1 章　ベクトル解析

1 章の問題

1

⑴　$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす平行四辺形の面積（←p.4 $\boxed{3}$ ）なので

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(-3,\ 1,\ 1)\times(2,\ -6,\ 2)\right|=\frac{1}{2}\left|(2+6,\ 2+6,\ 18-2)\right|$$

$$=\sqrt{8^2+8^2+16^2}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{2}\sqrt{1+1+2^2}=4\sqrt{6}$$

⑵　前問より $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8,\ 8,\ 16)$ だが，これは p.4 $\boxed{3}$ より $\overrightarrow{AB}$ にも $\overrightarrow{AC}$ にも垂直なベクトルなので

△ABC の法線ベクトルである。またこのベクトルの大きさは前問より $4\sqrt{6}$ である。よって

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{4\sqrt{6}}(8,\ 8,\ 16)=\frac{2}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ 2)$$

⑶　$|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$ は $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ のなす平行六面体の体積である。（ ←p.4 $\boxed{5}$ ）

$\overrightarrow{AD}=(3,\ 3,\ -9)$ に注意して

$$\begin{vmatrix}-3&1&1\\2&-6&2\\3&3&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{vmatrix}\times 6=\begin{vmatrix}0&0&1\\4&-4&1\\-8&4&-3\end{vmatrix}\times 6=-16\times 6$$ より

$$V=\frac{1}{6}|-16\times 6|=16$$

⑷　前問よりスカラー三重積の値が負なので与えられた 3 つのベクトルは左手系をなす。

⑸　$\boldsymbol{a}$ 方向の単位ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ であるが，p.4 $\boxed{1}$ より

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=|\boldsymbol{a}|\cdot 1\cos\alpha$ が成立し， $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot(1,\ 0,\ 0)=\cos\alpha$ となるから

$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ の x 成分は $\cos\alpha$ である。同様,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{a}|\cdot 1\cos\beta$,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_3=|\boldsymbol{a}|\cdot 1\cos\gamma$　より

y 成分が $\cos\beta$， z 成分が $\cos\gamma$ であることが分かる。

よって答は　（$\cos\alpha$,　$\cos\beta$　$\cos\gamma$）である。

2

⑴　x^2+y^2

$=4\cos^2 u\sin^2 v+4\sin^2 u\sin^2 v$

$=4\sin^2 v(\cos^2 u+\sin^2 u)=4\sin^2 v$

よって　$x^2+y^2+z^2=4\sin^2 v+4\cos^2 v=4$

したがって　答は　$x^2+y^2+z^2=4$

⑵　$v=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\left(u,\ \dfrac{\pi}{6}\right)=\left(2\cos u\cdot\dfrac{1}{2},\ 2\sin u\cdot\dfrac{1}{2},\ 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって　$x=\cos u,\ y=\sin u,\ z=\sqrt{3}$

$x^2+y^2=\cos^2 u+\sin^2 u=1$

したがって　答は　平面 $z=\sqrt{3}$ 上の半径 1 の円 $x^2+y^2=1$

⑶　$u=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\left(\dfrac{\pi}{3},\ v\right)=\left(2\cdot\dfrac{1}{2}\sin v,\ 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin v,\ 2\cos v\right)$

よって　$x=\sin v,\ y=\sqrt{3}\sin v,\ z=2\cos v$

したがって　$x^2+y^2=4\sin^2 v,\ z=2\cos v$

つまり $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=2\sin v\\ z=2\cos v\end{cases}$　㋐

今，v 曲線上の任意点 P の xy 平面上へ正射影 $(x,\ y,\ 0)$ を P′ とする。

但し $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ とする。xy 平面上で O から P′ 方向へ座標軸 w をとると

$\mathrm{OP}'=\sqrt{x^2+y^2}=w$ となるので㋐は $\begin{cases}w=2\sin v\\ z=2\cos v\end{cases}$ と表される。

したがって v 曲線は wz で平面内の円　$w^2+z^2=4$ である。

⑷　$\boldsymbol{r}_u=(2(-\sin u)\sin v,\ 2\cos u\sin v,\ 0)$

$=\left(-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2},\ 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2},\ 0\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$

$\boldsymbol{r}_v=(2\cos u\cos v,\ 2\sin u\cos v,\ -2\sin v)$

$=\left(2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -2\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2},\ -1\right)$

⑸　接平面は前問の接線ベクトル $\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v$ を含む平面であり，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ はその法線である。

前問の結果を用いて

$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=-\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{3}\right),$

$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}+3}=2$　より　$\boldsymbol{n}=\pm\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

⑴ $\boldsymbol{r}'(t)=(2t^2,\ 2t,\ 1)$ より $|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{4t^4+4t^2+1}=2t^2+1$

従って　$\boldsymbol{t}=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\dfrac{1}{2t^2+1}(2t^2,\ 2t,\ 1)$　　(←p.9 $\boxed{5}$ (ii) 1)

⑵ p.9 $\boxed{5}$ (ii) 2 より　$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{t}'(t)}{|\boldsymbol{t}'(t)|}$　　㋐　だが

p.8 $\boxed{2}$ 4　より

$$\boldsymbol{t}'(t)=\frac{(4t,\ 2,\ 0)\cdot(2t^2+1)-(2t^2,\ 2t,\ 1)\cdot 4t}{(2t^2+1)^2}$$

$$=\frac{(8t^2+4t,\ 4t^2+2,\ 0)-(8t^3,\ 8t^2,\ 4t)}{(2t^2+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(2t^2+1)^2}\cdot(2t,\ -2t^2+1,\ -2t)$$

$$|\boldsymbol{t}'(t)|=\frac{2}{(2t^2+1)^2}\cdot\sqrt{4t^2+4t^4-4t^2+1+4t^2}=\frac{2}{2t^2+1}$$

よって　㋐より

$$\boldsymbol{n}=\frac{2t^2+1}{2}\cdot\frac{2}{(2t^2+1)^2}\cdot(2t,\ -2t^2+1,\ -2t)=\frac{1}{2t^2+1}(2t,\ -2t^2+1,\ -2t)\qquad ㋑$$

⑶ $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$　　(←p.9 $\boxed{5}$ (ii) 3)

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{2t^2}{2t^2+1} & \dfrac{2t}{2t^2+1} & \dfrac{1}{2t^2+1}\\ \dfrac{2t}{2t^2+1} & \dfrac{-2t^2+1}{2t^2+1} & \dfrac{-2t}{2t^2+1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 2t^2 & 2t^2 & 1\\ 2t & -2t^2+1 & -2t\end{vmatrix}\times\frac{1}{(2t^2+1)^2}$$

$$=(-4t^2+2t^2-1,\ 2t+4t^3,\ -4t^4+2t^2-4t^2)\times\frac{1}{(2t^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2t^2+1}(-1,\ 2t,\ -2t^2)$$

⑷　p.9 $\boxed{5}$ ⅲ　フレネ-セレーの公式より　$|\boldsymbol{t}'(s)| = |\kappa\boldsymbol{n}(s)| = \kappa|\boldsymbol{n}(s)| = \kappa$ である。

$$\boldsymbol{t}'(s) = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$= \boldsymbol{t}'(s)\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|} \qquad (\leftarrow \text{p.9 } \boxed{5} \text{ (ii)}) \qquad ㋒$$

$$= \frac{2}{(2t^2+1)^3}\cdot(2t,\ -2t^2+1,\ -2t) \qquad (\text{⑴, ⑵より}) \text{ であるから}$$

$$\kappa = |\boldsymbol{t}'(s)|$$

$$= \frac{2}{(2t^2+1)^3}\sqrt{4t^2+4t^4-4t^2+1+4t^2} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$

⑸　p.9 $\boxed{5}$ ⅲ　フレネ-セレーの公式より　$\boldsymbol{b}'(s) = -\tau\boldsymbol{n}(s)$　である。

ここで　p.9 $\boxed{5}$ ⅱ 2 より　$\boldsymbol{n}(s) = \dfrac{\boldsymbol{t}'(s)}{|\boldsymbol{t}'(s)|} = \dfrac{\boldsymbol{t}'(t)}{|\boldsymbol{t}'(t)|}$　であり，⑵でこれは求まっている。一方

$$\boldsymbol{b}'(s) = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$= \boldsymbol{b}'(t)\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|} \qquad (\text{㋒ と同様})$$

$$= \left\{\frac{(0,\ 2,\ -4t)\cdot(2t^2+1)-(-1,\ 2t,\ -2t^2)\cdot 4t}{(2t^2+1)^2}\right\}\cdot\frac{1}{2t^2+1}$$

$$= \frac{1}{(2t^2+1)^3}\cdot(4t,\ -4t^2+2,\ -4t)$$

$$= \frac{2}{(2t^2+1)^3}\cdot(2t,\ -2t^2+1,\ -2t) \qquad ㋓$$

㋑，㋓　より　$-\tau = \dfrac{2}{(2t^2+1)^2}$　となり　$\tau = \dfrac{-2}{(2t^2+1)^2}$

⑹　原点において　$t = 0$　なので

⑴より　$\boldsymbol{t} = (0,\ 0,\ 1)$

⑵より　$\boldsymbol{n} = (0,\ 1,\ 0)$

⑶より　$\boldsymbol{b} = (-1,\ 0,\ 0)$

⑷より　$\kappa = 2$，⑸より $\tau = -2$

よって　接触平面は yz 平面で $x = 0$，法平面は xy 平面で $z = 0$，展直平面は xz 平面で $y = 0$ である。

⑺　$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t) = (2t^2,\ 2t,\ 1)$　（⑴より）

よって　$\boldsymbol{v}(-1) = (2,\ -2,\ 1)$

また，$\boldsymbol{v}(t) = |\boldsymbol{r}'(t)| = 2t^2+1$　（⑴より）　㋔

よって　$v(-1) = 3$

$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}(t) = (4t,\ 2,\ 0)$ で $\boldsymbol{a}(-1) = (-4,\ 2,\ 0)$

⑻　$v'(t) = 4t,\ v'(-1) = -4$　より　$a_t = -4$

㋔より　$v(-1) = 3$，⑷より $t = 1$ で $\kappa = \dfrac{2}{9}$，　$\rho = \dfrac{9}{2}$ で　$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{2}{9} \cdot 3^2 = 2$　である。

よって　$\boldsymbol{a}(-1) = -4\boldsymbol{t}(-1) + 2\boldsymbol{n}(-1)$　となる。（p.9 $\boxed{7}$ より）

4

⑴　$\nabla f = (f_x,\ f_y,\ f_z) = (2x,\ 2y,\ 1)$

⑵　点 P においては　$x = 0,\ y = \sqrt{3},\ z = -1$　を代入して

$\nabla f = (0,\ 2\sqrt{3},\ 1)$　であり，単位法線ベクトルは $|\nabla f| = \sqrt{0+12+1} = \sqrt{13}$　より

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}(0,\ 2\sqrt{3},\ 1)$$

⑶　$\dfrac{df}{ds} = (\nabla f)\cdot\boldsymbol{n} = |\nabla f|\cdot|\boldsymbol{n}|\cos 0 = |\nabla f| = \sqrt{13}$

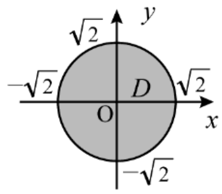
⑷　曲線を C とおくと

$$\int_C (x^2 + y^2 + z)\,ds = \int_{t=0}^{t=2\pi}\left\{(\sqrt{2}\cos t)^2 + (\sqrt{2}\sin t)^2 + 0^2\right\}\frac{ds}{dt}\,dt$$

$$\left(\frac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)|\sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2 + (\sqrt{2}\cos)^2 + 0^2} = \sqrt{2}\qquad (\leftarrow \text{p.9 } \boxed{5}\ \text{(ii)})\right)$$

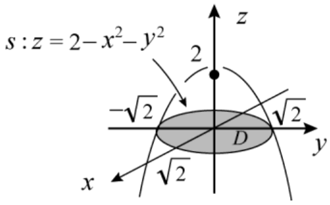
$$= 2\sqrt{2}\Big[\,t\,\Big]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\pi$$

⑸ 曲面を S とおくと p.15 $\boxed{12}$ より



$$\int_S (x^2+y^2+z)\,dS$$

$$=\iint_D (x^2+y^2+2-x^2-y^2)\cdot\sqrt{(-2x)^2+(2y)^2+1}\;dx\,dy$$



$$\left(\begin{array}{l} D \text{ は円 } x^2+y^2=2 \text{ の周と内部なので極座標表示すると} \\ x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\right.$$

$$(0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ \ 0\leqq r\leqq 2\pi)$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=\sqrt{2}} 2\cdot\sqrt{4r^2\cos^2\theta+4r^2\cos^2\theta+1}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=\sqrt{2}} 2\sqrt{4r^2+1}\;r\,dr\,d\theta$$

$$\left(\begin{array}{l} 4r^2+1=t \text{ とおくと} \\ 8r\,dr=dt \end{array}\right.\qquad \begin{array}{c|l} r & 0\to\sqrt{2} \\ \hline t & 1\to 9 \end{array}$$

$$=2\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{t=1}^{t=9}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{8}\,dt\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{t=1}^{t=9}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(9^{\frac{3}{2}}-1\right)d\theta=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(26\cdot 2\pi)=\frac{26}{3}\pi$$

⑹ $$\int_V (x^2+y^2+z)\,dV$$

$$=\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=-1}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(x^2+y^2+z)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=-1}^{y=1}\left[(x^2+y^2)z+\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1}dy\,dx$$

$$=\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=-1}^{y=1}\left\{(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\right\}dy\,dx$$

$$=\int_{x=-1}^{x=1}2\left[\left(x^2+\frac{1}{2}\right)y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1}dx$$

$$=4\int_{x=0}^{x=1}\left(x^2+\frac{5}{6}\right)dx=4\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{6}x\right]_0^1=\frac{14}{3}$$

5

⑴ $\displaystyle\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\,dV = \int_V (x+y+z)\,dV$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x}\left[\,(x+y)z+\frac{1}{2}z^2\,\right]_{z=0}^{z=1-x-y}dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x}\left\{(x+y)(1-x-y)+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right\}dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x}(1-x-y)\left\{(x+y)+\frac{1-x-y}{2}\right\}dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x}\frac{1}{2}\left\{1-(x+y)^2\right\}dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}\left[\,y-\frac{1}{3}(x+y)^3\,\right]_{y=0}^{y=1-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\left\{(1-x)-\frac{1}{3}\right\}-\left(-\frac{1}{3}x^3\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\,\frac{2}{3}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}\,\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

⑵

(i)

D_1は$\boldsymbol{r}(u,\ v)=(u,\ v,\ 0)$（$0\leqq u\leqq 1,\ 0\leqq v\leqq 1-u$）と表せるので

$\boldsymbol{r}_u=(1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{r}_v=(0,\ 1,\ 0)$, より $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=(0,\ 0,\ 1)$ であり

p.16 $\boxed{13}$ より

$$\int_{D_1}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{D_1}\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u}(xy+z,\ \ yz+x,\ \ zx+y)\cdot(0,\ 0,\ 1)\,dv\,du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u}(0\cdot u+v)\,dv\,du \qquad ㋐$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\left[\,\frac{1}{2}v^2\,\right]_{v=0}^{v=1-u}du = \frac{1}{2}\int_0^1(1-u)^2\,du = \frac{1}{2}\left[\,\frac{-1}{3}(1-u)^2\,\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

(ii)

D_2 は $\boldsymbol{r}(u,\ v)=(u,\ 0,\ v)$ $(0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1-u)$ と表せるので

$\boldsymbol{r}_u=(1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{r}_v=(0,\ 0,\ 1)$, より $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v=(0,\ 1,\ 0)$ であり

p.16 $\boxed{13}$ より

$$\int_{D_2} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \iint_{D_2} \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (xy+z,\ \ yz+x,\ \ zx+y)\cdot(0,\ 1,\ 0)\, dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (0\cdot v+u)\, dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} u(1-u)\, du = \left[\ \frac{1}{2}u - \frac{1}{3}u^3\ \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

(iii)

D_3 は $\boldsymbol{r}(u,\ v)=(0,\ u,\ v)$ $(0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1-u)$ と表せるので

$\boldsymbol{r}_u=(0,\ 1,\ 0)$, $\boldsymbol{r}_v=(0,\ 0,\ 1)$, より $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v=(1,\ 0,\ 0)$ であり

p.16 $\boxed{13}$ より

$$\int_{D_3} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \iint_{D_3} \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (xy+z,\ \ yz+x,\ \ zx+y)\cdot(1,\ 0,\ 0)\, dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (0\cdot u+v)\, dv\, du$$

$$= \frac{1}{6}$$ （㋐ 以下の計算より）

(iv)

D_4 は $\boldsymbol{r}(u,\ v)=(u,\ v,\ 1-u-v)\ (0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1-u)$ と表せるので

$\boldsymbol{r}_u=(1,\ 0,\ -1)$, $\boldsymbol{r}_v=(0,\ 1,\ -1)$, より $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v=(1,\ 1,\ 1)$ であり

p.16 $\boxed{13}$ より

$$\int_{D_4} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\ dS = \iint_{D_4} \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=0}^{v=1-u} (xy+z,\ yz+x,\ zx+y) \cdot (1,\ 1,\ 1)\, dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=0}^{v=1-u} \{uv+(1-u-v)+v(1-u-v)+u+(1-u-v)u+v\}\ dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=0}^{v=1-u} \{(1-u-v)(1+u+v)+uv+u+v\}\ dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=0}^{v=1-u} (1-u^2-v^2-2uv+uv+u+v)\ dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} \left[\ -\frac{1}{3}v^3 - u \cdot \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 + (-u^2u+1)\ v\ \right]_{v=0}^{v=1-u} du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} \left\{ -\frac{1}{3}(1-u)^3 + \frac{1}{2}(1-u)^3 + (-u^2u+1)(1-u) \right\} du$$

$$= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{6}(u-1)^3 + 1 - 2u^2 + u^3 \right\} du$$

$$= \left[\ \frac{-1}{24}(u-1)^4 + u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4\ \right]_0^1 = \frac{5}{8}$$

(3) $S = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$ であるが各面の法線ベクトルを立体の外向きにして計算を行うと

$$\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\ dS = \frac{-1}{6} + \frac{-1}{6} + \frac{-1}{6} + \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$$

一方，重要な別解として

（別解）p.20 $\boxed{3}$ ガウスの発散定理を用いて

$$\int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\ dS = \int_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{f}\ dV = \frac{1}{8} \qquad \text{((1)の解答より)}$$

⑷　$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy+z & yz+x & zx+y \end{vmatrix} = (1-y,\ 1-z,\ 1-x)$ であり，

⑵の解答より次のことが分かっている。

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{cases} (0,\ 0,\ 1) & (S = D_1) \\ (0,\ 1,\ 0) & (S = D_2) \\ (1,\ 0,\ 0) & (S = D_3) \\ (1,\ 1,\ 1) & (S = D_4) \end{cases}$$

よって

(i)　$\displaystyle\int_{D_1} \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$

$$= \iint_{D_1} \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\ du\,dv$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (1-x)\,dv\,du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (1-u)\,dv\,du \qquad ㋑ \qquad (D_1 \text{は⑵（i）より}\ \ \boldsymbol{r}(u,\ v) = (u,\ v,\ 0))$$

$$= \int_0^1 (1-u)^2\,du = \left[\ \frac{1}{3}(u-1)^3\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(ii)　$\displaystyle\int_{D_2} \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$

$$= \iint_{D_2} \operatorname{rot}\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\ du\,dv$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (1-z)\,dv\,du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (1-v)\ dv\,du \qquad (D_2 \text{は⑵（ii）より}\ \ \boldsymbol{r}(u,\ v) = (u,\ 0,\ v))$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} \left[\ -\frac{1}{2}(1-v)^2\ \right]_{v=0}^{v=1-u}\ du$$

$$= \int_0^1 \left\{-\frac{1}{2}(u^2-1)\right\} du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{3}u^3 - u\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(iii) $\displaystyle\int_{D_3} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$

$$= \iint_{D_3} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\ du\, dv$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (1-y)\, dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (1-u)\, dv\, du \qquad (D_3 \text{ は(2) (iii) より } \boldsymbol{r}(u,\ v) = (0,\ u,\ v))$$

$$= \int_0^1 (1-u)^2\, du = \left[\ \frac{1}{3}(u-1)^3\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(iv) $\displaystyle\int_{D_4} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\ dS$

$$= \iint_{D_4} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} (1-y+1-z+1-x)\, dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} \{1-v+1-(1-u-v)+1-u\}\ dv\, du$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\int_{v=0}^{v=1-u} 2\, dv\, du = \int_0^1 2(1-u)\, du = 1$$

(5) $$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{cases} (1,\ 0,\ 0) & (C_1 \text{ において}) \\ (-1,\ 1,\ 0) & (C_2 \text{ において}) \\ (0,\ -1,\ 0) & (C_3 \text{ において}) \end{cases} \quad \text{であるから}$$

(i) $$\int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t=0}^{t=1} (xy+z,\ yz+x,\ zx+y) \cdot (1,\ 0,\ 0)\, dt$$

$$= \int_0^1 (t \cdot 0 + 0)\ dt = 0$$

(ii) $$\int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t=0}^{t=1} (xy+z,\ yz+x,\ zx+y) \cdot (-1,\ 1,\ 0)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left[\ -\{(1-t)t+0\} + t \cdot 0 + (1-t)\ \right] dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^2\ dt = \left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(iii) $$\int_{C_3} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t=0}^{t=1} (xy+z,\ \ yz+x,\ \ zx+y)\cdot(0,\ -1,\ 0)\,dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)\cdot 0 + 0\ \ dt = 0$$

(6) $S_+ = D_2 + D_3 + D_4$ であるが，各面の法線ベクトルを立体の外向きとして計算すると

$$\int_{S_+} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \frac{-1}{3} + \frac{-1}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

一方，重要な別解として，

（別解） p.20 $\boxed{4}$ ストークスの定理を用い

$$\int_{S_+} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_{C_1+C_2+C_3} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$ （(5)の解答より）