２章　微分法　解答

１節　関数の極限

練習１

⑴　5　　⑵　1　　⑶　$\sqrt{3}$　　⑷　2　　⑸　0　　⑹　-3

練習２

⑴　与式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$　　⑵　与式 $=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$

⑶　与式 $=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=-1$　⑷　与式 $=\lim_{x\to -1}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(-x+1)=2$

練習３

⑴　与式 $=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

⑵　与式 $=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(3x-2)}{(x+2)(2x+3)}=\lim_{x\to -2}\dfrac{3x-2}{2x+3}=8$

⑶　与式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-1}=0$

練習４

⑴　与式 $=\lim_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$

⑵ 与式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=2$

⑶　与式 $=\lim_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{2x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{4}$

練習５

⑴　$\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ より，極限値が存在するためには

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$　　$4+2a+b=0$

ゆえに　　$b=-2a-4$　　……①

このとき　　左辺 $=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+a+2)=a+4$

したがって　$a+4=3$　ゆえに　$a=-1$

①から　　$b=-2$

逆に，　$a=-1$，　$b=-2$　のとき与えられた等式は成り立つ。

よって　　$a=-1$，　$b=-2$

⑵　$\lim_{x\to -1}(x+1)=0$ より，極限値が存在するためには

$\lim_{x\to -1}\left(a\sqrt{x+2}+b\right)=0$　　$a+b=0$

ゆえに　　$b=-a$　　……①

このとき　　左辺 $=\lim_{x\to -1}\dfrac{a\left(\sqrt{x+2}-1\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\dfrac{a(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\dfrac{a}{\sqrt{x+2}+1}=\dfrac{a}{2}$

したがって　　$\dfrac{a}{2}=1$　ゆえに　$a=2$

①から　　$b=-2$

逆に，　$a=2$，　$b=-2$　のとき与えられた等式は成り立つ。

よって　　$a=2$，　$b=-2$

練習６

⑴　∞　　⑵　$-\infty$

練習７

⑴　$-\infty$　　⑵　∞　　⑶　∞　　⑷　$-\infty$

⑸　$\lim_{x\to -0}\dfrac{|x|}{x}=\lim_{x\to -0}\dfrac{-x}{x}=\lim_{x\to -0}(-1)=-1$　　⑹　∞

練習８

⑴　0

⑵　0

⑶　1

⑷　与式 $=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=-\infty$

⑸　与式 $=\lim_{x\to -\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=-\infty$

⑹　∞

練習 9

⑴　与式 $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{3}{x}} = \dfrac{1}{2}$

⑵　与式 $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$

⑶　与式 $= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-\dfrac{5}{x^2}}{4-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}} = -\infty$

練習 10

⑴　与式 $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$

⑵　与式 $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+1}{1} = \infty$

⑶　1

⑷　0

⑸　$-\infty$

⑹　∞

練習 11

⑴　1

⑵　0

⑶　$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x} = 2$

練習 12

⑴　$\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ から $|x|\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x|$

よって，$0 \leqq \left|x\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x|$

$\lim_{x\to0}|x| = 0$ だから，はさみうちの原理より

$\lim_{x\to0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$

⑵　$|\sin x| \leqq 1$ から $\dfrac{|\sin x|}{|x|} \leqq \dfrac{1}{|x|}$

よって，$0 \leqq \dfrac{|\sin x|}{|x|} \leqq \dfrac{1}{|x|}$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0$ だから，はさみうちの原理より

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

練習 13

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$kx=t$ とおくと, $x\to 0$ のとき $t\to 0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

練習 14

⑴ 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=1\cdot 2=2$

⑵ 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1$

⑶ 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 3\right)=3$

⑷ 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=1^2=1$

⑸ 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$

練習 15

⑴ $\theta=x-\pi$ とおくと $x=\theta+\pi$

$x\to\pi$ のとき $\theta\to 0$ だから

与式 $\displaystyle=\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\left(\theta+\pi\right)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right)=1$

⑵ $\theta=x-\dfrac{\pi}{2}$ とおくと $x=\theta+\dfrac{\pi}{2}$, $2x-\pi=2\theta$

$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\theta\to 0$ だから

与式 $\displaystyle=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=-\frac{1}{2}$

⑶ $\theta=x-\pi$ とおくと $x=\theta+\pi$

$x\to\pi$ のとき $\theta\to 0$ だから

与式 $\displaystyle=\lim_{\theta\to 0}\frac{1+\cos\left(\theta+\pi\right)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\left(1+\cos\theta\right)\left(1+\cos\theta\right)}{\theta^2\left(1+\cos\theta\right)}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}=\frac{1}{2}$

練習 16

⑴ $f\left(1\right)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\left(x-1\right)}{x-1}=1$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 1}f\left(x\right)=f\left(1\right)$ が成り立つ。

よって, $f\left(x\right)$ は $x=1$ で連続である。

⑵　$f(1)=1$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-1)=-1$　であるから　$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

よって，　$f(x)$は $x=1$ で連続でない。

練習 17

⑴　分母　$x-1\neq 0$　より　$x<1,\ 1<x$　　$\therefore$　$(-\infty,\ 1),\ (1,\ \infty)$

⑵　$2-x \geqq 0$ より $x \leqq 2$　$\therefore (-\infty,\ 2)$

⑶　分母　$x^2-4\neq 0$　より　$x\neq \pm 2$　　$\therefore$　$(-\infty,\ -2),\ (-2,\ 2),\ (2,\ \infty)$

練習 18

⑴　$x=1$のとき最大値 2
　　$x=4$のとき最小値 $\frac{1}{2}$

⑵　$x=3$のとき最大値 8
　　$x=-1$のとき最小値 $\frac{1}{2}$

⑶　$x=0$のとき最大値 1
　　$x=\pi$のとき最小値 -1

⑷　$x=\frac{\pi}{2}$のとき最大値 1
　　$x=-\frac{\pi}{2}$のとき最小値 -1

練習 19

$f(x)=x-\cos x$　とおくと，　$f(x)$は区間$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$で連続であり，

$f(0)=-1<0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$

であるから，方程式　$f(x)=0$　は　$0<x<\frac{\pi}{2}$　の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

節末問題

1.

⑴　与式 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-x+4}{1+\dfrac{3}{x}}=-\infty$　　⑵　与式 $=-\infty$　　⑶　与式 $=0$

2.

⑴　与式 $=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x}=3$

⑵　与式 $=\lim_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

⑶　$x=-t$　とおくと　$x\to-\infty$　のとき　$t\to\infty$

$$与式=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{(-t)^2-t}-t\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)\left(\sqrt{t^2-t}+t\right)}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$$

⑷　$$与式=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{\sin x}(1+\cos x)\right\}=1\cdot2=2$$

⑸　$$与式=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0}\left(2\cos x\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=2$$

⑹　$x+\dfrac{\pi}{2}=\theta$とおくと　$x=\theta-\dfrac{\pi}{2}$，$2x+\pi=2\theta$

$x\to-\dfrac{\pi}{2}$のとき$\theta\to0$だから

$$与式=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(2\theta-\pi)}{2\theta}=\lim_{\theta\to0}\left(-\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)=-1$$

3.

⑴　$x=-t$とおくと　$x\to-\infty$のとき$t\to\infty$

$$与式=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-t}-2^t}{2^{-t}+2^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-2t}-1}{2^{-2t}+1}=-1$$

⑵　$$与式=\lim_{x\to\infty}\left(\log_2\frac{x^2+4}{2x^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\log_2\frac{1+\dfrac{4}{x^2}}{2}=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

4.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=2$$

$x=1$　で連続であるためには

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=2$　が成り立てばよい。

よって，　$f(1)=2$　より　$a=2$

5.

⑴　$\angle \mathrm{AOC} = \theta$ より $\mathrm{AC} = \mathrm{OA}\sin\theta = \sin\theta$

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 1\cdot\theta = \theta$

$\therefore \quad \lim_{\theta\to+0}\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AC}} = \lim_{\theta\to+0}\dfrac{\theta}{\sin\theta} = 1$

⑵　$\mathrm{BC} = \mathrm{OB} - \mathrm{OC} = 1-\cos\theta$ より

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{BC}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}^{2}} = \lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to+0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{2+\cos\theta}\right\} = \frac{1}{2}$$

6.

$f(x) = x + \log_2 x - 2$ とおくと

$f(x)$ は区間［1，2］で連続であり

$$f(1) = 1 + \log_2 1 - 2 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2 + \log_2 2 - 2 = 1 > 0$$

であるから，方程式 $f(x) = 0$ は $1 < x < 2$ の範囲に

少なくとも一つの実数の解をもつ。