１章　ベクトル解析

４節　積分公式

A

55 $$\int_V x\,dV = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\frac{3}{2}(1-x)}\int_{z=3}^{z=6-3x-2y} x\,dz\,dy\,dx$$

$\left(\begin{array}{l} z=6-3x-2y \text{ と } z=3 \text{ との交線は } 3=6-3x-2y \text{ より } y=\dfrac{3}{2}(1-x) \text{ である。} \\ \text{また，} V \text{ の } xy \text{ 平面への正射影は } 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq \dfrac{3}{2}(1-x) \text{ である。}\end{array}\right.$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x\int_{y=0}^{y=\frac{3}{2}(1-x)}(6-3x-2y-3)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x\left[(3-3x)y-y^2\right]_{y=0}^{y=\frac{3}{2}(1-x)}dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x\left\{\frac{9}{2}(1-x)^2-\frac{9}{4}(1-x)^2\right\}dx = \frac{9}{4}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{3}{16}$$

一方，体積は

$$\int_V 1\,dV = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\frac{3}{2}(1-x)}\int_{z=3}^{z=6-3x-2y} 1\,dz\,dy\,dx$$

$$= \frac{9}{4}\int_0^1 1\cdot(1-x)^2\,dx = \frac{9}{4}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

56 $x+y+z=1$ と $z=0$ との交線は $x+y=1$ なので，

V の xy 平面への正射影は $0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1-x$ である。

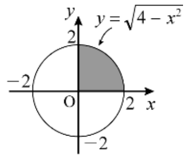
よって

$$\int_V y\,dV = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x}\int_{z=0}^{z=1-x-y} y\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x} y(1-x-y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[(1-x)\cdot\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1-x}dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\left\{\frac{1}{2}(1-x)^3-\frac{1}{3}(1-x)^3\right\}dx = \frac{1}{6}\cdot(-1)\,\frac{1}{4}\left[(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

⑴ $\displaystyle\int_V dV = \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx$



$$= \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-y^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=2}\left[(4-x^2)y-\frac{1}{3}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2}\frac{2}{3}\sqrt{4-x^2}^{\,3}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}(2\cos t)^4\,dt = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt$$

$$= \frac{32}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$ （詳解 47 ⑷ ㋐ ）

$\left(\begin{array}{l} x = 2\sin t \\ \begin{array}{c|c} x & 0 \to 2 \\ \hline t & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array} \\ dx = 2\cos t\,dt \\ \sqrt{4-x^2} = 2\cos t \end{array}\right.$

⑵ （前問⑴と同様にして）

$$\int_V x\,dV = \int_{x=0}^{x=2} x\int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2}\frac{2}{3}x\sqrt{4-x^2}^{\,3}\,dx = \int_4^0\frac{2}{3}\sqrt{t}^{\,3}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{3}\int_0^4 t^{\frac{3}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{64}{15}$$

$\left(\begin{array}{l} 4-x^2 = t \\ \begin{array}{c|c} x & 0 \to 2 \\ \hline t & 4 \to 0 \end{array} \\ -2x\,dx = dt \end{array}\right.$

58

⑴　答えの x 成分は,

$$\int_V y\,z\,dV = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} y \int_{z=0}^{z=1} z\ dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} y\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1} dy\ dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{4}$$

同様にして答えの y 成分，z 成分は各々,

$$\int_{x=0}^{x=1} x \int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1} z\,dz\ dy\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\int_{x=0}^{x=1} x \int_{y=0}^{y=1} y \int_{z=0}^{z=1} dz\ dy\,dx = \frac{1}{4}$$

となり　$\displaystyle\int_V \boldsymbol{f}\ dV = \left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$

⑵　答えの x 成分は,

$$\int_V x^2\ dV = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x^2 \int_{y=0}^{y=1}\Big[\ z\ \Big]_{z=0}^{z=1} dy\ dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \Big[\ y\ \Big]_{y=0}^{y=1} dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

同様にして答えの y 成分，z 成分は各々,

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} 2y \int_{z=0}^{z=1} dz\ dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\Big[\ y^2\ \Big]_0^1 dx = 1,$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1} 3z\,dz\ dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} 3\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 dy\,dx = \frac{3}{2}$$

答　$\left(\dfrac{1}{3},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

59　x 成分 $= \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} x^2 \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \int_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

（積分範囲のとり方は紹介 57 と同様）

$$= \int_{x=0}^{x=1} x^2 \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \left[(1-x^2)y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \left\{ (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right\} dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t\,dt$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \sin t \\ \begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array} \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right.$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t - \cos^6 t)\,dt = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \right)$$

$= \dfrac{\pi}{48}$　　（詳解 47 ⑷ ㋐より）

y 成分 $= \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} 2y \int_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} 2y(1-x^2-y^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} \left[y^2(1-x^2) - 2\cdot\frac{1}{4}y^4 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ (1-x^2) - \frac{1}{2}(1-x^2)^2 \right\} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,dx = \frac{4}{15}$$

z 成分 $= \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \int_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} 3z\,dz\,dy\,dx$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} 3\cdot\left[\frac{1}{2}z^2 \right]_0^{z=1-x^2y^2} dy\,dx = \frac{3}{2}\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \{(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)y^2 + y^4\}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{x=0}^{x=1} \left[(1-x^2)^2 y - \frac{2}{3}(1-x^2)y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 \left(\frac{15}{15} - \frac{10}{15} + \frac{3}{15} \right)\sqrt{1-x^2}^{\,5}\,dx = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \cos t\,dt$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \sin t \\ \begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array} \\ dx = \cos t\,dt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \end{array} \right.$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{8}\pi$$

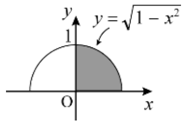
（ 詳解 47 ⑷ ㋐ ）

答　$\left(\dfrac{\pi}{48},\ \dfrac{4}{15},\ \dfrac{\pi}{8} \right)$

60

⑴　ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}\,dV$$



$$=\int_V(2x+x+y)\,dV=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{z=1}(3x+y)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left[\ 3xy+\frac{1}{2}y^2\ \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{x=0}^{x=1}\left\{3x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}(1-x^2)\right\}dx$$

$$=\left[\ 3\cdot\frac{-2}{2\cdot 3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1$$ （1項は$1-x^2=t$とする置換積分による）

$$=\left(0+\frac{1}{3}\right)-(-1+0)=\frac{4}{3}$$

⑵　ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}\,dV$$

$$=\int_V(2x+x+y)\,dV=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(3x+y)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left[\ 3xy+\frac{1}{2}y^2\ \right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_{x=0}^{x=1}\left(3x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\ \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\ \right]_0^1=2$$

61　ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$ （$\boldsymbol{n}$ は外向き）

$$=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}\,dV=\int_V(4+3+2)\,dV=9\int_V dV$$

（但し V は中心が原点で半径が 1 の球体，その体積は$\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3$）

$$=9\times\frac{4}{3}\pi=12\pi$$

⑴　S の境界を C とすると C は $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(2\sin t,\ 0,\ 2\cos t)$ （ $0 \leqq t \leqq 2\pi$ ）と表せる。

曲線 C 上においてベクトル場 $\boldsymbol{f}$ は

$\boldsymbol{f}=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)$ となり $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(2\cos t,\ 0,\ -2\sin t)$ なので

ストークスの定理より

$$\int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t=0}^{t=2\pi}\boldsymbol{f}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)\cdot(2\cos t,\ 0,\ -2\sin t)\,dt=\int_0^{2\pi}4\cos^2 t\ dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t\ dt=16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\qquad\text{（詳解 47 ⑷ ㋐ より）}$$

$$=4\pi$$

⑵　S の境界を C とすると曲線 C は $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(\sin t,\ 0,\ \cos t)$ （ $0 \leqq t \leqq 2\pi$ ）と表せる。

曲線 C 上においてベクトル場 $\boldsymbol{f}$ は

$\boldsymbol{f}=(\cos^2 t,\ \sin^3 t,\ 0)$ となり $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(\cos t,\ 0,\ -\sin t)$ なので

ストークスの定理より

$$\int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t=0}^{t=2\pi}\boldsymbol{f}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t,\ \sin^3 t,\ 0)\cdot(\cos t,\ 0,\ -\sin t)\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^3 t\ dt$$

（$u=\cos^3 t$ は $t=\pi$ について対称）

$$=2\int_0^{\pi}\cos^3 t\ dt=2\cdot 0\qquad\text{（$u=\cos^3 t$ は $(\tfrac{\pi}{2},\ 0)$ について対称）}$$

$$=0$$

63　S の境界を C とすると曲線 C は xy 平面上の中心が原点 O，半径が 2 の円であり
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)$ と表せる。曲線 C 上においてベクトル場 $\boldsymbol{f}$ は

$\boldsymbol{f}=(2\sin t,\ 4\cos t,\ 0)$ となり $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$ なので

ストークスの定理より

$$\int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t=0}^{t=2\pi}\boldsymbol{f}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\sin t,\ 4\cos t,\ 0)\cdot(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\,dt=\int_0^{2\pi}(-4\sin^2 t+8\cos^2 t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\{4(\cos^2 t-\sin^2 t)+4\cos^2 t\}\,dt=\int_0^{2\pi}\left\{4\cos 2t+4\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right\}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(6\cos 2t+2)\,dt=\Big[\,2t\,\Big]_0^{2\pi}=4\pi$$

64

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C (x^2+y^2,\ xy,\ 0)\cdot(dx,\ dy,\ dz)$$

$$=\iint_D \{(xy)_x-(x^2+y^2)_y\}\,dx\,dy \qquad \text{（グリーンの定理による）}$$

$$=\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}(y-2y)\,dy\,dx=-\int_{x=-1}^{x=1}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}$$

65

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C (xy,\ y+2x,\ 0)\cdot(dx,\ dy,\ dz)$$

$$=\iint_D (y+2x)_x-(xy)_y\,dx\,dy \qquad \text{（グリーンの定理による）}$$

$$=\iint_D (2-x)\,dx\,dy=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2-x)\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=1}\Big[(2-x)y\Big]_{y=0}^{y=1}dx$$

$$=\int_0^1(2-x)\,dx=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

66

(1) $$\int_S (2x,\ 3y,\ 4z)\cdot \boldsymbol{n}\,dS$$ （$\boldsymbol{n}$ は S 上各点での単位法線ベクトル）

$$= \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{f}\ dV$$ （ガウスの発散定理，ただし V は中心が原点で半径が 2 の球体）

$$= \int_V (2+3+4)\,dV = 9\int_V dV = 9\times\frac{4}{3}\pi\times 2^3 = 96\pi$$

(2) 与式 $$= \int_S (2x,\ 3y,\ 4z)\cdot(x,\ y,\ z)\,dS$$

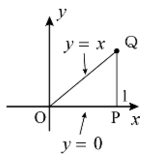
$$\left(\begin{array}{l} S \text{ 上各点}(x,\ y,\ z)\text{ での単位法線ベクトルは } \boldsymbol{n} = \dfrac{(x,\ y,\ z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \text{ であり} \\ \text{今}\quad x^2+y^2+z^2 = 4 \end{array}\right)$$

$$= \int_S (2x,\ 3y,\ 4z)\cdot 2\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \mathrm{div}(2x,\ 3y,\ 4z)\cdot 2\,dV$$ （ガウスの発散定理）

$$= \int_V (4+6+8)\,dV = 18\times\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = 192\pi$$ （V は中心が原点で半径が 2 の球体）

67 $$\int_{C_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} (yx^2,\ xy^2,\ 0)\cdot(dx,\ dy,\ dz)$$

$$= \iint_D (xy^2)_x - (yx^2)_y\ dx\,dy$$ （グリーンの定理による）

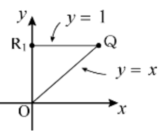


$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} (y^2 - x^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{3}y^3 - x^2y\right]_{y=0}^{y=x}$$

$$= \int_0^1 \frac{-2}{3}x^3\,dx = -\frac{1}{6}$$

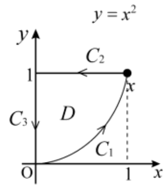
一方，C_1 に沿っての線積分と同様，グリーンの定理より

$$\int_{C2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x}^{y=1} (y^2 - x^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{3}y^3 - x^2y\right]_{y=x}^{y=1} dx$$



$$= \int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{3} - x^2\right) - \left(\frac{1}{3}x^3 - x^3\right)\right\}dx = \left[\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

68　グリーンの定理（p.21 $\boxed{5}$ ）より



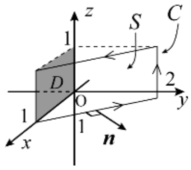
$$与式 = \iint_D (xy^2)_x - (x^2 y)_y \, dx\,dy \qquad (D \text{ は右図の領域})$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=1} (y^2 - x^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{3}y^3 - x^2 y\right]_{y=x^2}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{3} - x^2\right) - \left(\frac{1}{3}x^6 - x^4\right)\right\} dx = \left[\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{21} + \frac{1}{5} = \frac{-5+21}{105} = \frac{16}{105}$$

69　例題 5 と同様　rot $\boldsymbol{f} = (-2z,\ -2x,\ -2y)$



平面 S は $y = \varphi(z,\ x) = -2x + 2$　で　$\varphi_x = -2,\ \varphi_z = 0$　である。

よって線積分はストークスの定理 p.20 $\boxed{4}$ より

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}\,dS = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot(-\varphi_x,\ 1,\ -\varphi_z)\,dx\,dz \qquad (\text{p.16 } \boxed{13},\ D \text{ は上図の正方形})$$

$$= -2\iint_D (z,\ x,\ y)\cdot(2,\ 1,\ 0)\,dx\,dz$$

$$= -2\int_{z=0}^{z=1}\int_{x=0}^{x=1}(2z + x)\,dx\,dz = -2\int_{z=0}^{z=1}\left[2zx + \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} dz$$

$$= -2\left[z^2 + \frac{1}{2}z\right]_0^1 = -3$$

⑴ $\boldsymbol{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ u)$ より

$\boldsymbol{r}_u = (\cos v,\ \sin v,\ 1)$, $\boldsymbol{r}_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$ であり

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ u\cos^2 v + u\sin^2 v)$$
$$= (-u\cos v,\ -u\sin v,\ u)$$

一方, $\boldsymbol{f} = (4yz,\ 3y^2,\ 2xy)$ より

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f} = (2x,\ 4y-2y,\ -4z) = (2x,\ 2y,\ -4z)$$
$$= (2u\cos v,\ 2u\sin v,\ -4u)$$

したがって, 線積分

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}\ dS = \int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\ dS \qquad (\text{p.20}\ \boxed{4}\ \text{ストークスの定理})$$
$$= \iint_D \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv \qquad (\text{p.16}\ \boxed{13})$$
$$= \int_{v=0}^{v=2\pi}\int_{u=0}^{u=1}(2u\cos v,\ 2u\sin v,\ -4u)\cdot(-u\cos v,\ -u\sin v,\ u)\,du\,dv$$
$$= \int_{v=0}^{v=2\pi}\int_{u=0}^{u=1}(-2u^2\cos^2 v - 2u^2\sin^2 v - 4u^2)\,dudv$$
$$= \int_{v=0}^{v=2\pi}\int_{u=0}^{u=1}(-6u^2)\,du\,dv = \int_{v=0}^{v=2\pi} -6\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{u=0}^{u=1} du = -4\pi$$

⑵ ⑴と同様にして

$\boldsymbol{r}_u = (\cos v,\ \sin v,\ 2u)$, $\boldsymbol{r}_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$ であり

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (-2u^2\cos v,\ -2u^2\sin v,\ u\cos^2 v + u\sin^2 v)$$
$$= (-2u^2\cos v,\ -2u^2\sin v,\ u)$$

$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f} = (2u\cos v,\ 2u\sin v,\ -4u^2)$

⑴と同様 p.20 $\boxed{4}$ ストークスの定理, p.16 $\boxed{13}$ より求める線積分は

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}\ dS = \iint_D \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv$$
$$= \int_{v=0}^{v=2\pi}\int_{u=0}^{u=1}(-4u^3\cos^2 v - 4u^3\sin^2 v - 4u^3)\,dudv$$
$$= \int_{v=0}^{v=2\pi}\int_{u=0}^{u=1}(-8u^3)\,du\,dv\int_{v=0}^{v=2\pi}\left(-8\left[\frac{1}{4}u^4\right]_{u=0}^{u=1}\right)du = -4\pi$$

71 $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{r}\,dV$ （$\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$） （p.20 $\boxed{3}$ ガウスの発散定理より）

$$= \frac{1}{3}\int_V (1+1+1)\,dV = \int_V dV$$

つまり立体 V の体積である。