１章　確率

演習

演習 1

⑴　n 回終了したとき，偶数である確率が p_n であるから，奇数である確率は $1-p_n$ である。

1 回の試行で，偶数を引く確率は $\dfrac{1}{3}$，奇数を引く確率は $\dfrac{2}{3}$

したがって，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{2}{3}(1-p_n)$　　　よって，$p_{n+1}=-\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{2}{3}$

⑵　$p_1=\dfrac{1}{3}$

$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$ と変形すると

数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は　初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}$

演習 2

⑴　1 回の試行で 1 の目の出る確率は $\dfrac{1}{6}$

k 回目までに 3 回目の 1 の目が出るのは，$k-1$ 回目までに，1 の目が 2 回出て k 回目に 3 回目の 1 の目が出ることである。

したがって，$p_k={}_{k-1}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-3}\times\dfrac{1}{6}$

よって　　$p_k=\dfrac{(k-1)(k-2)\cdot 5^{k-3}}{2\cdot 6^k}$

$$p_{k+1}=\frac{k(k-1)\cdot 5^{k-2}}{2\cdot 6^{k+1}}$$

⑵　$p_k < p_{k+1}$　となる k の値の範囲を求める。

$$\frac{(k-1)(k-2)\cdot 5^{k-3}}{2\cdot 6^k} < \frac{k(k-1)\cdot 5^{k-2}}{2\cdot 6^{k+1}}$$

$$k-2 < \frac{k\cdot 5}{6}$$

$6k-12 < 5k$　より　$k < 12$

$k=12$　のとき，p_k と p_{k+1}　の値は

$$p_{12} = \frac{11\cdot 10\cdot 5^9}{2\cdot 6^{12}} \qquad p_{13} = \frac{12\cdot 11\cdot 5^{10}}{2\cdot 6^{13}}$$

$$= \frac{2\cdot 11\cdot 5^{10}}{2\cdot 6^{12}} \qquad = \frac{2\cdot 11\cdot 5^{10}}{2\cdot 6^{12}}$$

これより

$p_0 < p_1 < \cdots\cdots < p_{11} < p_{12} = p_{13} > p_{14} > \cdots\cdots$

がなりたつ。

よって，$k=12$ または 13 のとき p_k は最大となる。