１章　ベクトル解析

１節　ベクトルの演算

Ａ

１

⑴　$\boldsymbol{b}=(-4,\ 3,\ 0)$ とおくと $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-12+12+0=0$ より $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ となる。

$|\,\boldsymbol{b}\,|=\sqrt{16+9+0}=5$ なので $\boldsymbol{e}=\dfrac{1}{5}(-4,\ 3,\ 0)$

⑵　$\boldsymbol{b}=(12,\ 0,\ 5)$ とおくと $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-60+0+60=0$ より $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ となる。

$|\,\boldsymbol{b}\,|=\sqrt{144+0+25}=13$ なので $\boldsymbol{e}=\dfrac{1}{13}(12,\ 0,\ 5)$

２

⑴　$\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$　　　　または P.4 $\boxed{4}$ 5 より $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

⑵　$\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(3-4)\boldsymbol{e}_1-(0+2)\boldsymbol{e}_2+(0+1)\boldsymbol{e}_3=(-1,\ -2,\ 1)$

⑶　$\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=(4-3)\boldsymbol{e}_1-(-2-0)\boldsymbol{e}_2+(-1-0)\boldsymbol{e}_3=(1,\ 2,\ -1)$

または P.4 $\boxed{4}$ 1 より

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(-1,\ -2,\ 1)=(1,\ 2,\ -1)$

⑷　$\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(2+3)\boldsymbol{e}_1-(-1-3)\boldsymbol{e}_2+(1-2)\boldsymbol{e}_3=(5,\ 4,\ -1)$

⑸　$\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-2-1)\boldsymbol{e}_1-(2-0)\boldsymbol{e}_2+(1-0)\boldsymbol{e}_3=(-3,\ -2,\ 1)$

３

⑴　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 7 & 0\end{vmatrix}=(0-0)\boldsymbol{e}_1-(0-0)\boldsymbol{e}_2+(7-4)\boldsymbol{e}_3=(0,\ 0,\ 3)$

よって外積の定義より　$S=|(0,\ 0,\ 3)|=3$

一方，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 両方に垂直なベクトルなので

$S=3,\ \boldsymbol{e}=\pm\dfrac{1}{3}(0,\ 0,\ 3)=(0,\ 0,\ \pm1)$

⑵ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(2+3)\boldsymbol{e}_1-(4-3)\boldsymbol{e}_2+(-2-1)\boldsymbol{e}_3=(5,\ -1,\ -3)$

よって外積の定義より　$S=|(5,\ -1,\ -3)|=\sqrt{25+1+9}=\sqrt{35}$

一方，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 両方に垂直なベクトルなので

$S=\sqrt{35}$，$\boldsymbol{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{35}}(5,\ -1,\ -3)$

4

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-0,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 3)=(-1,\ 1,\ 1)=\boldsymbol{a}$ とおき

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-0,\ -1,\ -2)+(2,\ -2,\ 1)=(2,\ -3,\ -1)=\boldsymbol{b}$ とおくと

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=(-1+3)\boldsymbol{e}_1-(1-2)\boldsymbol{e}_2+(3-2)\boldsymbol{e}_3=(2,\ 1,\ 1)$

外積の定義より $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす平行四辺形の面積なので

$S=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

一方，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルなので

$S=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\boldsymbol{e}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{6}}(2,\ 1,\ 1)$

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ -3,\ -2)=\boldsymbol{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,\ -2,\ 1)=\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & -3 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=(-3-4)\boldsymbol{e}_1-(1+6)\boldsymbol{e}_2+(-2+9)\boldsymbol{e}_3=(-7,\ -7,\ 7)$ より

$S=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-7)^2+(-7)^2+7^2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

一方，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルなので　$\boldsymbol{e}=\pm\dfrac{2}{7\sqrt{3}}(-7,\ -7,\ 7)$

$S=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$，$\boldsymbol{e}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}(-1,\ -1,\ 1)$

5

⑴ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & -5 & 3 \\ 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-40+25=-15<0$　よって　$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ は左手系をなす。

一方，$V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=15$　　左手系，$V=15$

⑵ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-15-20=-35<0$　よって　$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ は左手系をなす。

一方，$V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=35$　　左手系，$V=35$

6

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-(1,\ 2,\ -3)+(3,\ -4,\ 5)=(2,\ -6,\ 8)=\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-6,\ 4,\ 10)=\boldsymbol{b}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(6,\ 6,\ 12)=\boldsymbol{c}$，とおくと

V はこれら 3 つのベクトルのなす平行六面体の体積の $\dfrac{1}{6}$ である。

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -6 & 4 & 10 \\ 6 & 6 & 12 \end{vmatrix}=2\times2\times6\times\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=24\times\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & 11 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=24\times(-54)$$

よって　$V=\dfrac{1}{6}|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=216$

⑵ ⑴と同様にして

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ -4,\ 2)=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ -1,\ -3)=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ -5,\ 0)=\boldsymbol{c}$，とおくと

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}=-2$　で，$V=\dfrac{1}{6}|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=\dfrac{1}{6}\times2=\dfrac{1}{3}$

7　⑴, ⑵, ⑶ は P.4 $\boxed{6}$ 公式 1 を使って,

⑴　与式 $= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

$= (2+2+0)\boldsymbol{b} - (4-1+0)\boldsymbol{c}$

$= (8,\ 4,\ 8) - (3,\ -6,\ -9)$

$= (5,\ 10,\ 17)$

⑵　与式 $= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

$= (4-1+0)\boldsymbol{c} - (2-2-6)\boldsymbol{a}$

$= (3,\ -6,\ -9) - (-12,\ 6,\ 0)$

$= (15,\ -12,\ -9)$

⑶　与式 $= (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$

$= -6(2,\ -1,\ 2) - 4(2,\ 1,\ 2)$

$= (-20,\ 2,\ -8)$

⑷, ⑸, ⑹ は P.4 $\boxed{6}$ 公式 2 を使って,

⑷　与式 $= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

$= 4(2,\ 1,\ 2) - (-6)(2,\ -1,\ 0)$

$= (20,\ -2,\ 8)$

（または⑶と P.4 $\boxed{4}$ 公式 1 を使ってこれを得る。）

⑸　与式 $= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$

$= 3(1,\ -2,\ -3) - 4(2,\ 1,\ 2)$

$= (-5,\ -10,\ -17)$

⑹　与式 $= (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

$= -6(2,\ -1,\ 0) - 3(1,\ -2,\ -3)$

$= (-15,\ 12,\ 9)$

⑺　与式 $= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

B

8

⑴　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 6 - k + l = 0$　㋐

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ の第 1 成分同士に注目して

$\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{a}$　より　第 2 成分は　$-2k = 2$　㋑

㋐　㋑　より　$k = -1,\ l = -7$

⑵　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -8 + 2k - 2 = 0$　㋒

$-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$　より　$-\dfrac{3}{2}\times(-2) = l$　㋓

㋒　㋓　より　$k = 5,\ l = 3$

⑶　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -12 - kl - 18 = 0$　㋔

$\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$　より　$-k\times\dfrac{2}{3} = 4$　㋕

㋔　㋕　より　$k = -6,\ l = 5$

9

⑴　P.4 $\boxed{4}$ 公式 2 より

与式左辺 $= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$

$= \mathbf{0} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \mathbf{0} = -2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

$$= -2\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & k & -1 \\ 3 & l & 2 \end{vmatrix} = -2((2k+l),\ -(2+3),\ (l-3k))$$

$=(2,\ 10,\ 6)$ とおくと,

$-2k - l = 1,\ -l + 3k = 3$　より　$k = \dfrac{2}{5}$,　$l = \dfrac{-9}{5}$

⑵　与式左辺 $= 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$

$= \mathbf{0} + 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \mathbf{0} = 5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

$= 5(2k+l,\ -5,\ l-3k)$

$=(10+5l,\ kl,\ -28k)$ とおくと,

$2k + l = 2 + l,\ -25 = kl$　より　$k = 1,\ l = -25$

10

⑴　直線 BC の方向ベクトルは $\pm\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \pm(-1,\ -3,\ -5)$ なのでその単位方向ベクトルは

$$\boldsymbol{p} = \pm\frac{(-1,\ -3,\ -5)}{\sqrt{1+9+25}} = \pm\frac{(1,\ 3,\ 5)}{\sqrt{35}}$$

よって BC と OB のなす角を θ として

$$d = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\sin\theta| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\boldsymbol{p}||\sin\theta| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\boldsymbol{p}|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{35}}|(5-6,\ -(10-2),\ 6-1)|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{35}}|(-1,\ -8,\ 5)| = \frac{1}{\sqrt{35}}\sqrt{1+64+25}$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

⑵　直線 CA の方向ベクトルは $\pm\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \pm(1,\ 1,\ 3)$ でその単位方向ベクトルは　$\boldsymbol{p} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{11}}(1,\ 1,\ 3)$

⑴と同様に考えて

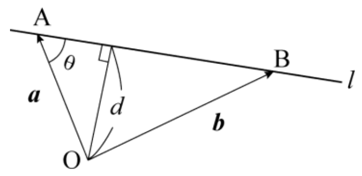
$$d = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}\times\boldsymbol{p}| = \frac{1}{\sqrt{11}}|(-6+3,\ -(3+3),\ 1+2)|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{11}}|(-3,\ -6,\ 3)| = \frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{9+36+9}$$

$$= \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{66}}{11}$$

11

⑴　l の方向ベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　なので　　$\boldsymbol{p}=\dfrac{-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}$



⑵　$d=|\boldsymbol{a}||\sin\theta|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{p}||\sin\theta|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}|$

$$=\left|\boldsymbol{a}\times\frac{-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}\right|=\left|\frac{-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}\right|=\left|\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}\right|$$

12

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(4,\ -1,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(3,\ -2,\ 1)$　より

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\times\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-1+4,\ -(4-6),\ -8+3)=(3,\ 2,\ -5)$ は平面 H の法線ベクトル。

$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\times\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{9+4+25}=\sqrt{38}$　より　$\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{38}}(3,\ 2,\ -5)$　となり

$h=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\boldsymbol{n}|=\dfrac{1}{\sqrt{38}}|6+2-15|=\dfrac{7}{\sqrt{38}}$

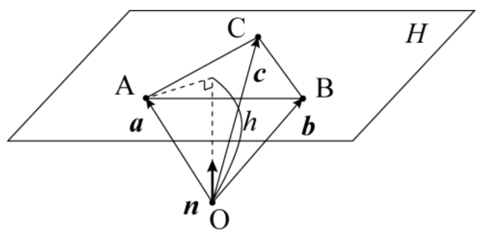
⑵　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1,\ 1,\ 3)$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(1,\ 3,\ 4)$　より

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\times\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(4-9,\ -(4-3),\ 3-1)=(-5,\ -1,\ 2)$

$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\times\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{25+1+4}=\sqrt{30}$　より　$\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{30}}(-5,\ -1,\ 2)$　となり

$h=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\boldsymbol{n}|=\dfrac{1}{\sqrt{30}}|-10+1-0|=\dfrac{9}{\sqrt{30}}$

13



⑴　$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ は $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ にも $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ にも
垂直なベクトルなので平面 H の法線ベクトルである。
p.4 $\boxed{4}$ 公式 2 より

$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$

$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$　　（ p.4 $\boxed{4}$ 公式 1，5 ）

なので単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は　　$\boldsymbol{n}=\pm\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}$

⑵　原点 O と平面 H との距離 h は $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向への正射影の長さなので

$h=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|$

$$=\left|\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}\right|$$

$$=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|}$$

14　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$　㋐　が成立するとき　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=0$

なぜなら　p.4 $\boxed{3}$ 𝟙　より　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})\perp\boldsymbol{a}$　である。

逆に　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　とする。　㋑

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$　となる $\boldsymbol{x}$ を見つけたいのだが $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ にも $\boldsymbol{x}$ にも垂直となってほしいので

$\boldsymbol{x}$ の所に入る候補として　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　を考えてみると　p.4 $\boxed{6}$ 公式 𝟙より

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2\,\boldsymbol{b}$　（㋑と p.4 $\boxed{1}$ 𝟙 より）

よって　$\boldsymbol{a}\times\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{-|\boldsymbol{a}|^2}=\boldsymbol{b}$　を得る。

したがって　$\boldsymbol{x}=\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{-|\boldsymbol{a}|^2}$　は㋐の 1 つの解。

ここで　$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$　を㋐の 2 つの解とすると　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}$　だが

辺々を引くと　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{0}$　　（p.4 $\boxed{4}$ 公式 𝟚 より）

よって　p.4 $\boxed{3}$ 公式 𝟙 または $\boxed{4}$ 公式 𝟝 より　$\boldsymbol{a}\,/\!/\,(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)$

したがって $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=c\boldsymbol{a}$　と表せる。（c は任意定数）

つまり　$\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=c\boldsymbol{a}$　であるから㋐の一般解は　　$\boldsymbol{x}=-\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}+c\boldsymbol{a}$

15　一つの解は $\boldsymbol{x}$ の所に $c\boldsymbol{a}$（c は定数）を入れて　$\boldsymbol{a}\cdot(c\boldsymbol{a})=c|\boldsymbol{a}|^2=k$　となるので

$c=\dfrac{k}{|\boldsymbol{a}|^2}$　となり　$\boldsymbol{x}=\dfrac{k}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$　と求められる。

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=k$　の 2 つの解を　$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$　とすると　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1=k,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_2=k$　だが

辺々を引くと　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)=0$

よって　　$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)$

したがって　$\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$　とかける　（$\boldsymbol{c}$ は任意定ベクトル）

$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

つまり与式の一般解は　$\boldsymbol{x}=\dfrac{k}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$