１章　ベクトル解析

２節　ベクトル関数の微分積分

A

16

(1)　$\boldsymbol{f}'(t)=(e^t,\ 2e^{2t},\ 3e^{3t})$　より　$\boldsymbol{f}'(0)=(1,\ 2,\ 3)$

(2)　$\boldsymbol{f}'(t)=(-\pi\sin\pi t,\ \pi\cos\pi t,\ \pi)$　より　$\boldsymbol{f}'(0)=(0,\ \pi,\ \pi)$

17

(1)　$\{\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)\}'=(e^t,\ -e^t,\ e^t)\cdot(-t,\ t,\ t)+(e^t,\ -e^{-t},\ e^t)\cdot(-1,\ 1,\ 1)$

$$=-te^t-te^{-t}+te^t-e^t+e^{-t}+e^t$$

$$=(-t+1)e^{-t}$$

一方，$\{\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)\}'=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ e^t & -e^{-t} & e^t\\ -t & t & t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ e^t & e^{-t} & e^t\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$$=(-te^{-t}-te^t,\ -(te^t+te^t),\ te^t-te^{-t})+(e^{-t}-e^t,\ -(e^t+e^t),\ e^t+e^{-t})$$

$$=((-t+1)e^{-t}-(t+1)e^t,\ -2(t+1)e^t,\ (-t+1)e^{-t}+(t+1)e^t)$$

(2)　$\{\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)\}'=(\cos t,\ -\sin t,\ 0)\cdot(e^{-t},\ 0,\ e^t)+(\sin t,\ \cos t,\ 0)\cdot(-e^{-t},\ 0,\ e^t)$

$$=e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$$

一方，$\{\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)\}'=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \cos t & -\sin t & 0\\ e^{-t} & 0 & e^t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \sin t & \cos t & 0\\ -e^{-t} & 0 & e^t\end{vmatrix}$

$$=(-e^t\sin t,\ -e^t\cos^t,\ e^{-t}\sin t)+(e^{-t}\cos t,\ -e^t\sin t,\ e^{-t}\cos t)$$

$$=(e^{-t}\cos t-e^t\sin t,\ -e^t\cos t-e^t\sin t,\ e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t)$$

18

(1)　$\boldsymbol{r}'(t)=(1,\ 2t,\ 0)$　より　$\boldsymbol{r}'(\pi)=(1,\ 2\pi,\ 0)$

(2)　$\boldsymbol{r}'(t)=(-\sin t,\ \cos t,\ 2)$　より　$\boldsymbol{r}'(\pi)=(0,\ -1,\ 2)$

19

(1)　$\boldsymbol{f}_u=(1,\ v,\ 0)$，$\boldsymbol{f}_v=(0,\ u,\ 1)$

(2)　$\boldsymbol{f}_u=(1,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{f}_v=(1,\ 0,\ 1)$

(3)　$\boldsymbol{f}_u=(\cos v,\ \sin v,\ 2u)$，$\boldsymbol{f}_v=(-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$

20

⑴ $\boldsymbol{f}'(t) = \boldsymbol{f}_u u'(t) + \boldsymbol{f}_v v'(t) = (-\sin u,\ \cos u,\ 0)\cdot 2 + (0,\ 0,\ 2v)\cdot 2$

$= (-2\sin u,\ 2\cos u,\ 4v) = (-2\sin(2t+1),\ 2\cos(2t+1),\ 8t-4)$

⑵ $(2u,\ 2u,\ 0)\cdot(-2\sin t) + (0,\ 2v,\ 2v)\cdot 2\cos t$

$= (-4u\sin t,\ -4u\sin t,\ 0) + (0,\ 4v\cos t,\ 4v\cos t)$

$= (-8\cos t\sin t,\ -8\cos t\sin t + 8\sin t\cos t,\ 8\sin t\cos t)$

$= (-4\sin 2t,\ 0,\ 4\sin 2t)$

21

⑴ $\boldsymbol{f}_s = \boldsymbol{f}_u u_s + \boldsymbol{f}_v v_s = (v,\ 1,\ 0)\cdot 1 + (u,\ 0,\ 1)t$

$= (v+tu,\ 1,\ t) = (st+st-t^2,\ 1,\ t)$

$= (2st-t^2,\ 1,\ t)$

$\boldsymbol{f}_t = \boldsymbol{f}_u u_t + \boldsymbol{f}_v v_t = (v,\ 1,\ 0)\cdot(-1) + (u,\ 0,\ 1)s$

$= (-st+s^2-st,\ -1,\ s) = (-2st+s^2,\ -1,\ s)$

⑵ $\boldsymbol{f}_s = (v,\ 2u,\ 0)\cdot e^s\cos t + (u,\ 0,\ 2v)\cdot e^s\sin t$

$= (e^{2s}\sin t\cos t,\ 2e^{2s}\cos^2 t,\ 0) + (e^{2s}\cos t\sin t,\ 0,\ 2e^{2s}\sin^2 t)$

$= e^{2s}(\sin 2t,\ 2\cos^2 t,\ 2\sin^2 t)$

$\boldsymbol{f}_t = (v,\ 2u,\ 0)\cdot e^s(-\sin t) + (u,\ 0,\ 2v)\cdot e^s\cos t$

$= (-e^{2s}\sin^2 t,\ -2e^{2s}\cos t\sin t,\ 0) + (e^{2s}\cos^2 t,\ 0,\ 2e^{2s}\cos t\sin t)$

$= e^{2s}(\cos^2 t-\sin^2 t,\ -2\cos t\sin t,\ 2\cos t\sin t)$

$= e^{2s}(\cos 2t,\ -\sin 2t,\ \sin 2t)$

22

⑴ (i) $x=u,\ y=v,\ z=6-3u-2v$ より $z=6-3x-2y$ （平面）

(ii) $v=0$ のとき $x=u,\ y=0,\ z=6-3u$ なので $z=6-3x$

(iii) $u=\sqrt{2}$ のとき $x=\sqrt{2},\ y=v,\ z=6-3u-2v$ なので $z=6-3\sqrt{2}-2y$

(iv) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 0,\ 6-3\sqrt{2})$ における u 曲線上の接線ベクトルは，

$\boldsymbol{r}_u(u,\ v) = (1,\ 0,\ -3)$ より $\boldsymbol{r}_u(\sqrt{2},\ 0) = (1,\ 0,\ -3)$

v 曲線上の接線ベクトルは，

$\boldsymbol{r}_v(u,\ v) = (0,\ 1,\ -2)$ より $\boldsymbol{r}_v(\sqrt{2},\ 0) = (0,\ 1,\ -2)$

(v) 点 P での曲線の法線ベクトルは

$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (1,\ 0,\ -3)\times(0,\ 1,\ -2)$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3,\ 2,\ 1)$$

⑵　(i)　$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=4-u^2$　より

$x^2+y^2=u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v=u^2,\ 4-z=u^2$　であり　$x^2+y^2=4-z$　が成立。

よって　答は　$z=4-x^2-y^2$

(ii)　$v=0$　のとき　$x=u,\ y=0,\ z=4-u^2$　より　u 曲線は

平面　$y=0$　上の放物線　$z=4-x^2$

(iii)　$u=\sqrt{2}$　のとき　$x=\sqrt{2}\cos v,\ y=\sqrt{2}\sin v,\ z=4-2=2$　より

$x^2+y^2=2\cos^2 v+2\sin^2 v=2$　であるから，v 曲線は，

平面　$z=2$　上の中心$(0,\ 0,\ 2)$　　半径$\sqrt{2}$　の円　$x^2+y^2=2$

(iv)　点 P$(\sqrt{2},\ 0,\ 2)$ における u 曲線上の接線ベクトルは，

$\boldsymbol{r}_u(u,\ v)=(\cos v,\ \sin v,\ -2u)$　より　$\boldsymbol{r}_u(\sqrt{2},\ 0)=(1,\ 0,\ -2\sqrt{2})$

v 曲線上の接線ベクトルは，

$\boldsymbol{r}_v(u,\ v)=(-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$　より　$\boldsymbol{r}_v(\sqrt{2},\ 0)=(0,\ \sqrt{2},\ 0)$

(v)　点 P での曲線の法線ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=(1,\ 0,\ -2\sqrt{2})\times(0,\ \sqrt{2},\ 0)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 0 & -2\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}=(4,\ 0,\ \sqrt{2})$$

23

⑴　$\boldsymbol{r}'=(1,\ 2,\ 2t)$，$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{1+4+4t^2}$　より　$\boldsymbol{t}=\dfrac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|}=\dfrac{(1,\ 2,\ 2t)}{\sqrt{5+4t^2}}$

よって　$t=1$　のとき　$\boldsymbol{t}=\dfrac{1}{3}(1,\ 2,\ 2)$

p.8 $\boxed{2}$ 公式 4 より

$$\boldsymbol{t}'=\frac{1}{(\sqrt{5+4t^2})^2}\left\{(0,\ 0,\ 2)\sqrt{5+4t^2}-(1,\ 2,\ 2t)\frac{8t}{2\sqrt{5+4t^2}}\right\}$$

よって$t=1$　のとき

$$\boldsymbol{t}'=\frac{1}{9}\left\{(0,\ 0,\ 6)-\frac{(4,\ 8,\ 8)}{3}\right\}=\frac{1}{9}\cdot\frac{(-4,\ -8,\ 10)}{3}=\frac{2}{27}(-2,\ -4,\ 5)$$

$$|\boldsymbol{t}'|=\frac{2}{27}\sqrt{4+16+25}=\frac{2}{9}\sqrt{5}$$

よって　$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{t}'}{|\boldsymbol{t}'|}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(-2,\ -4,\ 5)$

⑵　$\boldsymbol{r}' = (2\cos 2t,\ -2\sin 2t,\ 2)$ より

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = \frac{(2\cos 2t,\ -2\sin 2t,\ 2)}{\sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t + 4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}(\cos 2t,\ -\sin 2t,\ 1)$$

よって　$t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\boldsymbol{t} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ 1)$

$$\boldsymbol{t}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2\sin 2t,\ -2\cos 2t,\ 0)$$

よって　$t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\boldsymbol{t}' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 2,\ 0)$

したがって　$|\boldsymbol{t}'| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{0+4+0} = \sqrt{2}$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{t}'}{|\boldsymbol{t}'|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 2,\ 0) = (0,\ 1,\ 0)$$

24

⑴　$\boldsymbol{r}'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 3)$

$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 3^2} = \sqrt{10}$　より　$\boldsymbol{t}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-\sin t,\ \cos t,\ 3)$

$$\boldsymbol{t}'(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

ここで　$\dfrac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{10}$　（p.9 $\boxed{5}$ (ii) ）より

$\boldsymbol{t}'(s) = \dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt} \cdot \dfrac{dt}{ds} = \boldsymbol{t}'(t) \cdot \dfrac{1}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{1}{10}(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$ なので

$$\kappa = |\boldsymbol{t}'(s)| = \frac{1}{10}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 0^2} = \frac{1}{10}$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = 10$$

⑵ $\boldsymbol{r}'(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 2)$

$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+4}=\sqrt{8}$ より $\boldsymbol{t}(t)=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 2)$

$\boldsymbol{t}'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{8}}(-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)$

ここで $\dfrac{ds}{dt}=|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{8}$ （p.9 $\boxed{5}$ (ii) ）より

⑴と同様 $\boldsymbol{t}'(s)=\dfrac{\boldsymbol{t}'(t)}{s'(t)}=\dfrac{1}{8}(-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)$ なので

$\kappa=|\boldsymbol{t}'(s)|=\dfrac{1}{8}\sqrt{4\cos^2 t+4\sin^2 t}=\dfrac{1}{4}$

$\rho=4$

25 $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 2t)$ について

$\boldsymbol{r}'(t)=(-\sin t,\ \cos t,\ 2)$ は接線ベクトルで

$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+2^2}=\sqrt{5}$ より $\boldsymbol{t}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\sin t,\ \cos t,\ 2)$

$\boldsymbol{t}'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$ は法線ベクトルで

$|\boldsymbol{t}'(t)|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+0^2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ より $\boldsymbol{n}(t)=(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$

したがって p.9 $\boxed{5}$ (ii) 3 より

$$\boldsymbol{b}(t)=\boldsymbol{t}(t)\times\boldsymbol{n}(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -\sin t & \cos t & 2\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\sin t,\ -2\cos t,\ 1)$$

したがって $\boldsymbol{b}'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)$ より

$$\boldsymbol{b}'(s)=\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\boldsymbol{b}'(t)\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\boldsymbol{b}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)$ （p.9 $\boxed{5}$ (ii)）

$=\dfrac{2}{5}(\cos t,\ \sin t,\ 0)$ …… ㋐ 一方 p.9 $\boxed{5}$ (ii) 2 より

$\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{n}(t)=(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$ …… ㋑ よって

p.9 $\boxed{5}$ (ii) 3 より $\boldsymbol{b}'(s)=-\tau\,\boldsymbol{n}(s)$ で ㋐ ㋑ より $\tau=\dfrac{2}{5}$ を得る。

⑴ $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=\left(1,\ -1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)$ より $\boldsymbol{v}(2)=(1,\ -1,\ \sqrt{2})$ ㋐

よって $v(2)=\sqrt{1+1+2}=2$ ㋑

また $\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{r}''(t)=\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ より $\boldsymbol{a}(2)=\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ㋒

一方 $\boldsymbol{v}(t)=v(t)\boldsymbol{t}(t)$ より $\boldsymbol{v}(2)=v(2)\boldsymbol{t}(2)$ であるから

㋐ ㋑より $(1,\ -1,\ \sqrt{2})=2\boldsymbol{t}(2)$

したがって $\boldsymbol{t}(2)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ㋓

この方向への $\boldsymbol{a}$ の正射影の大きさは

$a_t=\boldsymbol{a}(2)\cdot\boldsymbol{t}(2)$ （㋒ ㋓ より）

$=0+0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ ㋔ よって

$a_n\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-a_t\boldsymbol{t}$ （㋒ ㋓ ㋔ より）

$=\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$=\left(\dfrac{-1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

したがって

$a_n=|a_n\boldsymbol{n}|=\sqrt{\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{2}{16}}=\dfrac{1}{2}$ ㋕

㋔ ㋕ より $t=2$ のとき $\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{t}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{n}$

⑵ $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=(2t,\ 1-t^2,\ 1+t^2)$

$\boldsymbol{v}(1)=(2,\ 0,\ 2)$ ㋐ より

$v(1)=\sqrt{4+0+4}=2\sqrt{2}$ ㋑

また $\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{r}''(t)=(2,\ -2t,\ 2t)$ より

$\boldsymbol{a}(1)=(2,\ -2,\ 2)$ ㋒

一方⑴と同様 $\boldsymbol{v}(1)=v(1)\boldsymbol{t}(1)$ なので㋐ ㋑より $(2,\ 0,\ 2)=2\sqrt{2}\,\boldsymbol{t}(1)$

したがって $\boldsymbol{t}(1)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ㋓

この方向への $\boldsymbol{a}$ の正射影の大きさは

$a_t=\boldsymbol{a}(1)\cdot\boldsymbol{t}(1)$ （㋒ ㋓ より）

$=(2,\ -2,\ 2)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}+0+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ ㋔

よって $a_n\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-a_t\boldsymbol{t}$ （㋒ ㋓ ㋔ より）

$=(2,\ -2,\ 2)-2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=(2-2,\ -2-0,\ 2-2)=(0,\ -2,\ 0)$

したがって

$a_n=|a_n\boldsymbol{n}|=2$ ㋕

㋔ ㋕ より $t=1$ のときは $\boldsymbol{a}=2\sqrt{2}\,\boldsymbol{t}+2\boldsymbol{n}$

⑶ $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=(\sqrt{2},\ e^t,\ -e^{-t})$

$\boldsymbol{v}(0)=(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$ ㋐

よって $v(0)=\sqrt{2+1+1}=2$ ㋑

また $\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{r}''(t)=(0,\ e^t,\ e^{-t})$

$\boldsymbol{a}(0)=(0,\ 1,\ 1)$ ㋒

一方⑴ ⑵と同様 $\boldsymbol{v}(0)=v(0)\boldsymbol{t}(0)$ なので ㋐ ㋑ より $(\sqrt{2},\ 1,\ -1)=2\boldsymbol{t}(0)$

したがって $\boldsymbol{t}(0)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1}{2}\right)$ ㋓

この方向への $\boldsymbol{a}$ の正射影の大きさは

$a_t=\boldsymbol{a}(0)\cdot\boldsymbol{t}(0)$ （㋒ ㋓ より）

$=(0,\ 1,\ 1)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

よって $\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{t}+a_n\boldsymbol{n}$ となり a_n は $\boldsymbol{a}$ の大きさそのものである。

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2}$ （㋒ より）

なので $a_n=\sqrt{2}$

したがって $\boldsymbol{a}=0\,\boldsymbol{t}+\sqrt{2}\,\boldsymbol{n}$ となる。

27

(1) $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{f}(t)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 2 & 1\\ t & 2t+1 & t^2\end{vmatrix}=(2t^2-2t-1,\ -(t^2-t),\ 1)$

よって

与式$=\left(\dfrac{2}{3}t^3-t^2-t+c_1,\ -\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+c_2,\ t+c_3\right)$

(2) $\displaystyle\int\boldsymbol{f}(t)\,dt=\left(\frac{1}{2}t^2+c_3,\ t^2+t+c_4,\ \frac{1}{3}t^3+c_5\right)$

よって

与式 $=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 2 & 1\\ \dfrac{1}{2}t^2+c_3 & t^2+t+c_4 & \dfrac{1}{3}t^3+c_5\end{vmatrix}$

$=\left(\dfrac{2}{3}t^3-t^2-t+2c_5-c_4,\ -\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2-c_5+c_3,\ t+c_4-2c_3\right)$

⑴　$\boldsymbol{f}=(t,\ 2t,\ 3)$, $\boldsymbol{g}=\left(\dfrac{1}{2}e^{2t},\ 0,\ \dfrac{1}{3}e^{3t}\right)$ とおくと $\boldsymbol{f}'=(1,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{g}'=(e^{2t},\ 0,\ e^{3t})$ である。

与式$=\displaystyle\int \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}'\,dt$ とみると　p.10 $\boxed{10}$ 公式 3 より

$$\text{与式}=(t,\ 2t,\ 3)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2t},\ 0,\ \frac{1}{3}e^{3t}\right)-\int(1,\ 2,\ 0)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2t},\ 0,\ \frac{1}{3}e^{3t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}te^{2t}+e^{3t}-\int\frac{1}{2}e^{2t}\,dt=\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\right)e^{2t}+e^{3t}+c$$

⑵　⑴と同様にして

与式$=\displaystyle\int \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}'\,dt$ とみると　p.10 $\boxed{10}$ 公式 4 より

$$\text{与式}=(t,\ 2t,\ 3)\times\left(\frac{1}{2}e^{2t},\ 0,\ \frac{1}{3}e^{3t}\right)-\int(1,\ 2,\ 0)\times\left(\frac{1}{2}e^{2t},\ 0,\ \frac{1}{3}e^{3t}\right)dt$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ t & 2t & 3\\ \frac{1}{2}e^{2t} & 0 & \frac{1}{3}e^{3t}\end{vmatrix}-\int\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 2 & 0\\ \frac{1}{2}e^{2t} & 0 & \frac{1}{3}e^{3t}\end{vmatrix}dt$$

$$=\left(\frac{2}{3}te^{3t},\ -\left(\frac{1}{3}te^{3t}-\frac{3}{2}e^{2t}\right),\ -te^{2t}\right)-\int\left(\frac{2}{3}e^{3t},\ -\frac{1}{3}e^{3t},\ -e^{2t}\right)dt$$

$$=\left(\frac{2}{3}te^{3t}-\frac{2}{9}e^{3t}+c_1,\ -\frac{1}{3}te^{3t}+\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{3t}+c_2,\ -te^{2t}+\frac{1}{2}e^{2t}+c_3\right)$$

$$=\left(\left(\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}\right)e^{3t}+c_1,\ \frac{3}{2}e^{2t}+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t\right)e^{3t}+c_2,\ \left(\frac{1}{2}-t\right)e^{2t}+c_3\right)$$

⑶　$\boldsymbol{f}=(1,\ 2t,\ 3)$, $\boldsymbol{g}=(\sin t,\ -\cos t,\ t^2)$ とおくと
$\boldsymbol{f}'=(0,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{g}'=(\cos t,\ \sin t,\ 2t)$ である。

与式$\displaystyle\int \boldsymbol{g}'\cdot\boldsymbol{f}\,dt=\int\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}'$ とみると　p.10 $\boxed{10}$ 公式 3 と $\boxed{11}$ より

$$\text{与式}=\Big[(1,\ 2t,\ 3)\cdot(\sin t,\ -\cos t,\ t^2)-\int(0,\ 2,\ 0)\cdot(\sin t,\ -\cos t,\ t^2)\,dt\Big]_0^{\pi}$$

$$=\Big[\sin t-2t\cos t+3t^2\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-2\cos t)\,dt$$

$$=2\pi+3\pi^2+2\Big[\sin t\Big]_0^{\pi}=2\pi+3\pi^2$$

⑷　⑶と同様にして

与式 $= \displaystyle\int \boldsymbol{g}' \cdot \boldsymbol{f}\, dt = -\int \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}'\, dt$　とみると　p.10 $\boxed{10}$ 公式 4 と $\boxed{11}$ より

$$\text{与式} = -\left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2t & 3 \\ \sin t & -\cos t & t^2 \end{vmatrix} - \int \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin t & -\cos t & t^2 \end{vmatrix} dt\right]_0^{\pi}$$

$$= -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2\pi & 3 \\ 0 & 1 & \pi^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \int_0^{\pi} (2t^2,\ 0,\ -2\sin t)\, dt$$

$$= -(2\pi^3 - 3,\ -\pi^2,\ 1) + (3,\ 0,\ -1) + \left(\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\pi},\ 0,\ \left[2\cos t\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{3}\pi^3 + 6,\ \pi^2,\ -6\right)$$

B

29　$|\boldsymbol{f}(t)| = c$　より　$|\boldsymbol{f}(t)|^2 = c^2$　であり　p.4 $\boxed{1}$ 1 で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$,

すなわち $\theta = 0$ とすると $\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{f}(t) = c^2$ である。

両辺を t で微分すると p.8 $\boxed{2}$ 5 より

$\boldsymbol{f}'(t) \cdot \boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{f}'(t) = 0$　よって　$\boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{f}'(t) = 0$　だが,

$\boldsymbol{f}(t) \neq \boldsymbol{0}$,　$\boldsymbol{f}'(t) \neq \boldsymbol{0}$　の仮定より　$\boldsymbol{f}(t) \perp \boldsymbol{f}'(t)$　が p.4 $\boxed{2}$ 5 より結論される。

30　$\boldsymbol{f}(t) \neq \boldsymbol{0}$　より　$|\boldsymbol{f}(t)| \neq 0$ であって例題 3 解答より　$\dfrac{\boldsymbol{f}(t)}{|\boldsymbol{f}(t)|} = \boldsymbol{e}(t)$　とおくとこれは

$\boldsymbol{f}'(t)$　方向の単位ベクトルであり,

$\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{f}'(t) = |\boldsymbol{f}(t)|^2\, \boldsymbol{e}(t) \times \boldsymbol{e}'(t)$　が成立する。

仮定より $\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{f}'(t) = \boldsymbol{0}$　であって　$|\boldsymbol{f}(t)| \neq 0$ なので

$\boldsymbol{e}(t) \times \boldsymbol{e}'(t) = \boldsymbol{0}$　㋐　である。

一方,　$|\boldsymbol{e}(t)|$　は一定値 1 なので問題 29 より

(i)　$\boldsymbol{e}'(t) = \boldsymbol{0}$　または　(ii)　$\boldsymbol{e}(t) \perp \boldsymbol{e}'(t)$　が結論されるが,

(ii)　のときは　㋐　の左辺の大きさは p.4 $\boxed{3}$ 1（外積の定義）より

$|\boldsymbol{e}(t)||\boldsymbol{e}'(t)| \sin\theta = 1 \cdot |\boldsymbol{e}'(t)| \sin\dfrac{\pi}{2} = |\boldsymbol{e}'(t)|$　だが　㋐　よりその値は 0 である。

したがって,　(ii)　のときも $\boldsymbol{e}'(t) = \boldsymbol{0}$ となる。

つまり $\boldsymbol{e}(t)$ は定ベクトルであって

$\boldsymbol{f}(t) = |\boldsymbol{f}(t)|\boldsymbol{e}(t)$　は常に一定方向であるといえる。

31

(1) $\boldsymbol{r}'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ h)$ なので p.9 $\boxed{5}$ (ii) 1 より

$$\boldsymbol{t}(t)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\frac{(-a\sin t,\ a\cos t,\ h)}{\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+h^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(-a\sin t,\ a\cos t,\ h)$$

$$\boldsymbol{t}'(t)=\frac{(-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

したがって　$\boldsymbol{t}'(s)=\dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}\cdot\dfrac{1}{\frac{ds}{dt}}=\boldsymbol{t}'(t)\cdot\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$　(p.9 $\boxed{5}$ (ii))

$$=\frac{(-a\cos t,\ a\sin t,\ 0)}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+h^2}}$$

$$=\frac{-a}{a^2+h^2}(\cos t,\ \sin t,\ 0)$$

したがって，p.9 $\boxed{5}$ (iii) 1 より

$|\boldsymbol{t}'(s)|=|\kappa\boldsymbol{n}(s)|=\kappa$　($\kappa>0$, $|\boldsymbol{n}(s)|=1$) であることから

$$\kappa=|\boldsymbol{t}'(s)|=\left|\frac{-a}{a^2+h^2}\right|\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+0^2}=\frac{a}{a^2+h^2}$$

⑵ p.9 $\boxed{5}$ (ii) 2 と⑴ の $\boldsymbol{t}(t)$, $\boldsymbol{t}'(t)$ を用いると

$$\boldsymbol{n}(t)=\frac{(-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)}{\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+0^2}}$$

$$=(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

よって，p.9 $\boxed{5}$ (ii) 3 より $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$ であり

$$\boldsymbol{b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(-a\sin t,\ a\cos t,\ h)\times(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -a\sin t & a\cos t & h\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(h\sin t,\ -h\cos t,\ a\sin^2 t+a\cos^2 t)$$

したがって $\boldsymbol{b}'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(h\cos t,\ h\sin t,\ 0)$

$$\boldsymbol{b}'(s)=\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\boldsymbol{b}'(t)\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\qquad(\text{ p.9 }\boxed{5}\text{ (ii)})$$

$$=\frac{(h\cos t,\ h\sin t,\ 0)}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+h^2}}$$

$$=\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}(\cos t,\ \sin t,\ 0)$$

一方 $\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{n}(t)=(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$ (p.9 $\boxed{5}$ (ii) 2 より) であり,

p.9 $\boxed{5}$ (iii) 3 より

$\tau=\dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$ を得る。

32

⑴ $\boldsymbol{f}(t)=\int \boldsymbol{c}\,dt=\boldsymbol{c}t+\boldsymbol{d}$ （$\boldsymbol{d}$ は任意の定ベクトル）

⑵ $\boldsymbol{f}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t)),\ \boldsymbol{f}'(t)=(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$ より

$x'(t)=x(t)$ ㋐，$y'(t)=y(t)$ ㋑，$z'(t)=z(t)$ ㋒ が成立する。

㋐ ㋑ ㋒ を『新版微分積分Ⅱ』p.160 の方法で解くと

㋐ は $\dfrac{dx}{dt}=x$ なので $x\fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=1 \quad \text{となり} \quad \int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\,dt=\int 1\,dt$$

よって $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx=\int 1\,dt$

したがって $\log|x|=t+c_1$ （c_1 は任意定数）

よって $x=\pm e^{c_1}\cdot e^t=C_1 e^t$ と表せる。

同様にして ㋑ より $y=C_2 e^t$，㋒ より $y=C_3 e^t$

よって $\boldsymbol{f}(t)=(C_1 e^t,\ C_2 e^t,\ C_3 e^t)=(C_1,\ C_2,\ C_3)e^t=\boldsymbol{c}\,e^t$ （$\boldsymbol{c}$ は任意の定ベクトル）

（注意）⑵は線形微分方程式なので⑶の解答で用いる公式を使っても解ける。

⑶ x の関数 $y=f(x)$ に関する線形微分方程式 $y'+P(x)y=Q(x)$ （$P(x)$，$Q(x)$ は x の関数）の解の公式である次の式を用いて解く。（『新版微分積分Ⅱ』p.165）

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+c\right)$$

与式は $(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))+(kx(t),\ ky(t),\ kz(t))=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ と表せ，x 成分は

$x'(t)+kx(t)=c_1$ が成立する。

したがって上の公式を使うと

$$x(t)=e^{-kt}\left(\int c_1 e^{kt}\,dt+d_1\right)=e^{-kt}\left(c_1\cdot\frac{1}{k}e^{kt}+d_1\right)$$

$$=\frac{c_1}{k}+d_1 e^{-kt} \quad (d_1 \text{ は任意定数}) \quad ㋐$$

同様にして $y(t)=\dfrac{c_2}{k}+d_2 e^{-kt}$ ㋑

$z(t)=\dfrac{c_3}{k}+d_3 e^{-kt}$ ㋒ （d_2，d_3 は任意定数）

㋐ ㋑ ㋒ より $\boldsymbol{f}(t)=\dfrac{\boldsymbol{c}}{k}+\boldsymbol{d}\,e^{-kt}$ （ $\boldsymbol{d}$ は任意の定ベクトル）

33　$\left\{\dfrac{1}{2}\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{v}(t)\right\}'=\boldsymbol{0}$　であることをいえばよい。p.8 $\boxed{2}$ 5　より

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{v}(t)\}' &= \boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)\\ &= \boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{a}(t)\\ &= \boldsymbol{0}+\boldsymbol{r}(t)\times\frac{|\boldsymbol{f}(t)|}{m}\cdot\frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|}\\ &= \frac{|\boldsymbol{f}(t)|}{m|\boldsymbol{r}(t)|}\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

（p.4 $\boxed{4}$ 3）

よって，面積速度は $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{c}$　（$\boldsymbol{c}$ は定ベクトル）

したがって　$\boldsymbol{c}\neq 0$　のとき，$\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{v}(t)$ のつくる平面は $\boldsymbol{c}$ に垂直。つまり $\boldsymbol{r}(t)$ は $\boldsymbol{c}$ に垂直な平面内にある。一方　$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$　のとき，$\boldsymbol{r}(t)$ は O を通る 1 つの直線に沿って動く。