167

(1) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = 1 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2}$

$n \neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

ここで, $\quad 1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ 2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$ に注意すると

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}}$$

(2) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\left[-\dfrac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\pi^2}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n\pi}\cdot\frac{\cos n\pi - 1}{n} = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\left(\frac{\cos nx}{n}\right)'dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}\,dx = \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \boldsymbol{f(x)} &\boldsymbol{\sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)} \\ &\boldsymbol{= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx} \end{aligned}$$

(3) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \dfrac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{\pi}$

$n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n-1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2-1} = -\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$n > 1$ のとき

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\Big]_0^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}\cos nx$$

ここで, $\quad (-1)^n + 1 = \begin{cases} 2 & (n\text{ が偶数}) \\ 0 & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$ に注意すると

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n)^2-1}}$$

(4) $a_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}|x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = \Big[x^2\Big]_0^1 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2}$

$n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1}|x|\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)'\,dx \\
&= 2\left(\Big[x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1 - \int_0^1\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\,dx\right) = -2\int_0^1\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\,dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi x\Big]_0^1 \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

$|x|$ が偶関数であることから $b_n = 0$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos nx = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}}$$

(5) $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_{-1}^{1} = e - e^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_0}{2} = \frac{e - e^{-1}}{2}$

$$a_n = \int_{-1}^{1} e^x \cos n\pi x\,dx = \Big[\frac{1}{1+n^2\pi^2} e^x (\cos n\pi x + n\pi \sin n\pi x)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{1+n^2\pi^2}\left(e(-1)^n - e^{-1}(-1)^n\right) = \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(e - e^{-1})$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} e^x \sin n\pi x\,dx = \Big[\frac{1}{1+n^2\pi^2} e^x (\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{1+n^2\pi^2}\left(-en\pi(-1)^n + e^{-1}n\pi(-1)^n\right) = \frac{-(-1)^n n\pi}{1+n^2\pi^2}(e - e^{-1})$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{e - e^{-1}}{2} + (e - e^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\Big(\cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x\Big)}$$

168

(1) $b_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x\,dx = 2\Big[-x\frac{\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big]_0^1 = -2\frac{(-1)^n}{n\pi} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x}$$

(2) $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Big]_0^{\pi}$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n(1+(-1)^n)}{n^2-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+(-1)^n)}{n^2-1} \sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n)^2-1} \sin 2nx}$$

169

(1) $a_0 = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = \Big[-(1-x)^2\Big]_0^1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos n\pi x\,dx = 2\Big[(1-x)\frac{\sin n\pi x}{n\pi} - \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Big]_0^1 = 2\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}}$$

(2) $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \dfrac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \dfrac{4}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{2}{\pi}$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}\cos nx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n)^2-1}}
$$

170

(1) $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\left(\dfrac{e^{-inx}}{-in}\right)'\,dx$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\Big[x^2\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{1}{\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{1}{\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)'\,dx \\
&= \frac{1}{\pi in}\left(\Big[x\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx\right) = \frac{1}{\pi in}\Big[x\frac{e^{-inx}}{-in}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{in\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{(-1)^n}{-in} \\
&= \frac{2}{n^2}(-1)^n \quad （e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n \text{ に注意}）
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{n^2}(-1)^n e^{inx}}
$$

(2) $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\Big[\dfrac{1}{1-in}e^{(1-in)x}\Big]_{-\pi}^{\pi}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}(e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}(e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})e^{inx}}
$$

171 【例題 9】から $x^2 = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos n\pi x$ であるから

この式において $x=0$ とすれば

$$
0 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \Longrightarrow -\frac{1}{3} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Longrightarrow -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}
$$

$$
\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}
$$

172 $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}$

$\therefore \quad f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{2}$ で連続であるから，上記のフーリエ級数展開で $x=\frac{\pi}{2}$ とすれば，$\sim$ は $=$ とできるので

$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}}{2n-1}$ となり，$\sin\frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n+1}$ に注意すれば

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ を得る.

173

(1) 初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0<x<1, \quad t>0) \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) & (t>0) \\ u(x,0) = f(x) & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

の解 $u(x,t)$ のフーリエ級数展開は

$$u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\, dx\right)e^{-(n\pi)^2 t}\sin n\pi x$$

で与えられた.

$f(x) = \sin\pi x$ として $\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\, dx = \int_0^1 \sin\pi x \sin n\pi x\, dx = \delta_{n1}$ であるから

$$\boldsymbol{u(x,t) \sim 2e^{-\pi^2 t}\sin\pi x}$$

(2) (1) と同様に，$f(x) = x(1-x)$ として

$$\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\, dx = \int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\, dx = \int_0^1 x(1-x)\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)' dx$$

$$= \Big[-x(1-x)\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1 - \int_0^1 (1-2x)\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos n\pi x\, dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 (1-2x)(\sin n\pi x)'\, dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left\{\Big[(1-2x)\sin n\pi x\Big]_0^1 - \int_0^1 (-2)\sin n\pi x\, dx\right\} = \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x\, dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\Big[\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1 = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}$$ であるから

$$\boldsymbol{u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}e^{-(n\pi)^2 t}\sin n\pi x}$$

(3) 初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & (0 < x < 1, \quad t > 0) \\ u(0,\, t) = 0 = u(1,\, t) & (t > 0) \\ u(x,\, 0) = f(x) & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

において $u(x,\, t) = e^t v(x,\, t)$ とし，$u$ に対する初期境界値問題を

$v$ に対する初期境界値問題に変換すれば

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} & (0 < x < 1, \quad t > 0) \\ v(0,\, t) = 0 = v(1,\, t) & (t > 0) \\ v(x,\, 0) = f(x) & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

となるので，$v$ のフーリエ級数展開は

$$v(x,\, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \right) e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$$

であるので，この両辺に $e^t$ をかければ

$$u(x,\, t) = e^t v(x,\, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \right) e^{t-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$$

ここで，$f(x) = \sin \pi x$ とすれば (1) と同様にして $\displaystyle\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx = \delta_{n1}$ であるから

$$\boldsymbol{u(x,\, t) \sim 2e^{(1-\pi^2)t} \sin \pi x}$$

(4) 初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 < x < 1, \quad t > 0) \quad \cdots ① \\ u_x(0,\, t) = 0 = u_x(1,\, t) & (t > 0) \quad \cdots ② \\ u(x,\, 0) = f(x) & (0 \leqq x \leqq 1) \quad \cdots ③ \end{cases}$$

の解のフーリエ級数展開を構成する．

①の解を変数分離 $u(x,\, t) = X(x)T(t)$ の形で探そう．このとき，$X(x)$ と $T(t)$ は恒等的に 0 でないものを求めたい．これを①へ代入すると

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \Longrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \cdots ④$$

となり，④の左辺は $t$ だけの関数，右辺は $x$ だけの関数であるので，$x$ と $t$ を独立に変化させてもこの等式が成立するためには，両辺が $x$ と $t$ に依存しない定数でなくてはならない．これを $-\lambda$ とおこう．すなわち

$$X''(x) = -\lambda X(x) \quad \cdots ⑤, \qquad T'(t) = -\lambda T(t) \quad \cdots ⑥$$

境界条件②より

$$X'(0) = 0 = X'(1) \quad \cdots ⑦$$

である．⑤，⑦を解くと，$\lambda = (n\pi)^2$（$n = 0$，1，2，$\cdots$）であるので

⑤，⑦を満たす解は $A_n$ を定数として $X_n(x) = A_n \cos n\pi x$（$n = 0$，1，2，$\cdots$）となる．このとき $n$ 応じた⑥の解は $B_n$ を定数として $T_n = B_n e^{-(n\pi)^2 t}$ であるから，境界条件が $u(0,\, t) = 0 = u(1,\, t)$ の時と同様に $C_n$ を定数として，

$$u(x,\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(n\pi)^2 t} \cos n\pi x \quad \cdots ⑧$$

も項別微分できるとすると①の解である．初期条件②から

$$f(x) = u(x,\, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\pi x \quad \cdots ⑨$$

を満たすように $C_n$ を決めたい．今，初期値 $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で定義されていることと，⑨がフーリエ余弦展開の形をしているので，$f(x)$ を $-1 \leqq x \leqq 0$ へ偶関数 $f(-x) = f(x)$ となるように拡張しておけば，

$$C_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cos n\pi x \, dx = 2\int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx$$

によって $C_n$ を求めることができる．これを⑧へ代入して

$$\begin{aligned} u(x,\, t) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \left( 2\int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx \right) e^{-(n\pi)^2 t} \cos n\pi x \\ &= 2\int_0^1 f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2\int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx \right) e^{-(n\pi)^2 t} \cos n\pi x \end{aligned}$$

が求める解のフーリエ級数展開を与える．

以上から $f(x) = \cos \pi x$ とすると $\displaystyle\int_0^1 \cos \pi x \, dx = 0$，$\displaystyle\int_0^1 \cos \pi x \cos n\pi x \, dx = \delta_{1n}$

であるので，

$$\boldsymbol{u(x,\, t) \sim 2e^{-\pi^2 t} \cos \pi x}$$

$$(1)\quad \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-1}^{1} e^{-ikx}\,dx = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-ik}-e^{ik}}{-ik} = \boldsymbol{\frac{2\sin k}{k}}$$

$$(2)\quad \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-1}^{1} |x|e^{-ikx}\,dx = \int_{-1}^{1} |x|(\cos kx - i\sin kx)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |x|\cos kx\,dx = 2\int_{0}^{1} x\cos kx\,dx = 2\left(\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{\sin kx}{k}\,dk\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sin k}{k} + \frac{1}{k^2}\Big[\cos kx\Big]_{0}^{1}\right) = 2\left(\frac{\sin k}{k} + \frac{1}{k^2}(\cos k - 1)\right) = \boldsymbol{2\frac{k\sin k + \cos k - 1}{k^2}}$$

$$(3)\quad \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{-ikx}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x^2)(\cos kx - i\sin kx)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos kx\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1}(1-x^2)\cos kx\,dx = 2\left(\left[(1-x^2)\frac{\sin kx}{k}\right]_{0}^{1} + 2\int_{0}^{1} x\frac{\sin kx}{k}\,dx\right)$$

$$= \frac{4}{k}\int_{0}^{1} x\frac{\sin kx}{k}\,dx = -\frac{4}{k}\left(\left[x\frac{\cos kx}{k}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{\cos kx}{k}\,dx\right)$$

$$= -\frac{4}{k}\left(\frac{\cos k}{k} - \frac{1}{k^2}\Big[\sin kx\Big]_{0}^{1}\right) = -\frac{4}{k}\left(\frac{\cos k}{k} - \frac{\sin k}{k^2}\right) = \boldsymbol{\frac{4(\sin k - k\cos k)}{k^3}}$$

$$(4)\quad \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-ikx}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+ik)x}\,dx = \left[-\frac{1}{a+ik}e^{-(a+ik)x}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{a+ik}}$$

$$(5)\quad \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x(\cos kx - i\sin kx)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x(\cos kx - i\sin kx)\,dx = -2i\int_{0}^{\pi}\sin x\sin kx\,dk$$

$$= i\int_{0}^{\pi}\{\cos(k+1)x - \cos(k-1)x\}\,dk = i\left[\frac{\sin(k+1)x}{k+1} - \frac{\sin(k-1)x}{k-1}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= i\left(\frac{\sin(k+1)\pi}{k+1} - \frac{\sin(k-1)\pi}{k-1}\right) = i\left(-\frac{\sin k\pi}{k+1} + \frac{\sin k\pi}{k-1}\right)$$

$$= i\sin k\pi \cdot \frac{2}{(k+1)(k-1)} = \boldsymbol{\frac{2i\sin k\pi}{k^2-1}}$$

$$(6)\quad \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-ax}e^{-ikx}\,dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-(a+ik)x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{a+ik}xe^{-(a+ik)}\right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{a+ik}e^{-(a+ik)x}\,dx = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{a+ik}e^{-(a+ik)x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{(a+ik)^2}\left[e^{-(a+ik)}\right]_{0}^{\infty} = \boldsymbol{\frac{1}{(a+ik)^2}}$$

(1) $\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-a}^{a} b(\cos kx - i\sin kx)\,dx = 2b\int_0^a \cos kx\,dx$

$$= 2b\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^a = \boldsymbol{2b\frac{\sin ka}{k}}$$

(2) フーリエ逆変換を用いて

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2b\frac{\sin ka}{k}e^{ikx}\,dk = f(x) = \begin{cases} b & (|x| < a) \\ 0 & (|x| \geqq a) \end{cases}$$

ここで，$b = 1$ として，オイラーの公式を用いれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{\sin ka}{k}(\cos kx + i\sin kx)\,dk = \begin{cases} 1 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| \geqq a) \end{cases}$$

積分区間の対称性を考慮して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{\sin ka}{k}\cos kx\,dk = \begin{cases} 1 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| \geqq a) \end{cases}$$

となるから，結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka}{k}\cos kx\,dk = \begin{cases} \pi & (|x| < a) \\ 0 & (|x| \geqq a) \end{cases}$$

が得られ，もう一度，積分区間の対称性から

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ka}{k}\cos kx\,dk = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (|x| < a) \\ 0 & (|x| \geqq a) \end{cases}$$

ここで，$x = 0$ とすれば

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ka}{k}\,dk = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (0 < a) \\ 0 & (a = 0) \end{cases}$$

を得る．$a < 0$ の時は，上の式で $a$ を $-a\,(> 0)$ と思い，$\sin(-ka) = -\sin ka$ であることを持ちれば

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ak}{k}\,dk = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -\dfrac{\pi}{2} & (a < 0) \end{cases}$$

を得る．

176

(1) $\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}(\cos kx - i\sin kx)\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos kx\,dx$

$$= 2\Big[\frac{1}{1+k^2}\left(-e^{-x}\cos kx + ke^{-x}\sin kx\right)\Big]_0^{\infty} = \boldsymbol{\frac{2}{1+k^2}}$$

(2) フーリエ逆変換を用いれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+k^2}e^{ikx}\,dk = e^{-|x|}$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}e^{ikx}\,dk = \pi e^{-|x|}$$

を得る．ここで，$x=0$ とすれば，次を得る．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}\,dk = \boldsymbol{\pi}$$

177 【例題 10】図 (a) の閉積分路 $C$ をとる．すると

$$\oint_C \frac{e^{-ikz}}{z-ia}\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{-ikx}}{x-ia}\,dx + \int_{\text{上半円}}\frac{e^{-ikz}}{z-ia}\,dz \quad \cdots \quad ①$$

左辺は留数定理により計算できる．関数 $\dfrac{e^{-ikz}}{z-ia}$ は $z=ia$ に 1 位の極を持つ．積分路 $C$ 内の極は $z=ia$ だから

$$\oint_C \frac{e^{-ikz}}{z-ia}\,dz = i2\pi \times \mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z-ia}\ ;\ ia\right] = i2\pi e^{-ik\cdot ia} = i2\pi e^{ka}$$

一方，①の右辺の第 1 項は $R\to\infty$ の極限で，求める積分に等しい．

また，①の右辺の第 2 項は $R\to\infty$ の極限で 0 に収束する．

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-ia}\,dx = i2\pi e^{ka}$$

を得る．

4章の問題

1

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx = \pi \Longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx = 0. \\
&\therefore \quad |x| \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}} \quad \cdots \quad ①
\end{aligned}
$$

2

問題 1 の展開①において，$x=0$ で $f(x)$ が連続であるので，①において $x=0$ を代入すれば等号が成立するので

$$
0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}
$$

となるから，結局

$$
1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{8}}
$$

3

$|\sin x|$ が偶関数であることから，$b_n = 0$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi} \Longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}-1}{n-1}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1}
\end{aligned}
$$

したがって，$a_{2n-1} = 0$，$a_{2n} = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{-2}{(2n)^2-1} = \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1-4n^2}$

$$
\therefore \quad |\sin x| \sim \boldsymbol{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}}
$$

4

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-1}^{0}e^{-ikx}\,dx - \int_0^1 e^{-ikx}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{ik}e^{-ikx}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{ik}e^{-ikx}\right]_0^1 = -\frac{2}{ik} + \frac{1}{ik}(e^{ik} + e^{-ik}) = \boldsymbol{\frac{2(\cos k - 1)}{ik}}
\end{aligned}
$$

5　【例題 10】図 (a) の閉積分路 $C$ をとる．すると

$$\oint_C \frac{ze^{-ikz}}{z^2+a^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{-ikx}}{x^2+a^2}\,dx + \int_{\text{上半円}} \frac{ze^{-ikz}}{z^2+a^2}\,dz \quad \cdots \quad ①$$

左辺は留数定理により計算できる．関数 $\dfrac{ze^{-ikz}}{z^2+a^2}$ は $z=\pm ia$ に 1 位の極を持つ．積分路 $C$ 内の極は $z=ia$ だから

$$\oint_C \frac{ze^{-ikz}}{z^2+a^2}\,dz = i2\pi \times \mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-ikz}}{z^2+a^2}\ ;\ ia\right] = i2\pi\frac{aie^{-ik(ia)}}{2ai} = i\pi e^{ka}$$

一方，①の右辺の第 1 項は $R\to\infty$ の極限で，求める積分に等しい．
また，①の右辺の第 2 項は $R\to\infty$ の極限で 0 に収束する．

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-ikx}}{x^2+a^2}\,dx = i\pi e^{ka}$$

を得る．

6

$U(k,\,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,\,t)e^{-ikx}\,dx$ とおくと，$U$ は次の初期値問題の解である．

$$\begin{cases} U_t = -k^2U + tU & \cdots \quad ① \\ U(k,\,0) = 1 & \cdots \quad ② \end{cases}$$

①を②の初期条件の下で解けば

$$U(k,\,t) = e^{\frac{1}{2}t^2-k^2t}$$

となるから，これを逆フーリエ変換すれば

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}t^2-k^2t}e^{ikx}\,dk = e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}e^{ikx}\,dk$$

ここで，ガウス関数のフーリエ逆変換を用いれば

$$u(x,\,t) = e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{\frac{1}{2}t^2-\frac{x^2}{4t}}}$$