３章　確率分布

章末問題

1

⑴　2 数 a， $b\,(a>b)$ の和 $a+b$ は図のようになる。

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1						
2	3					
3	4	5				
4	5	6	7			
5	6	7	8	9		
6	7	8	9	10	11	

2 枚のカードのすべての取り出し方は

$${}_6\mathrm{C}_2 = 15 \text{通り}$$

であるから，X の確率分布を表にすると，

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

⑵　⑴の表から

$$P(X \leqq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$
$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

2　$P(X=0) = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{84}$

$P(X=1) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{18}{84}$

$P(X=2) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{45}{84}$

$P(X=3) = \dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \dfrac{20}{84}$

よって，平均は　$E(X) = \dfrac{1}{84}(0\times 1 + 1\times 18 + 2\times 45 + 3\times 20) = 2$

次に　$E(X^2) = \dfrac{1}{84}(0^2\times 1 + 1^2\times 18 + 2^2\times 45 + 3^2\times 20) = \dfrac{9}{2}$　より

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{9}{2} - 2^2 = \dfrac{1}{2}$

よって，標準偏差は $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3

$E(X)=m,\ \sigma(X)=\sigma$ 　より

$E(Z)=E(aX+b)=aE(X)+b$

$\qquad\qquad\qquad =am+b$

$\sigma(Z)=\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

$\qquad\qquad\qquad =|a|\sigma$

$E(Z)=2m,\ \sigma(Z)=\dfrac{1}{2}\sigma$ 　より

$am+b=2m$ 　　　　…①

$|a|\sigma=\dfrac{1}{2}\sigma$ 　　　　…②

①，②を解いて $a=\pm\dfrac{1}{2}$

よって　$a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2}m$

$a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{5}{2}m$

4

X は二項分布 $B\left(4,\ \dfrac{1}{5}\right)$ に従うから

$P(X=r)={}_4\mathrm{C}_r\left(\dfrac{1}{5}\right)^r\left(\dfrac{4}{5}\right)^{4-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

⑴　$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{96}{625}$

⑵　$P(X\leqq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$\qquad =\dfrac{256}{625}+\dfrac{256}{625}+\dfrac{96}{625}=\dfrac{608}{625}$

5

任意の 1 人について，A 新聞の購読者である確率は 0.22 であるから，50 人の中の購読者数 X は二項分布 $B(50,\ 0.22)$ に従う。

よって

平均　　$E(X)=50\times0.22=11$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{50\times0.22\times0.78}$

$\qquad =\sqrt{8.58}=\dfrac{\sqrt{858}}{10}$

6

表の回数を Y とすると裏の回数は $20-Y$ であるから

$$X = 2Y-(20-Y) = 3Y-20$$
$$(Y = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 20)$$

ここで，Y は二項分布 $B\left(20,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(Y) = 20\times\frac{1}{2} = 10$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

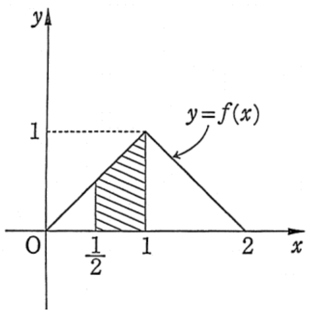
よって，X の平均 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ は

$$E(X) = E(3Y-20) = 3E(Y)-20 = 3\times10-20 = 10$$

$$\sigma(X) = |3|\,\sigma(Y) = 3\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

7

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & (1 \leqq x \leqq 2) \\ x & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$



$$P\left(\frac{1}{2} \leqq X \leqq 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{3}{8}$$

$$E(X) = \int_0^2 x f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (-x^2+2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2 = 1$$

8　A 社の缶コーヒーの容量を X とすると，X は $N(203,\ 1^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-203}{1}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

容量が 200g に満たないものが生産される確率は

$$
\begin{aligned}
P(X<200)&=P(Z<-3)\\
&=P(Z>3)\\
&=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 3)\\
&=0.5-0.4987=0.0013
\end{aligned}
$$

9　この工場で生産されるパン 1 個の重さを X とすると，X は $N(100,\ 5^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-100}{5}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=90$ のとき， $Z=-2$ だから

$$
\begin{aligned}
P(X\leqq 90)&=P(Z\leqq -2)\\
&=P(Z\geqq 2)\\
&=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 2)\\
&=0.5-0.4772=0.0228
\end{aligned}
$$

よって， $500\times 0.0228=11.4$ から

90g 以下となるのは，およそ 11 個。

10

⑴　表の出る枚数 X は二項分布 $B(400,\ 0.5)$ に従う。

$E(X)=400\times 0.5=200$

$\sigma(X)=\sqrt{400\times 0.5\times 0.5}=10$

であるから，X は近似的に $N(200,\ 10^2)$ に従う。

ここで， $Z=\dfrac{X-200}{10}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=190$ のとき

$$Z=\frac{190-200}{10}=-1$$

よって

$$
\begin{aligned}
P(X\leqq 190)&=P(Z\leqq -1)=P(Z\geqq 1)\\
&=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 1)\\
&=0.5-0.3413=0.1587
\end{aligned}
$$

(2)　$P(X \leqq a) \fallingdotseq 0.1$ となる a の値を求める。

(1)の Z について，巻末の正規分布表から

$P(Z \leqq a') = 0.1$ となる a' は，$a' < 0$

だから

$$
\begin{aligned}
P(Z \leqq a') &= P(Z \geqq a') \\
&= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq -a') \\
&= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq -a') \fallingdotseq 0.1
\end{aligned}
$$

より　$P(0 \leqq Z \leqq -a') \fallingdotseq 0.4$

ゆえに　$-a' = 1.28$

よって　$a' = -1.28$

したがって，$Z = \dfrac{X - 200}{10} \leqq -1.28$ を解くと

$X \leqq 187.2$

a は整数だから　$a = 187$

11

表の出る回数を X とすると，X は二項分布 $B(1600,\ 0.5)$ に従う。

$E(X) = 1600 \times 0.5 = 800$

$\sigma(X) = \sqrt{1600 \times 0.5 \times 0.5} = 20$

であるから，X は近似的に正規分布 $N(800,\ 20^2)$ に従う。

$Z = \dfrac{X - 800}{20}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$X = 780$ のとき　$Z = -1$

$X = 840$ のとき　$Z = 2$

であるから

$$
\begin{aligned}
P(780 \leqq X \leqq 840) &= P(-1 \leqq Z \leqq 2) \\
&= P(0 \leqq Z \leqq 1) + P(0 \leqq Z \leqq 2) \\
&= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185
\end{aligned}
$$

12

⑴ X は $N(165,\ 6^2)$ に従うから，

$Z=\dfrac{X-165}{6}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=163$ のとき　$Z=-\dfrac{1}{3}=-0.33\cdots$

$X=167$ のとき　$Z=\dfrac{1}{3}=0.33\cdots$

であるから　$P(163\leqq X\leqq 167)$

$=P(-0.33\leqq Z\leqq 0.33)$

$=2P(0\leqq Z\leqq 0.33)$

$=2\times 0.1293=0.2586$

⑵ $E(\overline{X})=m=165$，$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}=\dfrac{6}{\sqrt{36}}=1$　より $\overline{X}$ は $N(165,\ 1^2)$ に従うから，

$Z=\dfrac{\overline{X}-165}{1}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$\overline{X}=163$ のとき　$Z=-2$

$\overline{X}=167$ のとき　$Z=2$

であるから　$P(163\leqq \overline{X}\leqq 167)$

$=P(-2\leqq Z\leqq 2)$

$=2P(0\leqq Z\leqq 2)$

$=2\times 0.4772=0.9544$

⑶ $\overline{X}$ は $N\left(165,\ \dfrac{6^2}{n}\right)$ に従うから

$Z=\dfrac{\overline{X}-165}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

$\overline{X}=163$ のとき　$Z=-\dfrac{\sqrt{n}}{3}$

$\overline{X}=167$ のとき　$Z=\dfrac{\sqrt{n}}{3}$

であるから　$P(163\leqq \overline{X}\leqq 167)$

$=P\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{3}\leqq Z\leqq \dfrac{\sqrt{n}}{3}\right)$

$=2P(0\leqq Z\leqq \dfrac{\sqrt{n}}{3})$

ここで，$2P(0\leqq Z\leqq 2.58)\fallingdotseq 0.99$ より

$\dfrac{\sqrt{n}}{3}\geqq 2.58$ を解いて，$n\geqq 59.90\cdots$

よって，n の最小値は 60