

3章 確率分布

1節 確率分布

練習 1 $P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$$P(X=1) = {}_3C_1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

よって、確率分布は次のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

練習 2

(1) 2個のさいころの目の差の絶対値は次の表のようになるから

$P(X=0) = \frac{6}{36}$		1	2	3	4	5	6
$P(X=1) = \frac{10}{36}$	1	0	1	2	3	4	5
$P(X=2) = \frac{8}{36}$	2	1	0	1	2	3	4
$P(X=3) = \frac{6}{36}$	3	2	1	0	1	2	3
$P(X=4) = \frac{4}{36}$	4	3	2	1	0	1	2
$P(X=5) = \frac{2}{36}$	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

よって、確率分布は次のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

(2) $P(0 \leq X \leq 2)$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{3}{18} + \frac{5}{18} + \frac{4}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

練習 3 $P(X = 0) = {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$$P(X = 1) = {}_4C_1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

$$P(X = 3) = {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 4) = {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

よって、確率分布は次のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

このとき、 X の平均は

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

問 1

$$\begin{aligned} E(X - m) &= \sum_{k=1}^n (x_k - m) p_k \\ &= \sum_{k=1}^n x_k p_k - m \sum_{k=1}^n p_k \\ &= m - m \times 1 = 0 \end{aligned}$$

練習 4

Y の分散は

$$\begin{aligned} V(Y) &= (1-3)^2 \times \frac{3}{9} + (2-3)^2 \times \frac{1}{9} + (3-3)^2 \times \frac{1}{9} + (4-3)^2 \times \frac{1}{9} \\ &\quad + (5-3)^2 \times \frac{3}{9} = \frac{26}{9} \end{aligned}$$

Y の標準偏差は

$$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{26}{9}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

練習 5

$$P(X=0)=\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_7C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}$$

より、平均と標準偏差は

$$E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= 0^2\times\frac{7}{15}+1^2\times\frac{7}{15}+2^2\times\frac{1}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{28}{75} \text{ より} \end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{28}{75}}=\frac{2\sqrt{21}}{15}$$

練習 6

$$E(X)=5, \sigma(X)=2 \text{ より}$$

平均は

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(-2X+3) = -2E(X)+3 \\ &= -2\times 5+3 = -7 \end{aligned}$$

標準偏差は

$$\sigma(Y)=\sigma(-2X+3)=|-2|\sigma(X)=2\times 2=4$$

練習 7

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(aX+b) = aE(X)+b \\ &= am+b \end{aligned}$$

$$E(Z)=50 \text{ より } am+b=50 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$\sigma(Z)=\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)=a\sigma$$

$$\sigma(Z)=10 \text{ より } a\sigma=10 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

①, ②より

$$a=\frac{10}{\sigma}, \quad b=50-\frac{10}{\sigma}m$$

練習 8

3 個のさいころの出る目の数をそれぞれ X , Y , Z とすると

$$E(X)=E(Y)=E(Z)=\frac{7}{2} \quad \text{であるから, 出る目の数の和の平均は}$$

$$\begin{aligned} E(X+Y+Z) &= E(X)+E(Y)+E(Z) \\ &= \frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{21}{2} \end{aligned}$$

練習 9

$$P(X = 0) \times P(Y = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$$

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{5} \quad \text{であるから}$$

$$P(X = 0, Y = 1) \neq P(X = 0) \times P(Y = 1)$$

よって、 X と Y は独立ではない。

問 2

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E((X + Y)^2) - \{E(X + Y)\}^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \{E(X) + E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\ &\quad - \{E(X)\}^2 - 2E(X)E(Y) - \{E(Y)\}^2 \end{aligned}$$

$$X \text{ と } Y \text{ は独立であるから } E(XY) = E(X)E(Y)$$

よって

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 + E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

練習 10

$$(1) \quad E(X) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.5 + 3 \times 0.3 = 2.1$$

$$E(Y) = 1 \times 0.1 + 3 \times 0.9 = 2.8$$

$$V(X) = 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.5 + 3^2 \times 0.3 - (2.1)^2 = 0.49$$

$$V(Y) = 1^2 \times 0.1 + 3^2 \times 0.9 - (2.8)^2 = 0.36$$

$$(2) \quad E(XY) = E(X)E(Y) = 2.1 \times 2.8 = 5.88$$

$$(3) \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 0.49 + 0.36 = 0.85$$

練習 11

1 回の試行で、赤球を取り出す確率は $\frac{2}{3}$ だから

$$P(X = r) = {}_5C_r \left(\frac{2}{3}\right)^r \left(\frac{1}{3}\right)^{5-r} \quad (r = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

より、確率分布を表にすると次のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$	1

この表から

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{112}{243}$$

練習 12

X は二項分布 $B\left(600, \frac{1}{6}\right)$ に従うから

$$\text{平均は, } E(X) = 600 \times \frac{1}{6} = 100$$

$$\text{標準偏差は, } \sigma(X) = \sqrt{600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{5\sqrt{30}}{3}$$

練習 13

2 以下の目が出る回数を X , 合計点数を Z とすると

$$Z = 3X - 3(20 - X) = 6X - 60$$

X は二項分布 $B\left(20, \frac{1}{3}\right)$ に従うから

$$E(X) = 20 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{20 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

よって, 平均と標準偏差は

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(6X - 60) = 6E(X) - 60 \\ &= 6 \times \frac{20}{3} - 60 = -20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(Z) &= \sigma(6X - 60) = |6| \sigma(X) \\ &= 6 \times \frac{2\sqrt{10}}{3} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$