新版線形代数 演習 改訂版　解答

３章　行列式

１節　行列式の定義と性質

A 問題

107

⑴ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-(-1) = 7$

⑵ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0-1 = -1$

⑶ $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 3-(48) = -45$

⑷ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9-(-2) = 11$

108

⑴ $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8$

⑵ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$

⑶ $\begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = cab$

109

⑴ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)(-6) = 6$

⑵ $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & -5 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot1\cdot(-1) = 1$

109　つづき

⑶　（i）$c \neq 0$ のとき

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & 0 & b \\ 0 & c & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = -c^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{c} \\ 0 & 1 & \frac{a}{c} \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = -c^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{c} \\ 0 & 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & b & -\frac{ab}{c} \end{vmatrix}$$

$$= -c^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{c} \\ 0 & 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 0 & -\frac{ab}{c}-\frac{ab}{c} \end{vmatrix} = -c^2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{2ab}{c}\right) = 2abc$$

（ii）$c = 0$ のとき $\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 0$

（i）（ii）より　答は $2abc$

110

⑴
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 5 = 5$$

⑵
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot 8\cdot(-1)\cdot 2 = 48$$

111

(1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

(2)
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -6 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4) \cdot 2 = 8$$

(3)
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 7 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 7 & -2 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 17 & 0 \\ -1 & -30 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 17 & 6 \\ 0 & -30 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -30 & -1 \\ 0 & 17 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} -30 & -1 \\ 17 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 30 & 1 \\ 17 & 6 \end{vmatrix} = 2\,(180 - 17) = 326$$

112

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - (-8) = 20, \quad \square a_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = 20,$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16 - (-8) = 24, \quad \square a_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = -24$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - (-6) = 2, \quad \square a_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} = 2$$

113

(1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - 2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + (-4)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-8-9) - 2(-8-6) - 4(-6+4)$$

$$= -34+28+8 = 2$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{vmatrix} - 1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 8 & -4 & 2 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -60\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 60\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -16 & -5 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 60(2+3) + 12(7+6) - 4(-20+48) + 15(12-21)$$

$$= 300+156-112-135$$

$$= 209$$

114

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot(-4) + 2\cdot(-4)\cdot 2 + (-3)\cdot 2\cdot(-2)$$

$$-(-3)\cdot(-3)\cdot 2 - 2\cdot(-2)\cdot(-4) - 2\cdot 2\cdot(-4)$$

$$= 24-16+12-18-16+16 = 2$$

115

(1)
$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & a(1-a) \\ -(1-a) & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (1-a)\begin{vmatrix} 1 & a(1-a) \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = a(1-a)^2$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a & b \\ a+b & 0 & a \\ a+b & b & 0 \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 0 & a \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -a & a-b \\ 0 & b-a & -b \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} -a & a-b \\ b-a & -b \end{vmatrix}$$
$$= (a+b)(ab-(a-b)(b-a)) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

(3)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix}$$
$$= (a+b+c)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

116

(1)
$$\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x(x-1) = 0 \qquad \therefore \quad x = 0,\ 1$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & -2 \\ x & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & -2 \\ x & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -2(2-x^2) = 2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0 \qquad \therefore \ x = \pm\sqrt{2}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 3+2x & 1 & 2 \\ x & 4+x & 2 \\ x & 1 & x+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6+2x & 1 & 2 \\ 6+2x & 4+x & 2 \\ 6+2x & 1 & x+5 \end{vmatrix} = (6+2x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4+x & 2 \\ 1 & 1 & x+5 \end{vmatrix}$$
$$= (6+2x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3+x & 0 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 2(x+3)^3 = 0 \qquad \therefore \ x = -3$$

117

⑴ 自然数 m に対して，$\left(A^{-1}\right)^m = A^{-m}$ と書くと，

$|E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$ より $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$ であるから

$|A^{-m}| = \left|\left(A^{-1}\right)^m\right| = |A^{-1}|^m = \left(|A|^{-1}\right)^m = |A|^{-m}$，$|A^{\circ}| = |E| = 1 = |E|^{\circ} = |A|^{\circ}$

つまり n が負の整数および 0 のときも与式が成立する。

したがって，任意の整数 n に対して，$|A^n| = |A|^n$

⑵ $|P^{-1}A^nP| = |P^{-1}||A^n||P| = \dfrac{1}{|P|}|A^n||P| = |A^n| = |A|^n$

したがって，任意の整数 n に対して $|P^{-1}A^nP| = |A|^n$

B 問題

118

⑴
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ -3 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & 9 & -8 \\ 0 & -9 & 13 & 4 \\ 0 & 6 & -8 & 9 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \left(-1\right)^{4+1} \times \begin{vmatrix} -8 & 9 & -8 \\ -9 & 13 & 4 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & 9 & -8 \\ 4 & 13 & 4 \\ -2 & -8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 9 & -8 \\ 0 & -23 & 36 \\ 0 & 10 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -23 & 36 \\ 10 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -23 & 13 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -\left(-69 - 130\right)$$
$$= 199$$

⑵
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 & 1 \\ 6 & -2 & -5 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -10 & -26 \\ 0 & -2 & -17 & -45 \\ 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \left(-1\right)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -10 & -26 \\ -2 & -17 & -45 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & -10 & -26 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -79 & -202 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -79 & -202 \end{vmatrix} \overset{②+①\times 26}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -20 \end{vmatrix} = 53$$

118　つづき

(3)
$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2&2&2\\1&2&3&3&3\\1&2&3&4&4\\1&2&3&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&2&2&2\\0&1&2&3&3\\0&1&2&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$$

(4)
$$\begin{vmatrix}-4&-2&3&2&0\\-6&-6&3&1&3\\1&2&2&3&0\\5&4&-4&-2&1\\3&1&-4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&-2&3&2&0\\-21&-18&15&7&0\\1&2&2&3&0\\5&4&-4&-2&1\\3&1&-4&-2&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+5}\times\begin{vmatrix}-4&-2&3&2\\-21&-18&15&7\\1&2&2&3\\3&1&-4&-2\end{vmatrix}$$
$$\overset{②+①\times(-5)}{=}-\begin{vmatrix}-4&-2&3&2\\-1&-8&0&-3\\1&2&2&3\\3&1&-4&-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&6&11&14\\0&-6&2&0\\1&2&2&3\\0&-5&-10&-11\end{vmatrix}$$
$$=-(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}6&11&14\\-6&2&0\\-5&-10&-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}39&11&14\\0&2&0\\-35&-10&-11\end{vmatrix}$$
$$=2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}39&14\\-35&-11\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}39&14\\4&3\end{vmatrix}\overset{①+②\times(-9)}{=}-2\begin{vmatrix}3&-13\\4&3\end{vmatrix}$$
$$=2(9+52)=-122$$

119

(1)
$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\a&b-a&c-a&d-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2&d^2-a^2\\a^3&b^3-a^3&c^3-a^3&d^3-a^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a&c-a&d-a\\b^2-a^2&c^2-a^2&d^2-a^2\\b^3-a^3&c^3-a^3&d^3-a^3\end{vmatrix}$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\b+a&c+a&d+a\\b^2+ba+a^2&c^2+ca+a^2&d^2+da+a^2\end{vmatrix}$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&0&0\\b+a&c-b&d-b\\b^2+ba+a^2&c^2+ca-b^2-ba&d^2+da-b^2-ba\end{vmatrix}$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}c-b&d-b\\c^2-b^2+ca-ba&d^2-b^2+da-ba\end{vmatrix}$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1&1\\c+b+a&d+b+a\end{vmatrix}$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d+b+a-c-b-a)$$
$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

119　つづき

(2)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & -b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -a & c-b & b-c \\ c-a & -b & a-c \\ b-a & a-b & -c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} -a-b+c & c-b & b-c \\ -a-b+c & -b & a-c \\ 0 & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 1 & -b & a-c \\ 0 & a-b & -c \end{vmatrix} = (a+b+c)(-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 0 & -c & a-b \\ 0 & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(-a-b+c)\begin{vmatrix} -c & a-b \\ a-b & -c \end{vmatrix} = (a+b+c)(-a-b+c)\left(c^2-(a-b)^2\right)$$

$$= (a+b+c)(-a-b+c)(c+a-b)(c-a+b) = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

120

⑴

$$\text{左辺}=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=|A||B|=\text{右辺}$$

⑵

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 & a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & 0 & a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}=|A-B||A+B|=\text{右辺}$$

発展問題

121

$$与式=\begin{vmatrix}1 & ab & ac & ad\\ 0 & 1+b^2 & bc & bd\\ 0 & cb & 1+c^2 & cd\\ 0 & db & dc & 1+d^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2 & ab & ac & ad\\ ba & 1+b^2 & bc & bd\\ ca & cb & 1+c^2 & cd\\ da & db & dc & 1+d^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+b^2 & bc & bd\\ cb & 1+c^2 & cd\\ db & dc & 1+d^2\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}a & ab & ac & ad\\ b & 1+b^2 & bc & bd\\ c & cb & 1+c^2 & cd\\ d & db & dc & 1+d^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & bc & bd\\ 0 & 1+c^2 & cd\\ 0 & dc & 1+d^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b^2 & bc & bd\\ cb & 1+c^2 & cd\\ db & dc & 1+d^2\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ b & 1 & 0 & 0\\ c & 0 & 1 & 0\\ d & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+c^2 & cd\\ dc & 1+d^2\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}b & bc & bd\\ cb & 1+c^2 & cd\\ d & dc & 1+d^2\end{vmatrix}+a^2$$

$$=\begin{vmatrix}1 & cd\\ 0 & 1+d^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c^2 & cd\\ dc & 1+d^2\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}b & 0 & 0\\ c & 1 & 0\\ d & 0 & 1\end{vmatrix}+a^2$$

$$=1+d^2+c\begin{vmatrix}c & cd\\ d & 1+d^2\end{vmatrix}+b^2+a^2$$

$$=1+d^2+c\begin{vmatrix}c & 0\\ d & 1\end{vmatrix}+b^2+a^2$$

$$=1+d^2+c^2+b^2+a^2$$

発展問題

121　つづき

参考　$a \neq b$，$b \neq 0$，$c \neq 0$，$d \neq 0$ のときは次のやり方でもよい。

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & ab & ac & ad \\ ba & 1+b^2 & bc & bd \\ ca & cb & 1+c^2 & cd \\ da & db & dc & 1+d^2 \end{vmatrix} = abcd \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a}+1 & b & c & d \\ a & \dfrac{1}{b}+b & c & d \\ a & b & \dfrac{1}{c}+c & d \\ a & b & c & \dfrac{1}{d}+d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^2 & b^2+1 & c^2 & d^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+1 & d^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2+1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+1 & b^2+1 & c^2 & d^2 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+1 & b^2 & c^2+1 & d^2 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+1 & b^2 & c^2 & d^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a^2+b^2+c^2+d^2+1 \right) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 1 & b^2+1 & c^2 & d^2 \\ 1 & b^2 & c^2+1 & d^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & d^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a^2+b^2+c^2+d^2+1 \right) \begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

122　数学的帰納法で証明する。

$n=2$ のとき

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$ で成り立つ。

$n-1$ のとき正しいと仮定して，n のとき

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^2 - x_1^2 \\ x_2^3 - x_1^3 & x_3^3 - x_1^3 & \cdots & x_n^3 - x_1^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_3^{n-2} - x_1^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1 x_n \\ x_2^3 - x_1 x_2^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 & \cdots & x_n^3 - x_1 x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} n-1 & + & n-2 & \times & (-x_1) \\ n-2 & + & n-3 & \times & (-x_1) \\ \vdots & & & & \\ ③ & + & ② & \times & (-x_1) \\ ② & + & ① & \times & (-x_1) \end{vmatrix} \text{をこの順で行う。} \right)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) = \text{右辺}$$

したがって，n のときも成り立つ。

新版線形代数 演習 改訂版　解答

３章　行列式

２節　行列式の応用

A 問題

123

⑴ $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -2(10-21) = 22 \fallingdotseq 0$　　∴正則である。

$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -10,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14$

$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -12,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -4$

したがって，$A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -10 & -12 & 6 \\ 14 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

⑵ $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 16 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & -8 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 16 & -8 \\ 10 & -8 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 48 \fallingdotseq 0$　　∴正則である。

$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$

$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -16,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 24,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -16$

したがって，$A^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 24 \\ 8 & -16 & -8 \\ 10 & -2 & -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 4 & -8 & -4 \\ 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

123　つづき

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -25 \fallingdotseq 0$　　∴正則である。

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -10,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -15,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -10$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

したがって，$A^{-1} = \dfrac{1}{-25}\begin{pmatrix} -10 & -15 & 5 \\ 5 & 5 & -5 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

124

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$$x_1 = \frac{1}{-2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2,\quad x_2 = \frac{1}{-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -64$

$$x_1 = \frac{1}{-64}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-28}{-64} = \frac{7}{16},\quad x_2 = \frac{1}{-64}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{6}{-64} = -\frac{3}{32}$$

(3) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -48$

$$x_1 = \frac{1}{-48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -11 \end{vmatrix} = -\frac{1}{48}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = -\frac{12}{48} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{-48}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{48}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{1}{48}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = \frac{51}{48} = \frac{17}{16}$$

$$x_3 = \frac{1}{-48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{48}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{48}\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{21}{48} = -\frac{7}{16}$$

124　つづき

(4)　$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & -7 & 5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5 & -1\\ -7 & 5\end{vmatrix}=-18$

$$x_1=\frac{1}{-18}\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 5\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}$$

$$x_2=\frac{1}{-18}\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ -3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 5\end{vmatrix}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=\frac{13}{18}$$

$$x_3=\frac{1}{-18}\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{18}\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 3\\ 0 & -7 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix}5 & 3\\ -7 & -2\end{vmatrix}=\frac{11}{18}$$

125

(1)　$\begin{vmatrix}3 & 1 & k\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2 & t+6\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & k+6\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-6-k-6=-12-k=0$　　$\therefore\quad k=-12$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & -12 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -12 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -6 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\therefore\quad \begin{aligned}x_1+x_2-2x_3&=0\\ x_2+3x_3&=0\end{aligned}$$

したがって　$x_3=t\ (t\fallingdotseq 0)$とおくと，$x_1=5t$，$x_2=-3t$，$x_3=t$　（t は 0 でない任意の数）

(2)　$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2k & 1 & k\\ 2 & 2k & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2k & 1-2k & k\\ 2 & 2k-2 & 1\end{vmatrix}=(1-2k)-k(2k-2)=1-2k-2k^2+2k=-2k^2+1=0$

$\therefore\quad k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ \pm\sqrt{2} & 1 & \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2 & \pm\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1\mp\sqrt{2} & \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -2\pm\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1\mp\sqrt{2} & \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\text{（複号同順）}$$

$\therefore\quad \begin{aligned}x_1+x_2&=0\\ \left(1\mp\sqrt{2}\right)x_2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x_3&=0\end{aligned}$　（複号同順）　つまり $\pm x_3=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(-1\pm\sqrt{2}\right)x_2=\left(-\sqrt{2}\pm 2\right)x_2$

したがって　$x_2=t\ (t\fallingdotseq 0)$とおくと，

$k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　のとき　$x_1=-t$，$x_2=t$，$x_3=\left(2-\sqrt{2}\right)t$

$k=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　のとき　$x_1=-t$，$x_2=t$，$x_3=\left(2+\sqrt{2}\right)t$　（t は 0 でない任意の数）

126

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

したがって　△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}3&1\\9&8\end{vmatrix}$ の絶対値で　$\dfrac{15}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$

したがって　△ACD の面積は　$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&0\\8&6\end{vmatrix}$ の絶対値で　3

以上より　四角形 ABCD の面積は　$\dfrac{21}{2}$

127

⑴　$\begin{vmatrix}2&1&3\\-3&2&-1\\4&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&3\\5&2&-1\\0&-1&0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}6&3\\5&-1\end{vmatrix}=-6-15=-21$　したがって　$|-21|=21$

⑵　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{2b}-\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{3c}-\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}7\\0\\-4\end{pmatrix}$ より

$$\begin{vmatrix}1&-1&7\\-5&5&0\\5&-2&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&7\\0&5&0\\3&-2&-4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}0&7\\3&-4\end{vmatrix}=-105$$

したがって　$|-105|=105$

128

⑴　$\begin{vmatrix}2&-3&6\\-2&5&-4\\0&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-3&6\\0&2&-4\\0&2&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&-4\\2&3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&-4\\1&3\end{vmatrix}=4\fallingdotseq 0$　　したがって　1 次独立

⑵　$\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&7\\1&4&7\\3&6&9\end{vmatrix}=0$　　したがって　1 次従属

B 問題

129

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc(c-b),\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} = ac(a-c),\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab(b-a)$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b+c)(b-c),\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c+a)(c-a),\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = c-b,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} = a-c,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b-a$$

したがって

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\begin{pmatrix} bc(c-b) & (b+c)(b-c) & c-b \\ ac(a-c) & (c+a)(c-a) & a-c \\ ab(b-a) & (a+b)(a-b) & b-a \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -b & 0 & a \\ a & -b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a & -b \\ a-b & 0 & a \\ a-b & -b & 0 \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 1 & 0 & a \\ 1 & -b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 0 & -a & a+b \\ 0 & -b-a & b \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} -a & a+b \\ -(a+b) & b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\left(-ab+(a+b)^2\right) = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{vmatrix} = ab,\ \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} -b & a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2,\ \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & -b \end{vmatrix} = b^2$$

$$\tilde{a}_{21} = \begin{vmatrix} a & -b \\ -b & 0 \end{vmatrix} = b^2,\ \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -b \\ a & 0 \end{vmatrix} = ab,\ \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & -b \end{vmatrix} = a^2$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2,\ \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -b \\ -b & a \end{vmatrix} = b^2,\ \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{vmatrix} = ab$$

したがって

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}\begin{pmatrix} ab & b^2 & a^2 \\ a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \end{pmatrix}$$

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\tilde{a}_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\tilde{a}_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

よって

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

130　つづき

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$,　$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0$

$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot 0 = 0$,　$\tilde{a}_{14} = (-1)^{1+4} \cdot 0 = 0$

$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$,　$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$,　$\tilde{a}_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$,　$\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$,　$\tilde{a}_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\tilde{a}_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$,　$\tilde{a}_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\tilde{a}_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$,　$\tilde{a}_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

よって

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

131

必要　：　A^{-1} の成分がすべて整数とすると $|A^{-1}|$ は整数

$$1=|E|=|A^{-1}A|=|A^{-1}||A| \text{ より}$$

$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ が整数であるので　$|A|=\pm 1$

十分　：　$|A|=\pm 1$ ならば $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}=\pm\tilde{A}$ であり

$\tilde{A}$ の各成分は整数成分からなる行列 A の余因子である。よって　A^{-1} の成分も整数

132

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\\ 1 & a^3 & b^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 0 & a^2-a & b^2-b\\ 0 & a^3-a & b^3-b\end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix}a-1 & b-1\\ a^2-1 & b^2-1\end{vmatrix}$$

$$=ab(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ a+1 & b+1\end{vmatrix}=ab(a-1)(b-1)(b-a)$$

ただ 1 つの解をもつための必要十分条件は　$|A|\fallingdotseq 0$ であるので

$a\fallingdotseq 1$ かつ $b\fallingdotseq 1$ かつ $a\fallingdotseq b$

133

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\ 5\\ -5\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が定める平行六面体の体積は

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 3\\ -5 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 5 & 7 & -2\\ -5 & -7 & 6\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}7 & -2\\ -7 & 6\end{vmatrix}=(-7)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-28$$ の絶対値であるので　28

ABCD を頂点とする四面体の体積はその $\dfrac{1}{6}$　したがって $\dfrac{28}{6}=\dfrac{14}{3}$

134

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \fallingdotseq 0$　　したがって　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立。

(2) $l\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$　とおく

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}$　クラメルの公式より,

$$l = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 13 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 9 & -7 & 1 \\ 16 & -8 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-3}{9}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}(-14+8) = 2$$

$$m = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -2 & 13 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -2 & 11 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{9}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(20-11) = 3$$

$$n = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 13 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{9}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 1$$

したがって　$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

135　$l\boldsymbol{x} + m\boldsymbol{y} + n\boldsymbol{z} = \boldsymbol{O}$　とおくとき　$l = m = n = 0$　であることを示せばよい。

$l(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) + m(-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) + n(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{O}$

$(l - m + n)\boldsymbol{a} + (2l - m + n)\boldsymbol{b} + (-l - m)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{O}$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるので

$$\begin{cases} l - m + n = 0 \\ 2l - m + n = 0 \\ -l - m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 - 1 = -1 \fallingdotseq 0$$

より㋐は唯一組の解をもち，その解は　$l = m = n = 0$　となるので

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ は 1 次独立。

136

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 2 \\ a & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 2 & 1 & a & 0 \end{vmatrix} = (3+a)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & a & 0 \end{vmatrix} = (3+a)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & -a & 1 & -1 \\ 0 & 2-a & -1 & a-2 \\ 0 & 1-a & a-1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (3+a)\begin{vmatrix} -a & 1 & -1 \\ 2-a & -1 & a-2 \\ 1-a & a-1 & -2 \end{vmatrix} = (3+a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2-2a & -1 & a-3 \\ 1-2a+a^2 & a-1 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$= -(3+a)\begin{vmatrix} 2(1-a) & a-3 \\ (1-a)^2 & a-3 \end{vmatrix} = -(3+a)(1-a)(a-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1-a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(3+a)(1-a)(a-3)(1+a) = 0$$

したがって　$a = \pm 3,\ \pm 1$

137

㋐ $\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y = 0 \\ 2x + (-2-\lambda)y = 0 \end{cases}$ が　$x = y = 0$　以外の解をもつには

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0$　よって　$\lambda = 2,\ -1$

(i) $\lambda = 2$　のとき㋐は　$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$　なので解は　$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$　（ t は 0 以外の任意数）

(ii) $\lambda = -1$　のとき㋐は　$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$　なので解は　$\begin{cases} x = s \\ y = 2s \end{cases}$　（ s は 0 以外の任意数）

138

(1)　$${}^tAA = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{a}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{b}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{c}|^2 \end{pmatrix}$$

$|{}^tAA| = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2$，$|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2$　より　$|A| = \pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$

(2)　(1)より　$|A| = \pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$ であるが，$\boldsymbol{a} \fallingdotseq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b} \fallingdotseq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{c} \fallingdotseq \boldsymbol{0}$ より $|A| \fallingdotseq 0$，

$\therefore$　$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ は 1 次独立。

(3)　$\boldsymbol{x} = l\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{c}$　と　$\boldsymbol{a}$ との内積をとると，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = l\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = l|\boldsymbol{a}|^2$$

$\therefore$　$l = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{a}|^2}$，同様に　$m = \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{b}|^2}$，$n = \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{c}|^2}$

発展問題

139

⑴　(i)　$\left|A\right| \neq 0$ のとき $A^{-1}\dfrac{\tilde{A}}{\left|A\right|}$ より $AA^{-1} = A\dfrac{\tilde{A}}{\left|A\right|} = E$　よって $A\tilde{A} = \left|A\right|E$ …㋐

つまり $A\tilde{A}$ は n 次の対角行列で成分はすべて $\left|A\right|$

よって $|A\tilde{A}| = |A|^n$

∴　$|A||\tilde{A}| = |A|^n$　より　$|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$　…㋑

(ii)　$\left|A\right| = 0$ のとき $A\tilde{A} = \left|A\right|E = O$（零行列）である。

よって A の所に $\tilde{A}$ を代入すると $\tilde{A}\,\tilde{\tilde{A}} = \left|\tilde{A}\right|E = O$

従って　$A\tilde{A}\tilde{\tilde{A}} = A\left|\tilde{A}\right|E = O$　ここで $\left|\tilde{A}\right| \neq 0$ ならば $A = O$ であり

$\tilde{A} = O$ となって矛盾。よって $\left|\tilde{A}\right| = 0$ である。

従って　$\left|\tilde{A}\right| = 0 = \left|A\right|^{n-1}$ が成立。

⑵　㋐の A を $\tilde{A}$ とすると $\tilde{A}\,\tilde{\tilde{A}} = \left|\tilde{A}\right|E$ であるから

$A\tilde{A}\tilde{\tilde{A}} = A|\tilde{A}|E$ である。㋐，㋑より $\left|A\right|E\tilde{\tilde{A}} = A\left|A\right|^{n-1}E$ であるから　$\tilde{\tilde{A}} = A|A|^{n-2}$。

つまり $\tilde{\tilde{A}} = |A|^{n-2}A$

$$|A|\varDelta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn}\\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)(r+1)} & \cdots & a_{(r+1)n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & a_{n(r+1)} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & & \widetilde{a}_{(r+1)1} & \cdots & \widetilde{a}_{n1}\\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & \widetilde{a}_{(r+1)r} & \cdots & \widetilde{a}_{nr}\\ 0 & \cdots & 0 & \widetilde{a}_{(r+1)(r+1)} & \cdots & \widetilde{a}_{n(r+1)}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \widetilde{a}_{(r+1)n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn}\end{vmatrix}$$

（$\boxed{}$ は r 次の単位行列。）

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0\\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)r} & |A| & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & & & |A| \end{vmatrix} = |A|^{n-r}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \vdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}$$

（$a_{l1}\widetilde{a}_{k1}+a_{l2}\widetilde{a}_{k2}+\cdots+a_{ln}\widetilde{a}_{kn}$
$=\begin{cases} |A| & (l=k \text{ のとき})\\ 0 & (l\neq k \text{ のとき})\end{cases}$
$\boxed{}$ はすべての対角成分が
$|A|$ であるような
$(n-r)$ 次の対角行列。）

より　$$\varDelta_r = |A|^{n-r-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}$$

新版線形代数 演習 改訂版　解答

3 章の問題 A

1.

⑴
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

⑵
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

⑶
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 7 & -7 \\ 5 & -16 & 11 & -12 \\ 5 & -3 & 8 & -24 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & 7 & -7 \\ -16 & 11 & -12 \\ -3 & 8 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 \\ -16 & 11 & -1 \\ -3 & 8 & -16 \end{vmatrix} \overset{②+①\times(-2)}{=} \begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & -16 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \\ -67 & 56 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -10 & 7 \\ -67 & 56 \end{vmatrix}$$

$$= 7\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -11 & 56 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -11 & 8 \end{vmatrix} = 7(-24+11) = -91$$

⑷
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10-(-4) = 14$$

⑸
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 5 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6-1 = 5$$

⑹
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

3 章の問題 A　つづき

2.

⑴
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & y-1 & y^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & (x+1)(x-1) \\ y-1 & (y+1)(y-1) \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)\begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ 1 & y+1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(y-x)$$

⑵ A が正則ならば $|A| \fallingdotseq 0$ である。　$\therefore$　$x \fallingdotseq 1$　かつ　$y \fallingdotseq 1$　かつ　$x \fallingdotseq y$

3. $|2A| = 2^2|A| = 4 \cdot 12 = 48$

4.

⑴ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = 2$

⑵ $|A^{-1}B| = |A^{-1}||B| = 2 \cdot 0 = 0$

5.
$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & a & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 3 & a & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 0 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a(a-2) = 0$$

したがって　$a = 0,\ 2$

$a = 0$　のとき　$\begin{cases} y - z = 0 \\ 3x = 0 \\ -2x - y + z = 0 \end{cases}$　より　$x = 0$，$y = t$，$z = t$　（t は 0 でない任意定数）

$a = 2$　のとき　$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$　より　$x = 2t$，$y = -3t$，$z = t$　（t は 0 でない任意定数）

6. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$　が 1 次従属であればよいので

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & -3 \\ 0 & 8 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 8 & a+1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = 8(-a-1+3)$$

したがって　$a = 2$

3 章の問題 B

1.

⑴ $$f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -abc & ab+bc+ca & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$= x^2(x-a-b-c)-abc+x(ab+bc+ca)$$

$$= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

⑵ $$f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -abc & ab+bc+ca & x-a-b-c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x-a & -1 \\ -abc & bc+ax-a^2 & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-a & -1 & 0 \\ a(x-a) & x-a & -1 \\ a^2(x-a) & bc+ax-a^2 & x-a-b-c \end{vmatrix}=(x-a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & x-a & -1 \\ a^2 & bc+ax-a^2 & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x & -1 \\ a^2 & bc+ax & x-a-b-c \end{vmatrix}=(x-a)\begin{vmatrix} x & -1 \\ bc+ax & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\begin{vmatrix} x-b & -1 \\ (x-b)(a+b) & x-a-b-c \end{vmatrix}=(x-a)(x-b)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a+b & x-a-b-c \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)$$

⑶ $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=0$ より $x=a,\ b,\ c$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a+1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & -a & 1 & a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \end{array}\right) \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x+z=1 \\ y+(a-1)z=a \\ az=0 \\ -ay=a \end{cases}$$

となり $a=0$ のとき $x=1-t$， $y=z=t$ （t は任意定数）

$a \fallingdotseq 0$ のとき $$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

となるので $a \fallingdotseq -1$ のとき　解はない。

$a=-1$ のとき $x=1$， $y=-1$， $z=0$

3 章の問題 B　つづき

3.

⑴　Δ_{n+2} を第 1 行で展開すると，

$$\Delta_{n+2} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & \\ \vdots & -1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

（どちらも（n+1）次正方行列の行列式）

$$= 2\Delta_{n+1} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$$

⑵　⑴より $\Delta_{n+2} - \Delta_{n+1} = \Delta_{n+1} - \Delta_n$ なので　$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$　$(n \geqq 3)$

したがって　$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \cdots = \Delta_2 - \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 = 1$

ゆえに

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Delta_{n-1} + 1 = (\Delta_{n+2} + 1) + 1 \\ &= \Delta_{n-2} + 2 = (\Delta_{n-3} + 1) + 2 \\ &\ \ \vdots \\ &= \Delta_1 + (n-1) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

4.　直線　$ax + by + c = 0$ の任意の点を $(x,\ y)$ とする。

⑴　3 点（0，0），（x_1，y_1），（x，y）が直線上の点であるので

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = 0 \\ a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c = 0 \\ a\cdot x + b\cdot y + c = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは，a，b，c が $a = b = c = 0$ 以外の解をもつことを意味するので

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

⑵　3 点（x_1，y_1），（x_2，y_2），（x_3，y_3）を頂点とする三角形は，

ベクトル $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$ を隣り合う 2 辺とする三角形である。

したがって

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{abs}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{abs}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{abs}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$