１章　ベクトル解析

２節　ベクトル関数の微分積分

p.40　節末問題

1.　p.21 微分法の公式 5 ～ 7 を使う。

⑴　$(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\cdot\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}' = (2,\ 2,\ 2t)\cdot(2t,\ 3,\ 1-t) + (2t+1,\ 2t,\ t^2)\cdot(2,\ 0,\ -1)$

$= 4t + 6 + 2t - 2t^2 + 4t + 2 - t^2 = -3t^2 + 10t + 8$

⑵　$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\times\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & 2 & 2t \\ 2t & 3 & 1-t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2t+1 & 2t & t^2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= (2-2t-6t,\ -2+2t+4t^2,\ -4t+6) + (-2t,\ 2t+1+2t^2,\ -4t)$

$= (2-10t,\ 6t^2+4t-1,\ 6-8t)$

⑶　$(\varphi\boldsymbol{f})' = \varphi'\boldsymbol{f} + \varphi\boldsymbol{f}'$

$= (2t+1,\ 2t,\ t^2) + (2+2t,\ 2+2t,\ 2t+2t^2)$

$= (4t+3,\ 4t+2,\ 3t^2+2t)$

2.　p.21 微分法の公式 5, 6 を使う。

⑴　$\{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\}' = \boldsymbol{a}'\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})'$　（第2項 $= \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}')$）

$= \boldsymbol{a}'\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}')$

⑵　$\{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\}' = \boldsymbol{a}'\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})'$　（第2項 $= \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}')$）

$= \boldsymbol{a}'\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}')$

3.

⑴ $\boldsymbol{r}'(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{5})$ より　s と t の関係式は p.23　③式より

$$\frac{ds}{dt}=|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2+\sqrt{5}^2}=\sqrt{4+5}=3$$

よって　$\boldsymbol{t}=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\dfrac{1}{3}(-2\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{5})$

一方　$\boldsymbol{t}'(s)=\dfrac{d\boldsymbol{t}(t)}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds}=\boldsymbol{t}'(t)\cdot\dfrac{1}{\frac{ds}{dt}}=\dfrac{1}{3}(-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)\cdot\dfrac{1}{3}$　より

$$\kappa=|\boldsymbol{t}'(s)|=\frac{1}{9}\sqrt{(-2\cos t)^2+(-2\sin t)^2}=\frac{2}{9}\qquad (\leftarrow\text{p.30　③式})$$

⑵ p.29　2 式より

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{t}'(s)}{|\boldsymbol{t}'(s)|}=\frac{1}{\kappa}\times\boldsymbol{t}'(s)=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{9}(-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)=(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

p.32 の $\boldsymbol{b}$ の定義式　⑤より

$$\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -\frac{2}{3}\sin t & \frac{2}{3}\cos t & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\sin t,\ -\frac{\sqrt{5}}{3}\cos t,\ \frac{2}{3}\right)$$ が単位従法線ベクトル。

$$\boldsymbol{b}'(s)=\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\cos t,\ \frac{\sqrt{5}}{3}\sin t,\ 0\right)\cdot\frac{1}{3}=-\tau(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$ とおいて

$\tau=\dfrac{\sqrt{5}}{9}$ が捩率。　（p.34　フルネ-セレーの公式 2 ）

4.

⑴ $|\boldsymbol{v}|=\boldsymbol{r}'(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{5}),\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}''(t)=(-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)$

⑵ $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2+\sqrt{5}^2}=3=v(t)$ が速さなので　p.35　⑪式より　$a_t=v'(t)=0$。

一方　$a_n=\dfrac{\{v(t)\}^2}{\rho}$　だが　$\{v(t)\}^2=3^2=9,\ \rho=\dfrac{1}{\kappa}=\dfrac{9}{2}$ （前問⑴より）なので　$a_n=9\times\dfrac{2}{9}=2$

5.

(1) $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$ より $x^2 = \cos^2 u \cos^2 v$,

$y^2 = \sin^2 u \cos^2 v$ であり $x^2 + y^2 = \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v = \cos^2 v$

一方 $z^2 = \sin^2 v$ なので $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(2) $v = 0$ のとき $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = 0$ なので $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$

$u = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $x = 0$, $y = \cos v$, $z = \sin v$ なので $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$

(3) $\boldsymbol{r}_u = (-\sin u \cos v,\ \cos u \cos v,\ 0)$ より $\boldsymbol{r}_u\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right) = (-1,\ 0,\ 0)$

$\boldsymbol{r}_v = (-\cos u \sin v,\ -\sin u \sin v,\ \cos v)$ より $\boldsymbol{r}_v\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right) = (0,\ 0,\ 1)$

(4) $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (0\times 1 - 0\times 0,\ -(-1\times 1 - 0\times 0),\ -1\times 0 - 0\times 0) = (0,\ 1,\ 0)$ より $(0,\ \pm 1,\ 0)$

6.

(1) p.38 部分積分の公式 3 より

$$与式 = \Big[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\Big]_0^1 - \int_0^1 \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}\,dt$$

$$= (0,\ 1,\ 2)\cdot(1,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ 0)\cdot(0,\ 0,\ 0) - \int_0^1 (0,\ 0,\ 2)\cdot(t^3,\ t^4,\ t)\,dt$$

$$= 1 + 2 - \int_0^1 2t\,dt$$

$$= 3 - \Big[t^2\Big]_0^1 = 2$$

(2) p.38 部分積分の公式 4 より

$$与式 = \Big[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\Big]_0^1 - \int_0^1 \boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}\,dt = \left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 1 & 2t \\ t^3 & t^4 & t \end{vmatrix}\right]_0^1 - \int_0^1 \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 0 & 2 \\ t^3 & t^4 & t \end{vmatrix} dt$$

$$= (-1,\ 2,\ -1) - \int_0^1 (-2t^4,\ 2t^3,\ 0)\,dt$$

$$= (-1,\ 2,\ -1) - \left[\left(-\frac{2}{5}t^5,\ \frac{1}{2}t^4,\ 0\right)\right]_0^1 = \left(-\frac{3}{5},\ \frac{3}{2},\ -1\right)$$