqrt{\pi}\ e^{-\frac{k^2}{4}}$

また $a=\dfrac{1}{2}$ とすれば $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]=\sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{k^2}{2}}$ を得る。

この両辺を k で微分する。このとき，$F(k)=\sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{k^2}{2}}$，$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ として

フーリエ変換の性質 $\dfrac{dF(k)}{dk}=\mathcal{F}\left[(-ix)f(x)\right]$（P.238［6］）を用いれば

$\mathcal{F}\left[(-ix)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]=\sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{k^2}{2}}(-k)$ であるから，両辺に i をかければ　P.238 性質［1］より

$\mathcal{F}\left[xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]=-ik\sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{k^2}{2}}$

(2)　合成積のフーリエ変換の性質 P.241 $\mathcal{F}\left[(f*g)(x)\right]=\mathcal{F}\left[f(x)\right]\cdot\mathcal{F}\left[g(x)\right]$ を用いれば

$\mathcal{F}\left[xe^{-\frac{x^2}{2}}*e^{-x^2}\right]=-ik\sqrt{2\pi}\ e^{-\frac{k^2}{2}}\cdot\sqrt{\pi}\ e^{-\frac{k^2}{4}}=-ik\pi\sqrt{2}\ e^{-\frac{3}{4}k^2}$

(3)　(2)より

$$xe^{-\frac{x^2}{2}}*e^{-x^2}=\mathcal{F}^{-1}\left[-ik\sqrt{2}\pi e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]=\frac{2\sqrt{2}\pi i}{3}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{d}{dk}e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]$$

$$\overset{㋐}{\downarrow}{=}\frac{2\sqrt{2}\,\pi i}{3}(-ix)\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]\overset{㋑}{\downarrow}{=}\frac{2\sqrt{2}\,\pi i}{3}(-ix)\frac{1}{\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{1}{3}x^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}}xe^{-\frac{1}{3}x^2}=\frac{2\sqrt{6\pi}}{9}xe^{-\frac{1}{3}x^2}$$

（㋐　$F(k)=e^{-\frac{3}{4}k^2}$ とおくと $f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]$ であるから P.238 性質［6］より

$\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{d}{dk}e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]=(-ix)\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]$）

（㋑　P.240 練習 $\boxed{4}$ で $\alpha=\dfrac{3}{4}$ とおくと

$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{3}{4}\pi}}e^{-\frac{x^2}{4\times\frac{3}{4}}}$）

３．

$U(k,\ t)=\mathcal{F}\left[u(x,\ t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\ t)e^{-ikx}\,dx$ とおくと $U_t(k,\ t)=\mathcal{F}\left[u_t(x,\ t)\right]$ ㋐であり，

P.238 フーリエ変換の性質［6］を２回用いて $\mathcal{F}\left[u_{xx}(x,\ t)\right]=(ik)^2U(k,\ t)=-k^2U(k,\ t)$ ㋑で

あるから $u_t=u_{xx}-u$ の両辺をフーリエ変換すると $U_t(k,\ t)=-k^2U(k,\ t)-U(k,\ t)$ であり，

また $U(k,\ 0)=\mathcal{F}\left[u(x,\ 0)\right]=\mathcal{F}\left[\delta(x)\right]=1$ （P.32）となる。

$U_t(k,\ t)=-k^2U(k,\ t)-U(k,\ t)=-(1+k^2)U(k,\ t)$ を解くと，新版微分積分Ⅱ P.165 の方法で

（または公式 48 で）$U(k,\ t)=Ce^{-(1+k^2)t}$ （C は任意定数）である。

初期条件 $U(k,\ 0)=1$ の下で解けば $c=1$ となり $U(k,\ t)=e^{-(1+k^2)t}=e^{-t}e^{-k^2t}$

従って

$$u=\mathcal{F}^{-1}\left[U(k,\ t)\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-t}e^{-k^2t}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}e^{-k^2t}e^{ikx}\,dk \qquad \text{（P.29 より）}$$

$$=e^{-1}F^{-1}\left[e^{-k^2t}\right]=e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad \text{（P.30 練習 }\boxed{4}\text{）}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-t}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$