1 章　ベクトル解析

1 節　ベクトルの演算

p.18　節末問題

1.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ -1,\ -2)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{6}$

よって　$\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -1,\ -2)$

$(1,\ -1,\ -2)\cdot(1,\ 1,\ 0)$となるから　$(1,\ 1,\ 0)$は$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$に垂直。

$|(1,\ 1,\ 0)| = \sqrt{2}$　より　$\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0)$

2.

⑴，⑵

底辺を$|\boldsymbol{b}|$とすると高さは $|\boldsymbol{a}|\sin\theta$で

$$S^2 = (|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\theta)^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \text{ ㋐}$$
$$= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = \text{⑵式右辺}$$

また，㋐より⑴式が出る。

⑶　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 1,\ 2) = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2,\ 0,\ 3) = \boldsymbol{b}$　とおくと　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 1^2+1^2+2^2 = 6$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2+0+6 = 8$

よって　$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = 8$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 4+0+9 = 13$

⑵より $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のなす平行四辺形の面積 S について　$S^2 = 6\times13-8^2 = 14$

つまり　$S = \sqrt{14}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

3.

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 0,\ 3)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

$$=(1\times3-2\times0)\boldsymbol{e}_1-(1\times3-2\times2)\boldsymbol{e}_2+(1\times0-1\times2)\boldsymbol{e}_3$$

$$=(3,\ 1,\ -2)$$

⑵ $S=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|(3,\ 1,\ -2)|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

4.

⑴ $$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

$$=(2\times4-2\times3)\boldsymbol{e}_1-(1\times4-2\times2)\boldsymbol{e}_2+(1\times3-2\times2)\boldsymbol{e}_3$$

$$=(2,\ 0,\ -1)$$

よって　$S=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす平行四辺形の面積。

従って　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

⑵ ⑴より $(2,\ 0,\ -1)$ は△OAB の法線ベクトル。

$|(2,\ 0,\ -1)|=\sqrt{5}$　より　$\boldsymbol{n}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 0,\ -1)$

⑶ A，B，C の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ とおくとスカラー三重積の性質より，
$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ のなす平行六面体の体積 V は

$$V=\left|\,{}^t\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}\,{}^t\boldsymbol{c}\,\right|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=1$$

なので答えは　$1\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$

5.

⑴　左辺$=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{0}=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

⑵　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

⑶　ベクトル三重積の性質より

左辺$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

⑷　ベクトル三重積の性質より

$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$　両辺，$\boldsymbol{a}$ との内積をとり

$\boldsymbol{a}\cdot\{\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})$　㋐

ところがスカラー三重積の性質より　左辺$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$　㋑

㋐ ㋑より与式は正しい。

⑸　⑷より⑸の 左辺$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

$+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$

$+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$

⑹　ベクトル三重積の性質より

左辺$=\{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d}\}\boldsymbol{c}-\{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\}\boldsymbol{d}=\left|{}^t\boldsymbol{d}\,{}^t\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}\right|\boldsymbol{c}-\left|{}^t\boldsymbol{c}\,{}^t\boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}\right|\boldsymbol{d}=$ 右辺