１章　ベクトル解析

３節　ベクトル場

p.40～61　練習・問

練習 1

⑴　$f_x = y^2z^2$，$f_y = x \cdot 2y \cdot z^2$，$f_z = xy^2 \cdot 2z$　より

$\nabla f = (\,yz^2,\ 2xyz^2,\ 2xy^2z\,)$ なので P では

$\nabla f = (1,\ 4,\ 4)$

⑵　$f_x = y^2$，$f_y = x \cdot 2y + z^3$，$f_z = y \cdot 3z^2$　より

$\nabla f = (\,y^2,\ 2xy + z^3,\ 3yz^2\,)$ なので P では

$\nabla f = (1,\ 5,\ 3)$

練習 2

⑴　$\nabla f = (\,f_x,\ f_y,\ f_z\,) = (\,2x,\ 2y,\ -1\,)$

⑵　$x = 1$，$y = 1$，$z = 2$ より $\nabla f = (\,2,\ 2,\ -1\,)$，その大きさ

$|\nabla f| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$　より　$\boldsymbol{n} = \pm\dfrac{1}{3}(\,2,\ 2,\ -1\,)$

⑶　⑵より（2，2，-1）は H の法線ベクトルで H が P(1，1，2) を通るので

$2(\,x-1\,) + 2(\,y-1\,) - (\,z-2\,) = 0$

つまり　$2x + 2y - z = 2$

問 1.

1. 左辺 $=((f+g)_x,\ (f+g)_y,\ (f+g)_z)=(f_x+g_x,\ f_y+g_y,\ f_z+g_z)$

$=(f_x,\ f_y,\ f_z)+(g_x,\ g_y,\ g_z)=\nabla f+\nabla g$

2. 左辺 $=((kf)_x,\ (kf)_y,\ (kf)_z)=(kf_x,\ kf_y,\ kf_z)$

$=k(f_x,\ f_y,\ f_z)=k\,\nabla f$

3. 左辺 $=((fg)_x,\ (fg)_y,\ (fg)_z)=(f_xg+fg_x,\ f_yg+fg_y,\ f_zg+fg_z)$

$=(f_xg,\ f_yg,\ f_zg)+(fg_x,\ fg_y,\ fg_z)=(f_x,\ f_y,\ f_z)g+f(g_x,\ g_y,\ g_z)$

$=(\nabla f)g+f(\nabla g)$

4. 左辺 $=\left(\left(\dfrac{f}{g}\right)_x,\ \left(\dfrac{f}{g}\right)_y,\ \left(\dfrac{f}{g}\right)_z\right)=\left(\dfrac{f_xg-fg_x}{g^2},\ \dfrac{f_yg-fg_y}{g^2},\ \dfrac{f_zg-fg_z}{g^2}\right)$

$=\dfrac{1}{g^2}\left\{(f_xg,\ f_yg,\ f_zg)-(fg_x,\ fg_y,\ fg_z)\right\}$

$=\dfrac{1}{g^2}\left\{(\nabla f)g-f(\nabla g)\right\}$

5. 左辺 $=(\{\varphi(f)\}_x,\ \{\varphi(f)\}_y,\ \{\varphi(f)\}_z)=(\varphi'(f)f_x,\ \varphi'(f)f_y,\ \varphi'(f)f_z)$

$=\varphi'(f)(f_x,\ f_y,\ f_z)$

$=\varphi'(f)(\nabla f)$

練習 3

$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right)=\nabla(f^{-1})=-f^{-2}\nabla f$$

$$=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}(2x,\ 2y,\ 2z)=-\frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}(x,\ y,\ z)$$

練習 4

$\nabla f = (y^2 z - 3,\ 2xyz,\ xy^2 - 2z)$ より P での勾配は $\nabla f = (1,\ -4,\ 2)$ である。よって

⑴ $(\nabla f)\cdot \boldsymbol{e}_1 = (1,\ -4,\ 2)\cdot(1,\ 0,\ 0) = 1$

$(\nabla f)\cdot \boldsymbol{e}_2 = (1,\ -4,\ 2)\cdot(0,\ 1,\ 0) = -4$

$(\nabla f)\cdot \boldsymbol{e}_3 = (1,\ -4,\ 2)\cdot(0,\ 0,\ 1) = 2$

⑵ $(\nabla f)\cdot \boldsymbol{e} = \dfrac{1}{3}(1,\ -4,\ 2)\cdot(-1,\ 2,\ -2)$

$= \dfrac{1}{3}(-1-8-4) = \dfrac{-13}{3}$

練習 5

⑴ $(f_1)_x = 2xz,\ (f_2)_y = 1,\ (f_3)_z = xy$ より

$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 2xz + 1 + xy$ なので 点 P では $\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 6 + 1 + 2 = 9$

⑵ $(f_1)_x = 1,\ (f_2)_y = 2y,\ (f_3)_z = 3z^2$ より

$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 1 + 2y + 3z^2$ なので 点 P では $\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 1 + 4 + 27 = 32$

⑶ $(f_1)_x = 1,\ (f_2)_y = 1,\ (f_3)_z = 1$ より

$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 1 + 1 + 1 = 3$ なので 点 P では $\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 3$

問 2.

1. $\boldsymbol{f}(x,\ y,\ z) = (f_1(x,\ y,\ z),\ f_2(x,\ y,\ z),\ f_3(x,\ y,\ z))$

$\boldsymbol{g}(x,\ y,\ z) = (g_1(x,\ y,\ z),\ g_2(x,\ y,\ z),\ g_3(x,\ y,\ z))$ に対し

与式右辺 $= (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z + (g_1)_x + (g_2)_y + (g_3)_z$

$= (f_1 + g_1)_x + (f_2 + g_2)_y + (f_3 + g_3)_z =$ 与式左辺

2. 与式右辺 $= k\left\{(f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z\right\} = (kf_1)_x + (kf_2)_y + (kf_3)_z =$ 与式左辺

3. 与式左辺 $= (\varphi f_1)_x + (\varphi f_2)_y + (\varphi f_3)_z = \varphi_x f_1 + \varphi(f_1)_x + \varphi_y f_2 + \varphi(f_2)_y + \varphi_z f_3 + \varphi(f_3)_z$

$= \varphi_x f_1 + \varphi_y f_2 + \varphi_z f_3 + \varphi(f_1)_x + \varphi(f_2)_y + \varphi(f_3)_z$

$= (\varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_z)\cdot(f_1,\ f_2,\ f_3) + \varphi\left\{(f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z\right\} =$ 与式右辺

練習 6

⑴ $\nabla\cdot(\varphi \boldsymbol{f})=(yz,\ xz,\ xy)\cdot(xy,\ yz,\ zx)+xyz(y+z+x)$

$$=xy^2z+xyz^2+x^2yz+xy^2z+xyz^2+x^2yz$$

$$=2xyz(x+y+z)$$

⑵ $\nabla\cdot(\varphi \boldsymbol{f})=\nabla\cdot(x^2y^2z,\ xy^2z^2,\ x^2yz^2)=2xy^2z+2xyz^2+2x^2yz=2xyz(x+y+z)$

練習 7

⑴ $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & y & xyz \end{vmatrix}=(xz-0)\boldsymbol{e}_1-(yz-x^2)\boldsymbol{e}_2+(0-0)\boldsymbol{e}_3$

$=(xz,\ -yz+x^2,\ 0)$ より点Ｐでは $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}=(3,\ -6+1,\ 0)=(3,\ -5,\ 0)$

⑵ $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y^2 & z^3 \end{vmatrix}=(0-0)\boldsymbol{e}_1-(0-0)\boldsymbol{e}_2+(0-0)\boldsymbol{e}_3=(0,\ 0,\ 0)$ より

点Ｐにおいても $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}=(0,\ 0,\ 0)$

問 3.

1. 右辺 $=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1+g_1 & f_2+g_2 & f_3+g_3 \end{vmatrix}=$ 左辺

2. 左辺 $=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ kf_1 & kf_2 & kf_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}=$ 右辺

3.　左辺 $= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi f_1 & \varphi f_2 & \varphi f_3 \end{vmatrix}$

$$= ((\varphi f_3)_y - (\varphi f_2)_z,\ -(\varphi f_3)_x + (\varphi f_1)_z,\ (\varphi f_2)_x - (\varphi f_1)_y)$$

$$= (\varphi_y f_3 + \varphi(f_3)_y - \varphi_z f_2 - \varphi(f_2)_z,$$
$$\quad -\varphi_x f_3 - \varphi(f_3)_x + \varphi_z f_1 + \varphi(f_1)_z,\ \varphi_x f_2 + \varphi(f_2)_x - \varphi_y f_1 - (\varphi f_1)_y)$$

$$= (\varphi_y f_3 - \varphi_z f_2,\ -\varphi_x f_3 + \varphi_z f_1,\ \varphi_x f_2 - \varphi_y f_1)$$
$$\quad + (\varphi(f_3)_y - \varphi(f_2)_z,$$
$$\quad -\varphi(f_3)_x + \varphi(f_1)_z,\ \varphi(f_2)_x - \varphi(f_1)_y)$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} + \varphi \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \text{右辺}$$

練習 8

$$\nabla(\varphi \boldsymbol{f}) = (yz,\ xz,\ xy) \times (xy,\ yz,\ zx) + xyz(0 - y,\ -z + 0,\ 0 - x)$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ yz & xz & xy \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} - (xy^2z,\ xyz^2,\ x^2yz)$$

$$= (x^2z^2 - 2xy^2z,\ -2xyz^2 + x^2y^2,\ y^2z^2 - 2x^2yz)$$

問 4.

$\boldsymbol{f}(x,\ y,\ z) = (f_1(x,\ y,\ z),\ f_2(x,\ y,\ z),\ f_3(x,\ y,\ z))$

$\boldsymbol{g}(x,\ y,\ z) = (g_1(x,\ y,\ z),\ g_2(x,\ y,\ z),\ g_3(x,\ y,\ z))$ とすると

$$(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} = g_1\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} + g_2\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y} + g_3\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z} \qquad ㋐$$

$$(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} = f_1\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x} + f_2\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y} + f_3\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial z} \qquad ㋑$$

$$\nabla\times\boldsymbol{g} = ((g_3)_y - (g_2)_z,\ -(g_3)_x + (g_1)_z,\ (g_2)_x - (g_1)_y) \qquad ㋒$$

$$\nabla\times\boldsymbol{f} = ((f_3)_y - (f_2)_z,\ -(f_3)_x + (f_1)_z,\ (f_2)_x - (f_1)_y) \qquad ㋓$$ より

1 の右辺の x 成分（㋐，㋑，㋒，㋓より）

$$= -\{(-(f_3)_x + (f_1)_z)g_3 - ((f_2)_x - (f_1)_y)g_2\} + f_2((g_2)_x - (g_1)_y) - f_3(-(g_3)_x + (g_1)_z)$$

$$+ g_1(f_1)_x + g_2(f_1)_y + g_3(f_1)_z + f_1(g_1)_x + f_2(g_1)_y + f_3(g_1)_z$$

$$= (f_1)_x g_1 + f_1(g_1)_x + (f_2)_x g_2 + f_2(g_2)_x + (f_3)_x g_3 + f_3(g_3)_x$$

$$= (f_1 g_1)_x + (f_2 g_2)_x + (f_3 g_3)_x$$

$=\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})$ の x 成分

y 成分，z 成分も同様に示せる。

2 の右辺　（㋒，㋓より）

$$= \{(f_3)_y - (f_2)_z\}g_1 + \{-(f_3)_x + (f_1)_z\}g_2 + \{(f_2)_x - (f_1)_y\}g_3$$

$$- f_1\{(g_3)_y - (g_2)_z\} - f_2\{-(g_3)_x + (g_1)_z\} - f_3\{(g_2)_x - (g_1)_y\}$$

$$= (f_2)_x g_3 + f_2(g_3)_x - (f_3)_x g_2 - f_3(g_2)_x$$

$$- f_1(g_3)_y - (f_1)_y g_3 + (f_3)_y g_1 + f_3(g_1)_y$$

$$+ (f_1)_z g_2 + f_1(g_2)_z - (f_2)_z g_1 - f_2(g_1)_z$$

$$= (f_2 g_3)_x - (f_3 g_2)_x - (f_1 g_3)_y + (f_3 g_1)_y + (f_1 g_2)_z - (f_2 g_1)_z$$

$$= (f_2 g_3 - f_3 g_2)_x - (f_1 g_3 - f_3 g_1)_y + (f_1 g_2 - f_2 g_1)_z$$

$$= \mathrm{div}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})$$

3 の右辺の x 成分

$$= -\{(f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z\}g_1 + f_1\{(g_1)_x + (g_2)_y + (g_3)_z\}$$

$$+ g_1(f_1)_x + g_2(f_1)_y + g_3(f_1)_z - f_1(g_1)_x - f_2(g_1)_y - f_3(g_1)_z$$

$$= g_2(f_1)_y + f_1(g_2)_y + g_3(f_1)_z + f_1(g_3)_z - f_2(g_1)_y - g_1(f_2)_y - f_3(g_1)_z - g_1(f_3)_z \qquad ㋔$$

一方　3 の左辺の x 成分は

$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g} = (f_2 g_3 - f_3 g_2,\ -(f_1 g_3 - f_3 g_1),\ f_1 g_2 - f_2 g_1)$ より $\{f_1 g_2 - f_2 g_1\}_y - \{-(f_1 g_3 - f_3 g_1)\}_y$

$$= (f_1)_y g_2 + f_1(g_2)_y - (f_2)_y g_1 - f_2(g_1)_y + (f_1)_z g_3 + f_1(g_3)_z - (f_3)_z g_1 - f_3(g_1)_z \qquad ㋕$$

㋔　㋕より左右両辺の x 成分は等しい。

y 成分，z 成分も同様に示せる。

問 5.　$\boldsymbol{f}=(f_1(x,\ y,\ z),\ f_2(x,\ y,\ z),\ f_3(x,\ y,\ z))$ とする。

1. 与式左辺 $=\nabla\times(f_x,\ f_y,\ f_z)=(f_{zy}-f_{yz},\ -f_{zx}+f_{xz},\ f_{yx}-f_{xy})=(0,\ 0,\ 0)$

2. 与式左辺 $=\nabla\cdot((f_3)_y-(f_2)_z,\ -(f_3)_x+(f_1)_z,\ (f_2)_x-(f_1)_y)$
$=(f_3)_{yx}-(f_2)_{zx}-(f_3)_{xy}+(f_1)_{zy}+(f_2)_{xz}-(f_1)_{yz}=0$

3. 与式右辺の x 成分 $=(\nabla\cdot\boldsymbol{f})_x-\{(f_1)_{xx}+(f_1)_{yy}+(f_1)_{zz}\}$
$=\{(f_1)_x+(f_2)_y+(f_3)_z\}_x-(f_1)_{xx}-(f_1)_{yy}-(f_1)_{zz}$
$=(f_2)_{yx}+(f_3)_{zx}-(f_1)_{yy}-(f_1)_{zz}$
一方左辺 $=\nabla\times((f_3)_y-(f_2)_z,\ -(f_3)_x+(f_1)_z,\ (f_2)_x-(f_1)_y)$ なので
与式左辺の x 成分 $=(f_2)_{xy}-(f_1)_{yy}-(-(f_3)_{xz}+(f_1)_{zz})=(f_2)_{xy}+(f_3)_{xz}-(f_1)_{yy}-(f_1)_{zz}$
y 成分，z 成分も同様に示せる。

練習 9

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$$ より

$$\int_{c_2}(x^2+y^2+z)\,ds=\int_0^{2\pi}(1^2+0^2+t)\cdot 1\,dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^{2\pi}=2\pi+\frac{1}{2}\cdot 4\pi^2$$
$$=2\pi(1+\pi)$$

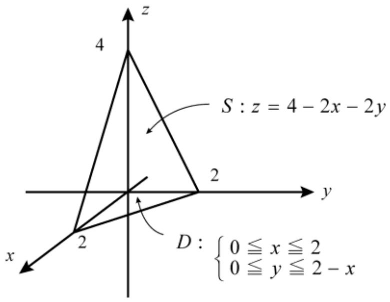
練習 10

$$\boldsymbol{r}'(t)=\left(1,\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$$ より

$$\int_{c_2}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}'\,dt$$
$$=\int_0^1\left(t^2,\ \frac{2}{3}t,\ t\right)\cdot\left(1,\ 1,\ \frac{2}{3}\right)dt$$
$$=\int_0^1\left(t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}t\right)dt=\int_0^1\left(t^2+\frac{4}{3}t\right)dt$$
$$=\left[\frac{t}{3}^3+\frac{2}{3}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

練習 11

$\boldsymbol{r}_x = (1,\ 0,\ -2),\ \boldsymbol{r}_y = (0,\ 1,\ -2)$ より



$|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y| = |(2,\ 2,\ 1)| = \sqrt{4+4+1} = 3$

(p.59 ⑧′ 式を使えば $\sqrt{\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2 + 1} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1} = 3$)

$$\iint_D f(x,\ y,\ z)\,|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|\,dx\,dy = \iint_D (3x + 2y + z)\cdot 3\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (3x + 2y + 4 - 2x - 2y)\,dx\,dy$$

$$= 3\int_0^2 \left\{ \int_0^{2-x} (x+4)\,dy \right\} dx = 3\int_0^2 \Big[(x+4)y \Big]_{y=0}^{y=2-x} dx$$

$$= -3\int_0^2 (x^2 + 2x - 8)\,dx = 28$$

面積は $\displaystyle\iint_D |\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|\,dx\,dy = \iint_D 3\,dx\,dy = 3\int_0^2 \Big[y \Big]_{y=0}^{y=2-x} dx = 3\int_0^2 2 - x\ dx = 12$

練習 12

$\boldsymbol{r}_u = (1,\ 0,\ -1),\ \boldsymbol{r}_v = (0,\ 1,\ 0)$ より $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (1,\ 0,\ 1)$ なので

$\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) = 2x + y + z = 2u + v + 1 - u = u + v + 1$

よって

$$\int_S \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1\int_0^1 (u + v + 1)\,du\,dv \qquad \text{(p.60 ⑨式より)}$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}u^2 + (v+1)u \right]_0^1 dv$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} + v\,dv = \left[\frac{3}{2}v + \frac{1}{2}v^2 \right]_0^1 = 2$$