◊ 1 複素関数と正則関数

A

72. 左から順に実部，虚部，絶対値，共役複素数を表す．
 (1) 与式$=5+i2$ より $\underline{5, 2, \sqrt{29}, 5-i2}$
 (2) 与式$=9+i7$ より $\underline{9, 7, \sqrt{130}, 9-i7}$
 (3) 与式$=-10+i9\sqrt{3}$ より $\underline{-10, 9\sqrt{3}, 7\sqrt{7}, -10-i9\sqrt{3}}$
 (4) 与式$=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}$ より $\underline{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{1}{2}}$

73. (1) $r=2, \theta=\dfrac{\pi}{3}$ より $\underline{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$
 (2) $r=\sqrt{2}, \theta=\dfrac{5}{4}\pi$ より $\underline{\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}}$
 (3) $r=1, \theta=\dfrac{3\pi}{2}$ より $\underline{e^{i\frac{3\pi}{2}}}$

74. (1) $|(2+i)-(1+i)|=|1|=\underline{1}$
 (2) $z_3=x+iy$ とおくと
 $|x+iy-(2+i)|=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=1,$
 $|x+iy-(1+i)|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=1$ より $x=\dfrac{3}{2}, y=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
 したがって $\underline{\dfrac{3}{2}+i\left(1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

75. $z_2=(z_1+z_2)+(-z_1)$ より $|z_2| \leqq |z_1+z_2|+|-z_1|=|z_1+z_2|+|z_1|$
 したがって $|z_2|-|z_1| \leqq |z_1+z_2|$ ゆえに $-|z_1+z_2| \leqq |z_1|-|z_2|$
 また，$z_1=(z_1+z_2)+(-z_2)$ より $|z_1| \leqq |z_1+z_2|+|-z_2|=|z_1+z_2|+|z_2|$
 したがって，$|z_1|-|z_2| \leqq |z_1+z_2|$

76. (1) $|(1-i)z|=\sqrt{2}|z|, \arg(1-i)z=-\dfrac{\pi}{4}+\arg z$ より
 点 z を原点の周りに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を z_1 とし，線分 Oz_1 を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した端の点
 (2) $|-(\sqrt{3}+i)z|=2|z|, \arg(-(\sqrt{3}+i)z)=\dfrac{7\pi}{6}+\arg z$ より
 点 z を原点の周りに $\dfrac{7\pi}{6}$ 回転した点を z_1 とし，線分 Oz_1 を 2 倍に拡大した端の点
 (3) $\left|\dfrac{z}{1+i\sqrt{3}}\right|=\left|\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}z\right|=\dfrac{1}{2}|z|, \arg\dfrac{z}{1+i\sqrt{3}}=-\dfrac{\pi}{3}+\arg z$ より
 点 z を原点の周りに $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点を z_1 とし，線分 Oz_1 を $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小した端の点

77. (1) $(1+i)^4 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 4e^{i\pi} = \underline{-4}$

(2) $(\sqrt{3}-i)^{12} = (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{12} = 4096e^{-i2\pi} = \underline{4096}$

(3) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)}{(1+i\sqrt{3})^5} = (2e^{-i\frac{\pi}{6}})(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{-5} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\dfrac{1}{32}e^{-i\frac{5\pi}{3}} = \dfrac{1}{16}e^{-i\frac{11\pi}{6}}$

$= \dfrac{1}{16}\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\Big) = \underline{\dfrac{\sqrt{3}}{32}+i\dfrac{1}{32}}$

78. (1) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^3 = r^3e^{3i\theta} = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

絶対値と偏角を比較して,

$r^3 = 1$ より $r = 1$

$3\theta = \Big(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\Big)$ より $\theta = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2$

よって，$\theta = \dfrac{1}{6}\pi, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{9}{6}\pi$

したがって，$z = e^{i\frac{1}{6}\pi}, e^{i\frac{5}{6}\pi}, e^{i\frac{9}{6}\pi} = \underline{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}, -i}$

(2) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^3 = r^3e^{3i\theta} = 8e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

絶対値と偏角を比較して,

$r^3 = 8$ より $r = 2$

$3\theta = \Big(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\Big)$ より $\theta = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2$

よって，$\theta = \dfrac{1}{6}\pi, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{9}{6}\pi$

したがって，$z = 2e^{i\frac{1}{6}\pi}, 2e^{i\frac{5}{6}\pi}, 2e^{i\frac{9}{6}\pi} = \underline{\pm\sqrt{3}+i, -i2}$

(3) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^4 = r^4e^{4i\theta} = 4e^{(\frac{2\pi}{3}+2k\pi)i}\,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

絶対値と偏角を比較して,

$r^4 = 4$ より $r = \sqrt{2}$

$4\theta = \Big(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\Big)$ より $\theta = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2, 3$

よって，$\theta = \dfrac{1}{6}\pi, \dfrac{4}{6}\pi, \dfrac{7}{6}\pi\ \dfrac{10}{6}\pi$

したがって，$z = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{6}\pi}, \sqrt{2}e^{i\frac{4}{6}\pi}, \sqrt{2}e^{i\frac{7}{6}\pi}\ \sqrt{2}e^{i\frac{10}{6}\pi}$

$= \underline{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i), \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})}$

79. (1) 左辺$=\cos iz = \dfrac{e^{i^2z}+e^{-i^2z}}{2} = \dfrac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh z$=右辺

(2) 左辺$=\sin iz = \dfrac{e^{i^2z}-e^{-i^2z}}{2i} = \dfrac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = i\sinh z$=右辺

80. (1) $(z^3+2z)'=\underline{3z^2+2}$
(2) $\{(z^2-i)(z+i)\}'=2z(z+i)+(z^2-i)=\underline{3z^2+i(2z-1)}$
(3) $\{(z^2+z+iz)^3\}'=\underline{3(z^2+z+iz)^2(2z+1+i)}$
(4) $\left(\dfrac{z+i}{(z-i)^2}\right)'=\dfrac{(z-i)^2-2(z-i)(z+i)}{(z-i)^4}=\underline{-\dfrac{z+i3}{(z-i)^3}}$

81. (1) $u_x=1, u_y=0, v_x=0, v_y=-1$ より
コーシー・リーマンの関係式 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ が成り立たないので，正則でない
(2) $u_x=2x, u_y=-2y, v_x=-2y, v_y=-2x$ より
コーシー・リーマンの関係式 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ が成り立たないので，正則でない
(3) $u_x=2x-2, u_y=-2y, v_x=2y, v_y=2x-2$ より
コーシー・リーマンの関係式 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ が成り立つので，正則,
その導関数は，$f'(x)=2x-2+i2y$

82. (1) $\varphi_x=2x, \varphi_{xx}=2, \varphi_y=-2y, \varphi_{yy}=2$
したがって，$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$ が成り立つので調和関数である．
(2) $\varphi_x=e^{-x}\sin y-xe^{-x}\sin y+ye^{-x}\cos y$,
$\varphi_{xx}=-2e^{-x}\sin y+xe^{-x}\sin y-ye^{-x}\cos y$,
$\varphi_y=xe^{-x}\cos y+ye^{-x}\sin y-e^{-x}\cos y$,
$\varphi_{yy}=-xe^{-x}\sin y+2e^{-x}\sin y+ye^{-x}\cos y$
したがって，$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$ が成り立つので調和関数である．

83. 正則関数にはコーシー・リーマンの関係式が成り立つので，
$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$
と，$u(x,y)$ または $v(x,y)$ の導関数だけで表される．
(1) $\dfrac{df}{dz}=2x-3+i2y=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ より
$\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x-3, \dfrac{\partial v}{\partial x}=2y$
これらから，$v(x,y)=(2x-3)y+c$(c は任意定数)
したがって，求める正則関数は，
$\underline{f(z)=x^2-y^2-3x+2+i(2x-3)y+ic\quad (c \text{ は任意定数})}$
(2) $\dfrac{df}{dz}=e^{-x}(y\cos y+(1-x)\sin y)+ie^{-x}((1-x)\cos y-y\sin y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$
より $\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^{-x}(y\cos y+(1-x)\sin y), \dfrac{\partial v}{\partial x}=e^{-x}((1-x)\cos y-y\sin y)$
これらから，$v(x,y)=e^{-x}(x\cos y+y\sin y)+c$($c$ は任意定数)
したがって，求める正則関数は，
$\underline{f(z)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)+ie^{-x}(x\cos y+y\sin y)+ic\,(c \text{ は任意定数})}$

84. (1) $|1+i|=\sqrt{2}, \arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$ より

$\sqrt{1+i}=\pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}=\pm\sqrt[4]{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\Big)=\underline{\pm\sqrt[4]{2}\Big(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Big)}$

(2) $|-i9|=9, \arg(-i9)=\dfrac{3\pi}{2}$ より

$\sqrt{-i9}=\pm\sqrt{9}e^{i\frac{3\pi}{4}}=\pm3\Big(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\Big)=\underline{\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}(-1+i)}$

(3) $|i27|=27, \arg(i27)=\dfrac{\pi}{2}$ より

$\sqrt[3]{i27}=\sqrt[3]{27}e^{i\frac{\pi}{6}}\omega_k=3\Big(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\Big)\omega_k=\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i)\omega_k$

ここで $\omega_k(k=0,1,2)$ は 1 の 3 乗根で,

$\omega_0=1, \omega_1=\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \omega_2=\dfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$

したがって, $\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i)\omega_0=\underline{\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i)}$

$\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i)\omega_1=\underline{\dfrac{3}{2}(-\sqrt{3}+i)}$

$\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i)\omega_2=\underline{-i3}$

85. (1) $|i2|=2, \arg(i2)=\dfrac{\pi}{2}$ より

$\log(i2)=\underline{\log 2+i\Big(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\Big)\quad (n \text{ は整数})}$

(2) $|\sqrt{3}+i|=2, \arg(\sqrt{3}+i)=\dfrac{\pi}{6}$ より

$\log(\sqrt{3}+i)=\underline{\log 2+i\Big(\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\Big)\quad (n \text{ は整数})}$

(3) (2) より $\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i)=\underline{\log 2+i\dfrac{\pi}{6}}$

86. $z=re^{i\theta}$ とすると

$\log z=\log r+i(\theta+2k\pi)$($k$ は整数) より $n\log z=n\log r+in(\theta+2k\pi)$

また, $z^n=r^ne^{in\theta}$ より $\log z^n=n\log r+i(n\theta+2k'\pi)$($k'$は整数)

虚部を比較すると $n(\theta+2k\pi)\neq(n\theta+2k'\pi)$ であるので,

複素関数では $\log z^n=n\log z$ は成り立たない.

87. (1) $w=\cos^{-1}z$ とおくと $z=\cos w$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=-\frac{1}{\sin w}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 w}}=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

(2) $w=\sin^{-1}z$ とおくと $z=\sin w$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{\cos w}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 w}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

(3) $w=\cosh^{-1}z$ とおくと $z=\cosh w$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{\sinh w}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 w-1}}=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$$

(4) $w=\sinh^{-1}z$ とおくと $z=\sinh w$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{\cosh w}=\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 z+1}}=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$$

88. (1) $w=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{1-i}=\underline{\dfrac{1+i}{2}}$

(2) $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$ より $\bar{z}=\dfrac{1}{w}$

したがって，$x-iy=\dfrac{1}{u+iv}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}$

ゆえに，$\underline{x=\dfrac{u}{u^2+v^2},y=\dfrac{v}{u^2+v^2}}$

(3) 直線 $z=2$ は $x=2$ であるので，

$2=\dfrac{u}{u^2+v^2}$ より $2u^2+2v^2=u$

式を整理すると $\left(u-\dfrac{1}{4}\right)^2+v^2=\dfrac{1}{16}$

すなわち，<u>中心 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$，半径 $\dfrac{1}{4}$ の円</u> に移る．

(4) 円 $|z-1|=1$ の両辺を 2 乗して $(x-1)^2+y^2=1$

したがって，$\left(\dfrac{u}{u^2+v^2}-1\right)^2+\left(\dfrac{v}{u^2+v^2}\right)^2=1$ より $\dfrac{1}{u^2+v^2}-\dfrac{2u}{u^2+v^2}=0$

したがって，$u=\dfrac{1}{2}$　すなわち，<u>直線 $u=\dfrac{1}{2}$</u> に移る．

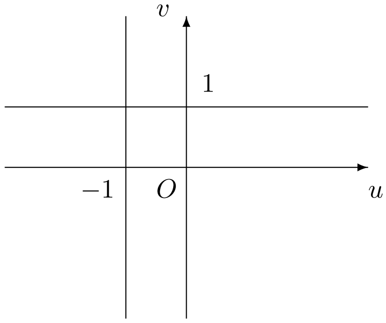
89. $z=x+yi$ のとき $1+iz=1-y+ix$ であるから，

$w=u+vi$ とおくと $u=1-y,\ v=x$ である．

$x=1$ の像の方程式は，<u>$v=1$ の直線</u>，

$y=2$ の像の方程式は，<u>$u=-1$ の直線</u>である．

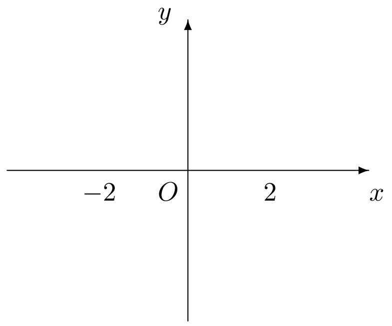
グラフは図のように等角性が成り立つ．



B

90. (1) $|z+4|+|z| = (x+4)^2+y^2+x^2+y^2 < 8$ より $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12} < 1$

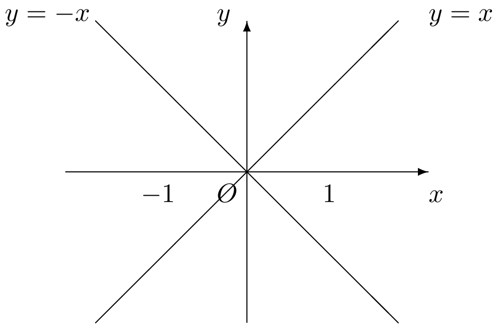
したがって，求める領域は図の斜線部分である．ただし，境界は含まない．



(2) $z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$ より $Re(z^2) = x^2-y^2$

$\mathrm{Re}(z^2) < 1$ より $x^2-y^2 < 1$

したがって，求める領域は図の斜線部分である．ただし，境界は含まない．



91. (1) コーシー・リーマンの偏微分方程式 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ より $\dfrac{d}{dz}f = \dfrac{\partial}{\partial x}f$

したがって，$\dfrac{d^n}{dz^n}f(z) = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}f(z) = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}+i\dfrac{\partial^n v}{\partial x^n}$

(2) コーシー・リーマンの偏微分方程式 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ より $\dfrac{d}{dz}f = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}f$

したがって，$\dfrac{d^{2n}}{dz^{2n}}f(z) = \dfrac{1}{i^{2n}}\dfrac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}f(z) = (-1)^n\dfrac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}f(z) = \left(\dfrac{\partial^{2n}u}{\partial y^{2n}}+i\dfrac{\partial^{2n}v}{\partial y^{2n}}\right)$

92. (1) $iz+3-i2 = 0$ より $z = \dfrac{-3+i2}{i} = \underline{2+i3}$

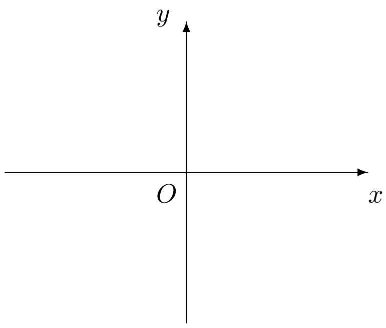
(2) $(4+i3)\bar{z}+1+i = 0$ より $\bar{z} = \dfrac{-1-i}{4+i3} = \dfrac{-7-i}{25}$ よって $z = \underline{\dfrac{-7+i}{25}}$

(3) $z = x+iy$ とおき，与式に代入し，整理すると $(3x-5y)-i(x+y) = 1$

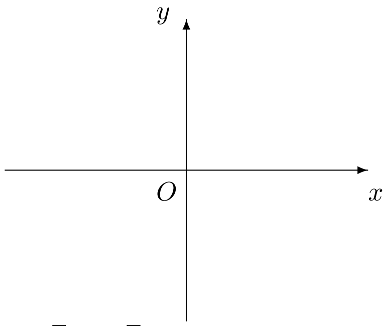
したがって，$3x-5y=1, x+y=0$ より $x=\dfrac{1}{8}, y=-\dfrac{1}{8}$
よって，$z=\underline{\dfrac{1}{8}+i\dfrac{1}{8}}$
(4) $z=x+iy$ とおき，与式に代入し，整理すると $(x^2+y^2-x-1)+i(3y+3)=0$
したがって，$x^2+y^2-x-1=0, 3y+3=0$ より $x=0, y=-1$ と $x=1, y=-1$
よって，$z=\underline{-i, 1-i}$

93. (1) $z=\dfrac{-(-i2)+\sqrt{(-i2)^2-16}}{2}=\dfrac{i2+\sqrt{-20}}{2}=\dfrac{i2\pm i2\sqrt{5}}{2}=i(1\pm\sqrt{5})$
(2) $z=\dfrac{-(1+i)+\sqrt{(1+i)^2-4\cdot 2(-2-i)}}{4}=\underline{\dfrac{-(1+i)+\sqrt{16+i10}}{4}}$

94. (1) $z=x+yi$ とおくと $|5z-i|^2=(5x)^2+(5y-1)^2, |3z-7i|^2=(3x)^2+(3y-7)^2$
したがって，$(5x)^2+(5y-1)^2=(3x)^2+(3x-7)^2$
これを整理して $x^2+(y+1)^2=4 \therefore |z+i|^2=4$
ゆえに $|z+i|=2$ であるから，点 $\underline{-i}$ を中心とする半径 2 の円.

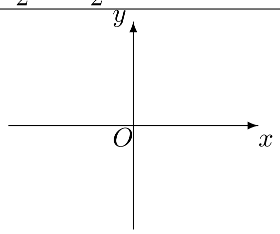


(2) $w=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}z-1}{2z+2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}z-3}{6z+6\sqrt{3}}$ より $z=\dfrac{-6\sqrt{3}w-3}{6w-\sqrt{3}}=\dfrac{-6w-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}w-1}$
これを $|z+i|=2$ に代入すると $\left|\dfrac{-6w-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}w-1}+i\right|=2$
$|-6w-\sqrt{3}+(2\sqrt{3}w-1)i|=2|2\sqrt{3}w-1|$
$|-6w-\sqrt{3}+(2\sqrt{3}w-1)i|^2=4|2\sqrt{3}w-1|^2$
ここで，$w=x+yi$ とおくと
$|-6w-\sqrt{3}+(2\sqrt{3}w-1)i|^2=|(-6x-\sqrt{3}-2\sqrt{3}y)+(-6y+2\sqrt{3}x-1)i|^2$
$=(-6x-\sqrt{3}-2\sqrt{3}y)^2+(-6y+2\sqrt{3}x-1)^2=4(12x^2+12y^2+2\sqrt{3}x+6y+1)$
また，$4|2\sqrt{3}w-1|^2=4\{(2\sqrt{3}x-1)^2+(2\sqrt{3}y)^2\}=4(12x^2+12y^2-4\sqrt{3}x+1)$
したがって，$12x^2+12y^2+2\sqrt{3}x+6y+1=12x^2+12y^2-4\sqrt{3}x+1$
これを整理して，$\underline{y=-\sqrt{3}x}$



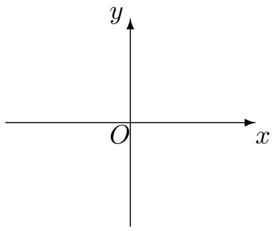
95. (1) 点 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ からの距離が常に一定に 2 であるから,

点 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ を中心とした半径 2 の円.



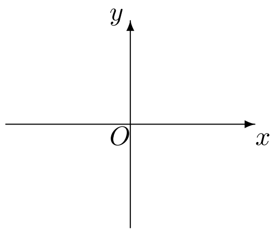
(2) 点 $\sqrt{2}i$ と点 $\sqrt{2}$ までの距離が常に等しいから,

2 点 $\sqrt{2}i, \sqrt{2}$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線.



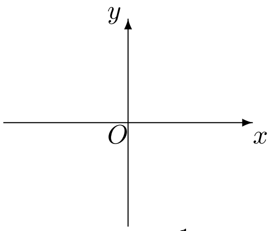
(3) 2 点 $\sqrt{2}i, \sqrt{2}$ までの距離の和が常に一定の 4 であるから,

2 点 $\sqrt{2}i, \sqrt{2}$ を焦点とする楕円.



(4) 2 点 $\sqrt{2}i, \sqrt{2}$ までの距離の差が常に一定の 1 であるから,

2 点 $\sqrt{2}i, \sqrt{2}$ を焦点とする双曲線.



96. $w=u+vi=z+\dfrac{1}{z}$ に $z=te^{i\alpha}$ を代入すると

$u=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\cos\alpha, v=\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\sin\alpha$

$\alpha=0$ のとき

$\underline{u=t+\dfrac{1}{t}\geqq 2,\quad v=0}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{u}{\cos\alpha}, t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{v}{\sin\alpha}$

両辺を 2 乗して引くと $4=\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha}-\dfrac{v^2}{\sin^2\alpha}$

したがって，$\underline{\dfrac{u^2}{(2\cos\alpha)^2}-\dfrac{v^2}{(2\sin\alpha)^2}=1, u>0}$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

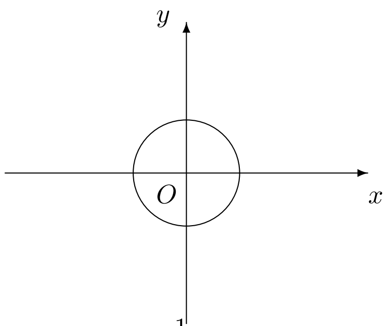
$\underline{u=0, v=t-\dfrac{1}{t}}$

97. (1) $z+\dfrac{1}{z}$ が実数ならば，例題 2 より $z=re^{i\theta}$ とおくとき，$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=0$

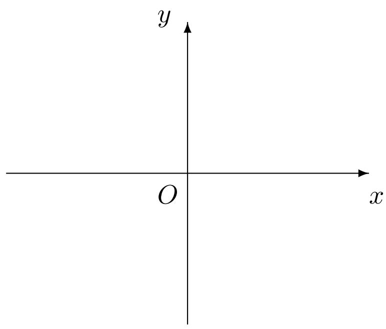
$r-\dfrac{1}{r}=0$ のとき，$r=1$ であるから，平面上の原点を中心とする単位円,

$\sin\theta=0$ のとき，原点を除く実軸.

したがって，z の存在する範囲は次のようになる.



$r-\dfrac{1}{r}=0$ のとき



$\sin\theta=0$ のとき

(2) $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=a$ であるから，

$\underline{r=1\ \text{のとき}}$，$a=2\cos\theta$ より $\underline{|a|\leqq 2}$

$\underline{\sin\theta=0\ \text{のとき}}$，$\cos\theta=\pm1$ であるから $a=\pm\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ したがって，$\underline{|a|\geqq 2}$

◊ 2 複素積分

A

98. (1) $\displaystyle\int_C (z^2+1)dz = \int_0^1 ((1-t)^2+1)(-dt) = -\int_0^1 (t^2-2t+2)dt$

$\displaystyle = -\Big[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t\Big]_0^1 = -\Big(\frac{1}{3}-1+2\Big) = \underline{-\frac{4}{3}}$

(2) $\displaystyle\int_C (z^2+z-1)dz = \int_0^1 (i^2(1-t)^2+i-it-1)(-i)dt$

$\displaystyle = \int_0^1 \{1-t+i(t^2-2t+2)\}dt = \Big[t-\frac{1}{2}t+i\Big\{\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\Big\}\Big]_0^1$

$\displaystyle = 1-\frac{1}{2}+i\Big(\frac{1}{3}-1+2\Big) = \underline{\frac{1}{2}+i\frac{4}{3}}$

(3) $\displaystyle\int_C (z-2)^3 dz = \int_0^{2\pi} e^{i3t} ie^{it}dt = i\Big[\frac{1}{i4}e^{i4t}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{4}(e^{i8\pi}-e^0) = \frac{1}{4}(1-1) = \underline{0}$

99. $|C_R|$ 上で $\displaystyle\frac{dz}{dt} = ia$

$|e^{-z^2}| = |e^{a^2t^2-R^2-i2Rat}| = e^{a^2t^2-R^2} \leqq e^{a^2-R^2}$

したがって $\displaystyle\Big|\int_{C_R} e^{-z^2}dz\Big| \leqq \int_0^1 |e^{-z^2}||ia|dt \leqq |a|e^{a^2-R^2}\int_0^1 dt = |a|e^{a^2-R^2}$

$R \to \pm\infty$ のとき $|a|e^{a^2-R^2} \to 0$ よって $\displaystyle\Big|\int_{C_R} e^{-z^2}dz\Big| \to 0$

100. (1) $\displaystyle\int_C z^3 dz = \int_0^{1+i} z^3 dz = \Big[\frac{1}{4}z^4\Big]_0^{1+i} = \frac{1}{4}(1+i)^4 = \frac{1}{4}(-4) = \underline{-1}$

(2) $\displaystyle\int_C \sin z dz = \int_0^i \sin z dz = [-\cos z]_0^i = -\cos i + \cos 0 = \underline{1-\cos i}$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}dz = \int_i^{i2}\frac{1}{z}dz = [\mathrm{Log}z]_i^{i2} = \mathrm{Log}(i2) - \mathrm{Log}i$

$\displaystyle = \log 2 + i\frac{\pi}{2} - \log 1 - i\frac{\pi}{2} = \underline{\log 2}$

101. $\displaystyle\frac{1}{z^2-9}$ は 2 点 ± 3 を除いた全平面で正則である.

(1) -1 から 1 に至る実軸上の線分を C_1 とするとコーシーの積分定理より,

$\displaystyle\int_{C_1+(-C)}\frac{1}{z^2-9}dz = \int_{C_1}\frac{1}{z^2-9}dz - \int_C\frac{1}{z^2-9}dz = 0$

ゆえに $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2-9}dz = \int_{C_1}\frac{1}{z^2-9}dz = \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2-9}dt = 2\int_0^1 \frac{1}{t^2-9}dt$

$\displaystyle = 2\int_0^1 \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\Big)dt = \frac{1}{3}\Big[\log|t-3| - \log|t+3|\Big]_0^1 = \frac{1}{3}(\log 2 - \log 4)$

$\displaystyle = \underline{-\frac{1}{3}\log 2}$

(2) i から $-i$ に至る虚軸上の線分を C_1 とするとコーシーの積分定理より,

$$\int_{C_1+(-C)} \frac{1}{z^2-9}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2-9}dz - \int_C \frac{1}{z^2-9}dz = 0$$

ゆえに $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2-9}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2-9}dz = \int_1^{-1} \frac{1}{t^2-9}idt = -i2\int_0^1 \frac{1}{t^2-9}dt$

$$= -i2\int_0^1 \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\Big)dt = \frac{-i}{3}\Big[\log|t-3| - \log|t+3|\Big]_0^1$$

$$= \frac{-i}{3}(\log 2 - \log 4) = \underline{\frac{i}{3}\log 2}$$

102. (1) $e^z \cos z$ は全平面で正則であるから,

コーシーの積分表示で $f(z) = e^z \cos z, \alpha = \pi$ の場合を考えると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\pi}dz = f(\pi) = e^\pi \cos\pi = -e^\pi$$

したがって, $\displaystyle\int_C \frac{e^z\cos z}{z-\pi}dz = \underline{-i2\pi e^\pi}$

(2) $\displaystyle\frac{z+1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z-1}$

コーシーの積分表示で $f(z) = -1, \alpha = 0$ の場合を考えると

$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z}dz = f(0) = 1$ より $\displaystyle\int_C \frac{-1}{z}dz = -i2\pi$

また, コーシーの積分表示で $f(z) = 2, \alpha = 1$ の場合を考えると

$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-1}dz = f(1) = 2$ より $\displaystyle\int_C \frac{2}{z-1}dz = i4\pi$

したがって, $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z(z-1)}dz = \int_C\Big(-\frac{1}{z} + \frac{2}{z-1}\Big)dz = -i2\pi + i4\pi = \underline{i2\pi}$

103. (1) C は $z=3$ を内部に含む単純閉曲線である.

$f(z) = z^2$ とおくと,

$f(z)$ は全平面で正則で何回でも微分可能であるので,

導関数の積分表示より $\displaystyle f''(3) = \frac{2}{i2\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-3)^3}dz$

また, $f''(z) = 2$ より $f''(3) = 2$

したがって, $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{(z-3)^3}dz = i\pi f''(3) = \underline{i2\pi}$

(2) C は $z=i$ を内部に含む単純閉曲線である.

$f(z) = z^4 + iz$ とおくと,

$f(z)$ は全平面で正則で何回でも微分可能であるので,

導関数の積分表示より $\displaystyle f^{(3)}(i) = \frac{3!}{i2\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^4}dz$

また, $f^{(3)}(z) = 24z$ より $f^{(3)}(i) = i24$

したがって, $\displaystyle\int_C \frac{z^4+iz}{(z-i)^4}dz = i\frac{1}{3}\pi f^{(3)}(i) = \underline{-8\pi}$

104. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-i}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-\frac{i}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\infty$

したがって，<u>発散する</u>.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-i}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-i}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{i}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=2$

したがって，<u>収束し，極限値は 2</u>.

(3) $\displaystyle\left|\frac{1}{\sqrt{3}+i}\right|=\frac{1}{2}<1$ したがって，<u>収束し，極限値は 0</u>.

(4) $e^{in}=\cos n+i\sin n$ より n の値により異なる単位円周上の値をとる．
よって，<u>発散（振動）する</u>.

105. (1) $\displaystyle\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{3}\right|=\frac{2}{3}<1$

したがって，<u>収束し</u>，<u>和は</u> $\displaystyle\frac{1}{1-\frac{1+i\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{2-i\sqrt{3}}=\underline{\frac{3}{7}(2+i\sqrt{3})}$

(2) $\displaystyle\left|\frac{3}{1+i\sqrt{3}}\right|=\frac{3}{2}>1$ したがって，<u>発散する</u>.

106. (1) $f(z)=\sin\dfrac{z}{2}$ は全平面で正則で，

$f'(z)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{z}{2}, f''(z)=-\dfrac{1}{2^2}\sin\dfrac{z}{2}, f^{(3)}=-\dfrac{1}{2^3}\cos\dfrac{z}{2},\cdots$ より

$f'(0)=\dfrac{1}{2}, f''(0)=0, f^{(3)}=-\dfrac{1}{2^3},\cdots$

したがって，$\underline{\sin\dfrac{z}{2}=\dfrac{1}{2}z-\dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{2^3}z^3+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)!}\dfrac{1}{2^{2n-1}}z^{2n-1}+\cdots}$

また，<u>収束半径は ∞</u>

(2) $f(z)=\cos 2z$ は全平面で正則で，

$f'(z)=-2\sin 2z, f''(z)=-2^2\cos 2z, f^{(3)}=2^3\sin 2z,\cdots$ より

$f'(0)=0, f''(0)=-2^2, f^{(3)}=,\cdots$

したがって，$\underline{\cos 2z=1-\dfrac{2^2}{2}z^2+\cdots+(-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}z^{2n}+\cdots}$

また，<u>収束半径は ∞</u>

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ は $z=1$ を除く全平面で正則で，

$f'(z)=-(z-1)^{-2}, f''(z)=2(z-1)^{-3}, f^{(3)}(z)=-3!(z-1)^{-4},\cdots$ より

$f(0)=-1, f'(0)=-1, f''(0)=-2, f^{(3)}(0)=-3!,\cdots$

したがって，$\underline{\dfrac{1}{z-1}=-1-z-z^2-\cdots-z^n-\cdots}$

また，<u>収束半径は 1</u>

(4) $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ は $z=1$ を除く全平面で正則で,

$f'(z)=-(z-1)^{-2}, f''(z)=2(z-1)^{-3}, f^{(3)}(z)=-3!(z-1)^{-4},\cdots$ より

$f(2)=1, f'(2)=-1, f''(2)=2, f^{(3)}(2)=-3!,\cdots$ したがって,

$$\underline{\frac{1}{z-1}=1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+\cdots+(-1)^n(z-2)^n+\cdots}$$

また,<u>収束半径は 1</u>

107. (1) $\dfrac{\sin z}{z}=\dfrac{1}{z}\Big(z-\dfrac{1}{3!}z^3+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots\Big)$

$$=\underline{1-\frac{1}{3!}z^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n}+\cdots}$$

(2) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^2}=\dfrac{1}{z^2}\Big(z-\dfrac{1}{2}z^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}z^n+\cdots\Big)$

$$=\underline{\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}z+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}z^{n-2}+\cdots}$$

(3) $ze^{\frac{1}{z}}=z\Big(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^2}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n}+\cdots\Big)$

$$=\underline{z+1+\frac{1}{2!z}+\cdots+\frac{1}{n!z^{n-1}}+\cdots}$$

108. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+6}=\dfrac{1}{(z+2)(z+3)}=\dfrac{1}{z+2}-\dfrac{1}{z+3}$

(1) $|z|<2$ より $\left|\dfrac{z}{3}\right|<1, \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ であるから

$$f(z)=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}=\frac{1}{2\Big(1+\frac{z}{2}\Big)}-\frac{1}{3\Big(1+\frac{z}{3}\Big)}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\cdots\Big)-\frac{1}{3}\Big(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\cdots\Big)=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}}$$

(2) $2<|z|<3$ より $\left|\dfrac{z}{3}\right|<1, \left|\dfrac{2}{z}\right|<1$ であるから

$$f(z)=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}-\frac{1}{3\Big(1+\frac{z}{3}\Big)}$$

$$=\frac{1}{z}\Big(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\Big)-\frac{1}{3}\Big(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\cdots\Big)=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}}$$

(3) $3<|z|$ より $\left|\dfrac{3}{z}\right|<1, \left|\dfrac{2}{z}\right|<1$ であるから

$$f(z)=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}=\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\Big)-\frac{1}{z}\Big(\frac{1}{1+\frac{3}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\left\{\Big(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\cdots\Big)-\Big(1-\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}-\cdots\Big)\right\}=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{z^{n+1}}}$$

109. (1) $\dfrac{\cos z}{z^5} = \dfrac{1}{z^5}\Big(1 - \dfrac{1}{2!}z^2 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots\Big)$

$= \dfrac{1}{z^5} - \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}z^{2n-5} + \cdots$

したがって，$\underline{z = 0 \text{ は 5 位の極}}$.

(2) $\dfrac{1-\cos z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2}\Big(\dfrac{1}{2!}z^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots\Big)$

$= \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{4!}z^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n)!}z^{2n-2}$

したがって，$\underline{z = 0 \text{ は 除去可能特異点}}$.

(3) $\sin \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{3!}\Big(\dfrac{1}{z^2}\Big)^3 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!}\Big(\dfrac{1}{z^2}\Big)^{2n+1} + \cdots$

したがって，$\underline{z = 0 \text{ は真性特異点}}$.

110. (1) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-9} = \dfrac{2z}{(z+3)(z-3)}$ の孤立特異点は ± 3 で，ともに 1 位の極.

$\underline{\mathrm{Res}[f,3]} = \lim_{z\to 3} \dfrac{2z}{z+3} = \underline{1}$, $\underline{\mathrm{Res}[f,-3]} = \lim_{z\to -3} \dfrac{2z}{z-3} = \underline{1}$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)^2}$ の孤立特異点は $0, -1$ で，ともに 2 位の極.

$\underline{\mathrm{Res}[f,0]} = \lim_{z\to 0} \Big(\dfrac{1}{(z+1)^2}\Big)' = \lim_{z\to 0} \dfrac{-2}{(z+1)^3} = \underline{-2}$

$\underline{\mathrm{Res}[f,-1]} = \lim_{z\to -1} \Big(\dfrac{1}{z^2}\Big)' = \lim_{z\to -1} \dfrac{-2}{z^3} = \underline{2}$

(3) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2+2} = \dfrac{e^{-z}}{(z+i\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})}$

の孤立特異点は $\pm i\sqrt{2}$ で，ともに 1 位の極.

$\underline{\mathrm{Res}[f,i\sqrt{2}]} = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \dfrac{e^{-z}}{z+i\sqrt{2}} = \underline{-i\dfrac{e^{-i\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}}$

$\underline{\mathrm{Res}[f,-i\sqrt{2}]} = \lim_{z\to -i\sqrt{2}} \dfrac{e^{-z}}{z-i\sqrt{2}} = \underline{i\dfrac{e^{i\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}}$

(4) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-i)^3}$ の孤立特異点は $0, i$ で，それぞれ 1 位，3 位の極.

$\underline{\mathrm{Res}[f,0]} = \lim_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{(z-i)^3} = \underline{0}$

$\underline{\mathrm{Res}[f,i]} = \dfrac{1}{2}\lim_{z\to i} \Big(\dfrac{\sin z}{z}\Big)'' = \dfrac{1}{2}\lim_{z\to i} \dfrac{-z^2\sin z - 2(z\cos z - \sin z)}{z^3}$

$= \underline{\cos i + i\dfrac{3}{2}\sin i}$

111. (1) $f(z)=\dfrac{3z+1}{z(z-1)}$ の C の内部にある孤立特異点は，$0,1$ である．

$\mathrm{Res}[f,0]=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{3z+1}{z-1}=-1,\ \mathrm{Res}[f,1]=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{3z+1}{z}=4$

したがって，留数定理より

$\displaystyle\int_C\frac{3z+1}{z(z-1)}dz=i2\pi(\mathrm{Res}[f,0]+\mathrm{Res}[f,1])=i2\pi(-1+4)=\underline{i6\pi}$

(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ の C の内部にある孤立特異点は，$\pm i$ である．

$\mathrm{Res}[f,i]=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{1}{z+i}=\dfrac{1}{2i},\ \mathrm{Res}[f,-i]=\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{1}{z-i}=-\dfrac{1}{2i}$

したがって，留数定理より

$\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2+1}dz=i2\pi(\mathrm{Res}[f,i]+\mathrm{Res}[f,-i])=2\pi\left(\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i}\right)=\underline{0}$

(3) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$ の C の内部にある孤立特異点は，$\pm i2$ である．

$\mathrm{Res}[f,i2]=\lim\limits_{z\to i2}\dfrac{z}{z+i2}=\dfrac{1}{2},\ \mathrm{Res}[f,-i2]=\lim\limits_{z\to -i2}\dfrac{z}{z-i2}=\dfrac{1}{2}$

したがって，留数定理より

$\displaystyle\int_C\frac{z}{z^2+4}dz=i2\pi(\mathrm{Res}[f,i2]+\mathrm{Res}[f,-i2])=2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\underline{i2\pi}$

(4) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+z-6}$ の C の内部にある孤立特異点は，2 である．

$\mathrm{Res}[f,2]=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{e^z}{z+3}=\dfrac{e^2}{5}$ したがって，留数定理より

$\displaystyle\int_C\frac{e^z}{z^2+z-6}dz=i2\pi(\mathrm{Res}[f,2])=i2\pi\left(\frac{e^2}{5}\right)=\underline{\frac{i2\pi e^2}{5}}$

(5) $f(z)=\dfrac{z\sin z}{(z-2)^2(z+1)}$ の C の内部にある孤立特異点は，2 である．

$\mathrm{Res}[f,2]=\lim\limits_{z\to 2}\left(\dfrac{z\sin z}{z+1}\right)'=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{\sin z+z^2\cos z+z\cos z}{(z+1)^2}=\dfrac{\sin 2+6\cos 2}{9}$

したがって，留数定理より

$\displaystyle\int_C\frac{z\sin z}{(z-2)^2(z+1)}dz=i2\pi(\mathrm{Res}[f,2])=\underline{i2\pi\left(\frac{\sin 2+6\cos 2}{9}\right)}$

112. (1) $f(z)=\dfrac{z}{(z-a)^2(1-az)^2}$ とおく．

$0<a<1$ より，$f(z)$ の C 内にある孤立特異点は a のみであり，
これは 2 位の極である．

よって，$\mathrm{Res}[f,a]=\lim\limits_{z\to a}\left(\dfrac{z}{(1-az)^2}\right)'=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{1+az}{(1-az)^3}=\dfrac{1+a^2}{(1-a^2)^3}$

したがって $\displaystyle\int_C f(z)dz=i2\pi\mathrm{Res}[f,a]=\underline{i2\pi\frac{1+a^2}{(1-a^2)^3}}$

(2) C の方程式を $z=e^{it}\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ とおくと

$dz=ie^{it}dt=izdt$ より $dt=\dfrac{1}{iz}dz=-\dfrac{i}{z}dz$

また，$\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であるので，

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-2a\cos t + a^2)^2} dt = \int_C \frac{-i}{\left(1 - a\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2\right)^2} \frac{1}{z} dz$$

$$= -i\int_C \frac{z}{(z - az^2 - a + a^2 z)^2} dz = -i\int_C \frac{z}{(z-a)^2(1-az)^2} dz = \underline{2\pi \frac{1+a^2}{(1-a^2)^3}}$$

B

113. α, β が C の外部にあるとき，

コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz = 0$

α, β が C の内部にあるとき，

$$\int_C \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz = \int_C \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta}\Big)dz = \frac{1}{\alpha-\beta}(2\pi i - 2\pi i) = 0$$

α のみが C の内部にあるとき，

$$\int_C \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz = \int_C \frac{1}{\alpha-\beta}\Big(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta}\Big)dz = \frac{1}{\alpha-\beta}(2\pi i - 0)$$

$$= \frac{i2\pi}{\alpha-\beta}$$

114. コーシーの積分表示 $\displaystyle f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$ を

$C : z = a + re^{i\theta}(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表せばよい．すなわち，

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

115. $e^z = 1$ より $z = 2k\pi i$(k は整数)

$\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1$ であるから　$f(0) = 1$ としておけば，

$f(z)$ は $|z| < 2\pi$ で正則である．したがって，$B_0 = f(0) = 1$

次に，$\displaystyle z = (e^z-1)f(z) = \Big(z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\Big)\Big(1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \cdots\Big)$

$\displaystyle = z + \Big(B_1 + \frac{1}{2}\Big)z^2 + \Big(\frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{1}{6}\Big)z^3 + \cdots +$

ゆえに，$\displaystyle B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}$

さらに，z^n の係数は $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k$ であるので $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = 0$

116. (1) α は 1 位の極であるから $h(\alpha) = 0$

$$\mathrm{Res}[f(z), \alpha] = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to\alpha}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(\alpha)}{z-\alpha}} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$$

(2) $z = \pm i$ は $\displaystyle f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}$ の 1 位の極であるから，(1) を用いて，

$$\mathrm{Res}[f(z), i] = \Big(\frac{\cos z}{z+i}\Big)_{z=i} = \frac{\cos i}{2i} = \underline{-i\frac{\cos i}{2}}$$

$$\mathrm{Res}[f(z), -i] = \Big(\frac{\cos z}{z-i}\Big)_{z=-i} = \frac{\cos(-i)}{-2i} = \underline{i\frac{\cos i}{2}}$$

117. (1) $z=e^{i\theta}$ とおくと $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big), d\theta=\dfrac{1}{iz}dz$ で，

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，z は円 $C:|z|=1$ を正の向きに 1 周する．

したがって，$I=\displaystyle\int_C \frac{1}{5+2z+\dfrac{2}{z}}\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{i}\int_C \frac{1}{2z^2+5z+2}dz=\frac{1}{i}\int_C \frac{1}{(2z+1)(z+2)}dz$

関数 $f(z)=\dfrac{1}{(2z+1)(z+2)}$ の C の内部にある孤立特異点は $-\dfrac{1}{2}$ である．

留数を求めると，$\mathrm{Res}\Big[f,-\dfrac{1}{2}\Big]=\displaystyle\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\Big(z+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{(2z+1)(z+2)}=\frac{1}{3}$

よって，留数定理により，$I=\dfrac{1}{i}2\pi i\mathrm{Res}\Big[f,-\dfrac{1}{2}\Big]=\underline{\dfrac{2\pi}{3}}$

(2) $z=e^{i\theta}$ とおくと $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big),\ d\theta=\dfrac{1}{iz}dz$ で，

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，z は円 $C:|z|=1$ を正の向きに 1 周する．

したがって，　$I=\displaystyle\int_C \frac{1}{3+z+\dfrac{1}{z}}\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{i}\int_C \frac{1}{z^2+3z+1}dz$

ここで，$z^2+3z+1=0$ を解くと $z=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

これを $\alpha,\beta\quad(\alpha<\beta)$ とおく．

$z^2+3z+1=(z-\alpha)(z-\beta)$ より $I=\dfrac{1}{i}\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz$

関数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ の C の内部にある孤立特異点は $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

留数を求めると，$\mathrm{Res}[f,\beta]=\displaystyle\lim_{z\to\beta}(z-\beta)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

よって，留数定理により，$I=\dfrac{1}{i}2\pi i\mathrm{Res}[f,\beta]=\underline{\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}}$

118. $z=e^{i\theta}$ とおくと $\sin\theta=\dfrac{1}{2i}\Big(z-\dfrac{1}{z}\Big),\ d\theta=\dfrac{1}{iz}dz$ で，

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，z は円 $C:|z|=1$ を正の向きに 1 周する．

したがって，　$I=\displaystyle\int_C \frac{1}{a+\dfrac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{1}{iz}dz=\int_C \frac{2}{z^2-1+i2az}dz$

ここで，$z^2-1+i2az=0$ を解くと $z=-ia\pm\sqrt{-a^2+1}=-ia\pm i\sqrt{a^2-1}$

関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+i2az-1}$ の $C:|z|=1$ の内部にある孤立特異点は

$\alpha=(-a+\sqrt{a^2-1})i$

留数を求めると，

$\mathrm{Res}[f,\alpha]=\displaystyle\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{2}{z^2-1+i2az}=\lim_{z\to\alpha}\frac{2}{z-i(-a-\sqrt{a^2-1})}=-\frac{i}{\sqrt{a^2-1}}$

よって，留数定理により，$I=2\pi i\mathrm{Res}[f,\alpha]=\underline{\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}}$

119. $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ の特異点は $z^4+1=0$ を解いて

$z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ の 4 点で，すべて 1 位の極.

次のような積分路を考える.

$C_R: z=Re^{i\theta}(0\leqq\theta\leqq\pi), C: z=x(-R\leqq x\leqq R)$

R が十分大きいとき，$\dfrac{1}{z^4+1}$ の特異点のうち，

積分路 $C+C_R$ で囲まれた領域の内部にあるものは，$\dfrac{\pm1+i}{\sqrt{2}}$ の 2 点.

$$\mathrm{Res}\Big[f(z),\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big]=\lim_{z\to\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\Big(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)\frac{1}{z^4-\Big(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big)^4}=\frac{1}{(z^4)'_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}}}=-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}\Big[f(z),\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\Big]=\lim_{z\to\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\Big(z-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\Big)\frac{1}{z^4-\Big(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\Big)^4}=\frac{1}{(z^4)'_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}}$$

$$=-\frac{-1+i}{4\sqrt{2}}$$

したがって，留数定理より

$$\int_{C+C_R}f(z)dz=2\pi i\Big(\mathrm{Res}\Big[f(z),\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Big]+\mathrm{Res}\Big[f(z),\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\Big]\Big)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ここで，$\displaystyle\int_{C+C_R}f(z)dz=\int_C f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz$

$R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{C_R}f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx\to\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$

また，$\displaystyle\Big|\int_{C_R}f(z)dz\Big|\leqq\frac{1}{R^4-1}\pi R\to0$ より $\displaystyle\int_{C_R}f(z)dz=0(R\to\infty)$

以上より，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\underline{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$

◇ 2章の問題

A

1. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^8 = \left(\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^8 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{5}{12}\pi})^8 = 16e^{-i\frac{10}{3}\pi}$

$= 16\left(\cos\dfrac{10}{3}\pi - i\sin\dfrac{10}{3}\pi\right) = 16\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + i8\sqrt{3}$

したがって，$A = -8, B = 8\sqrt{3}$

2. $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^4 = r^4 e^{4i\theta} = 4e^{(\pi+2k\pi)i}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

絶対値と偏角を比較して，

$r^4 = 4$ より $r = \sqrt{2}$

$4\theta = \left(\pi + 2k\pi\right)$ より $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{4}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2, 3$

よって，$\theta = \dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

したがって，$z = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi},\ \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi},\ \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi},\ \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} = \underline{\pm(1 \pm i)}$

3. (1) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^3 = r^3 e^{3i\theta} = 2e^{(\frac{2}{3}\pi+2k\pi)i}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

絶対値と偏角を比較して，

$r^3 = 2$ より $r = \sqrt[3]{2}$

$3\theta = \left(\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$ より $\theta = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2$

よって，$\theta = \dfrac{2}{9}\pi,\ \dfrac{8}{9}\pi,\ \dfrac{14}{9}\pi$

したがって，$z = \underline{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2}{9}\pi},\ \sqrt[3]{2}e^{i\frac{8}{9}\pi},\ \sqrt[3]{2}e^{i\frac{14}{9}\pi}}$

(2) $w = \dfrac{z+4}{z-1}$ より $z = \dfrac{w+4}{w-1}$

これを $|z| = 2$ に代入すると $\left|\dfrac{w+4}{w-1}\right| = 2$ したがって，$|w+4| = 2|w-1|$

ここで，$w = x + yi$ とすると $|w+4|^2 = 4|w-1|^2$ より

$(x+4)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$ から $\left(x - \dfrac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \dfrac{100}{9}$

よって，求める像は，$\underline{\text{点 } \dfrac{8}{3} \text{ を中心とする半径 } \dfrac{10}{3} \text{ の円}}$.

4. (1) $e^z = e^w$ より $e^{z-w} = 1 \therefore \underline{w - z = 2\pi ni \quad (n\text{ は整数})}$.

(2) $z = x + yi$ とすると $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ とおくと

$u_x = e^x \cos y, u_y = -e^x \sin y, v_x = e^x \sin y, v_y = e^x \cos y$

よって，すべての実数 x, y に対して，

コーシー・リーマンの関係式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ が成り立つので，

e^z は複素平面全体で正則.

(3) $\dfrac{de^z}{dz} = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y$

$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{yi} = e^{x+yi} = e^z$

5. $f(i) = i^i = e^{i \log i} = e^{i(\log|i| + i \arg i)} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)} = \underline{e^{-\frac{\pi}{2} - 2n\pi} \quad (n\text{ は整数})}$

6. (1) $f(-1 + 2i) = (-1) \cdot 2 + i((-1)^2 - 2^2) = \underline{-2 - i3}$

(2) $f(2 + i) = (2 + i) + (2 + i)^2 + (2 + i)(2 - i) = \underline{10 + i5}$

(3) $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ とおくと

$u_x = 2x, u_y = -2y, v_x = 2y, v_y = 2x$ となり，

コーシー・リーマンの関係式が成り立つので，$f(z)$ は <u>微分可能</u>.

導関数は，$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2yi = \underline{2z}$.

(4) $\displaystyle\int_C z^3 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (re^{i\theta})^3 rie^{i\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ir^4 e^{i4\theta} d\theta = \left[\frac{1}{4} r^4 e^{i4\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{1}{4} r^4 (e^{i2\pi} - 1) = \dfrac{1}{4} r^4 (1 - 1) = \underline{0}$

7. (1) $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 1$ より

$v(x, y) = \displaystyle\int (3x^2 - 3y^2 + 1) dy = 3x^2 y - y^3 + y + c(x) \quad (c(x)\text{ は } x \text{ の関数})$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy + c'(x)$

一方，$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 6xy$ より $c'(x) = 0 \therefore c(x) = C$

したがって，$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + y + C$

ここで，$v(0, 0) = 0$ より $C = 0$ ゆえに，$\underline{v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + y}$

(2) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \underline{(x^3 - 3xy^2 + x) + i(3x^2 y - y^3 + y)}$

(3) 積分路 C で囲まれた領域内にある $\dfrac{f(z)}{z^2}$ の特異点は $z = 0$ のみで，

これは 2 位の極である.

$\mathrm{Res}[f(z), 0] = \displaystyle\lim_{z \to 0} \left(z^2 \frac{f(z)}{z^2}\right)' = \lim_{z \to 0} f'(z)$

$= \displaystyle\lim_{z \to 0} (3x^2 - 3y^2 + 1) + i6xy = 1$

したがって，留数定理より $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^2} dz = i2\pi \mathrm{Res}[f(z), 0] = \underline{i2\pi}$

8. (1) $0 < |z-2| < 2$ より $0 < \left|\dfrac{z-2}{2}\right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{2+(z-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{z-2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{z-2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{z-2}{2}\right)^2 + \cdots = \underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-2)^k}$$

(2) $f(z) = \dfrac{e^{z^2-z+1}}{(z-1)^2}$ の特異点は 1 のみで，これは 2 位の極である．

$$\mathrm{Res}[f(z,1)] = \lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{e^{z^2-z+1}}{(z-1)^2}\right)' = \lim_{z\to 1}(e^{z^2-z+1})'$$

$$= \lim_{z\to 1} e^{z^2-z+1}(2z-1) = e$$

したがって，留数定理より $\displaystyle\int_C \frac{e^{z^2-z+1}}{(z-1)^2}dz = i2\pi\mathrm{Res}[f(z),1] = \underline{i2\pi e}$

B

1. (1) $1+e^z=0$ とおくと $e^z=-1=(\cos\pi+i\sin\pi)$

$z=x+yi$ とすると $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

したがって　$e^x=1$ より $x=0$，また $y=\pi+2n\pi$(n は整数)

ゆえに $z=(2n+1)\pi$

よって，積分路 C で囲まれた領域の内部にある

$f(z)=\dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ の特異点は，$z=\pi i$ のみ.

$$\mathrm{Res}[f(z),i\pi]=\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{az}}{1+e^z}=\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{az}}{e^z-(-1)}$$

$$=\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{az}}{e^z-e^{i\pi}}=\lim_{z\to\pi i}\frac{e^{az}}{\dfrac{e^z-e^{i\pi}}{z-i\pi}}=\frac{e^{ia\pi}}{(e^z)'_{z=i\pi}}=\frac{e^{ia\pi}}{e^{i\pi}}=\frac{e^{ia\pi}}{-1}=\underline{-e^{ia\pi}}$$

(2) (1) より $\displaystyle\int_C\frac{e^{az}}{1+e^z}dz=i2\pi\mathrm{Res}[f(z),i\pi]=-2\pi ie^{ia\pi}$

$$\int_C\frac{e^{az}}{1+e^z}dz=\int_{-R\to R}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz+\int_{R\to R+i2\pi}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz$$
$$+\int_{R+i2\pi\to -R+i2\pi}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz+\int_{-R+i2\pi\to -R}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz$$

ここで，$R\to\infty$ のとき

$$\int_{-R\to R}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx\to\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$$

$$\int_{R+i2\pi\to -R+i2\pi}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz=-\int_{-R}^{R}\frac{e^{a(x+i2\pi)}}{1+e^{x+i2\pi}}dx=-e^{i2\pi a}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$$
$$\to -e^{i2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$$

また，$\displaystyle\left|\int_{R\to R+i2\pi}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}idy\right|\leqq\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}i\right|dy$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{|1+e^{R+iy}|}dy\leqq\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{1-|e^Re^{iy}|}dy=\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{|1-e^R|}dy$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{e^R-1}dy=2\pi\frac{e^{aR}}{e^R-1}\to 0$$

同様に，$\displaystyle\int_{-R+i2\pi\to -R}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz=-\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}idy\to 0$

以上より，$\displaystyle\int_C\frac{e^{az}}{1+e^z}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx-e^{i2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$

$$(1-e^{i2\pi a})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=-2\pi ie^{ia\pi}$$

したがって，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=\frac{-i2\pi e^{ia\pi}}{1-e^{i2\pi a}}=\frac{i2\pi}{e^{i\pi a}-e^{-i\pi a}}=\frac{i2\pi}{i2\sin a\pi}=\underline{\frac{\pi}{\sin a\pi}}$

2. $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^6}$ の特異点は $1+z^6=(z^2+1)(z^4-z^2+1)=0$ を解くと
$z^2+1=(z+i)(z-i)=0$ より $z=\pm i$
また，$z^4-z^2+1=(z^2+1)^2-3z^2=(z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)=0$
より $z=\dfrac{-\sqrt{3}\pm i}{2},\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$
次のような積分路を考える．
$C_R:z=Re^{i\theta}(0\leqq\theta\leqq\pi),C:z=x(-R\leqq x\leqq R)$
R が十分に大きいとき，$f(z)$ の特異点のうち，
積分路 $C+C_R$ で囲まれた領域の内部にあるものは，
$i,\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$ の 3 つで，すべて 1 位の極．
$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}(z-i)\dfrac{z^4}{z^6+1}=\dfrac{1}{6i}=-\dfrac{i}{6}$
$\mathrm{Res}\Big[f(z),\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\Big]=\lim_{z\to\frac{\sqrt{3}+i}{2}}\Big(z-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\Big)\dfrac{z^4}{z^6+1}=\dfrac{1}{3(\sqrt{3}+i)}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{12}$
$\mathrm{Res}\Big[f(z),\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\Big]=\lim_{z\to\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}\Big(z-\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\Big)\dfrac{z^4}{z^6+1}$
$=\dfrac{1}{3(-\sqrt{3}+i)}=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{12}$
したがって，留数定理より
$\displaystyle\int_{C+C_R}f(z)dz=i2\pi\Big(\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}\Big[f(z),\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\Big]+\mathrm{Res}\Big[f(z),\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\Big]\Big)$
$=i2\pi\Big(-\dfrac{i}{6}+\dfrac{\sqrt{3}-i}{12}+\dfrac{-\sqrt{3}-i}{12}\Big)=\dfrac{2}{3}\pi$
ここで，$\displaystyle\int_{C+C_R}f(z)dz=\int_C f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz$
$R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{C_R}f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx\to\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$
また，$\displaystyle\Big|\int_{C_R}f(z)dz\Big|\leqq\dfrac{R^4}{R^6-1}\pi R\to 0$ より $\displaystyle\int_{C_R}f(z)dz=0(R\to\infty)$
以上より，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^4}{1+x^6}dx=\underline{\dfrac{2}{3}\pi}$

3. (1) $\left(\dfrac{3+4i}{1-2i}\right)^2+\dfrac{1}{(1+i)^2}=\left(\dfrac{(3+4i)(1+2i)}{5}\right)^2+\dfrac{1}{2i}=\left(\dfrac{-5+10i}{5}\right)^2-\dfrac{i}{2}$

$=(-1+2i)^2-\dfrac{i}{2}=-3-4i-\dfrac{i}{2}=\underline{-3-\dfrac{9}{2}i}$

(2) (a) $z=re^{i\theta}$ とおくと，主値を考えて $\log z=\log r+i\theta(-\pi<\theta\leqq\theta)$

$\log z=-i\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\log r+i\theta=-i\dfrac{\pi}{2}$

したがって，$\underline{r=1,\theta=-\dfrac{\pi}{2}}$

(b) $z=x+yi$ のとき $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)+\sin\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)\Big)$

したがって，$e^x=\sqrt{2}$ より $x=\log\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\log 2$

$y=-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$(n は整数)

ゆえに $\underline{z=\dfrac{1}{2}\log 2+i\Big(-\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\Big)(n\text{ は整数})}$

(3) 関数 $f(z)$ の特異点は $\pm i$ で，ともに 1 位の極.

$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim\limits_{z\to i}(z-i)\dfrac{z^2-1}{z^2+1}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2-1}{z+i}=\dfrac{-2}{2i}=\underline{i}$

$\mathrm{Res}[f(z),-i]=\lim\limits_{z\to -i}(z+i)\dfrac{z^2-1}{z^2+1}=\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2-1}{z-i}=\dfrac{-2}{-2i}=\underline{-i}$

(4) $z^4-5z^2=0$ を解くと $z^2(z^2-5)=0$ より $z=0,\pm\sqrt{5}$

積分路で囲まれた領域内にあるのは $z=0$ で $f(z)=\dfrac{z^3+3z+1}{z^4-5z^2}$ の 2 位の極.

$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to 0}\left(z^2\dfrac{z^3+3z+1}{z^4-5z^2}\right)'=\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z^3+3z+1}{z^2-5}\right)'$

$=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(3z^2+3)(z^2-5)-(z^3+3z+1)\cdot 2z}{z^2-5}=-\dfrac{3}{5}$

したがって，留数定理より

$\displaystyle\int_{|z|=2}\dfrac{z^3+3z+1}{z^4-5z^2}dz=i2\pi\mathrm{Res}[f(z),0]=i2\pi\Big(-\dfrac{3}{5}\Big)=\underline{-i\dfrac{6}{5}\pi}$

4. (1) $f(z)=\dfrac{1}{2z^2-5z+2}=\dfrac{1}{(z-2)(2z-1))}$

極は $z=2,\dfrac{1}{2}$ で，ともに 1 位の極.

$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}(z-2)\dfrac{1}{(z-2)(2z-1)}=\lim_{z\to 2}\dfrac{1}{2z-1}=\underline{\dfrac{1}{3}}$

$\mathrm{Res}\left[f(z),\dfrac{1}{2}\right]=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{(z-2)(2z-1)}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2(z-2)}=\underline{-\dfrac{1}{3}}$

(2) 積分路 C の内部にある特異点は $z=\dfrac{1}{2}$ のみ.

したがって，留数定理より $\displaystyle\int_C f(z)dz=i2\pi\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{1}{2}\right]=i2\pi\left(-\frac{1}{3}\right)=\underline{-i\frac{2}{3}\pi}$

(3) $z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, z^{-1}=e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ より

$z+z^{-1}=2\cos\theta\therefore\cos\theta=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}z^{-1}$

したがって，$\underline{\alpha=\dfrac{1}{2},\beta=\dfrac{1}{2}}$

(4) $\displaystyle I=\int_C f(z)dz=\frac{0}{2\pi}f(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2(e^{i\theta})^2-5e^{i\theta}+2}ie^{i\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\frac{i}{2e^{i\theta}-5+2e^{-i\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{i}{2z-5+2z^{-1}}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\frac{i}{4\cos\theta-5}d\theta$

したがって，$\underline{a=i,b=4,c=-5}$