第４章 １節 フーリエ級数

【練習１】 $f(x+T)=f(x)$，$g(x+T)=g(x)$ より $af(x+T)+bg(x+T)=af(x)+bg(x)$ が成り立つから，$af(x)+bg(x)$ も周期 T の周期関数である．

【練習２】 $f(x+T)=f(x)$，$g(x+T)=g(x)$ より $f(x+T)\cdot g(x+T)=f(x)\cdot g(x)$ が成り立つから，$f(x)\cdot g(x)$ も周期 T の周期関数である．

【練習３】 $f(x+2\pi)=C=f(x)$ であるから，周期 2π の周期関数でもある．

【練習４】
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\cos kx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+k)x+\cos(n-k)x)\ dx$$
$$=\begin{cases}0 & (n\neq k)\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(2n)x+1)\ dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx=\Big[x\Big]_0^{\pi}=\pi & (n=k)\end{cases}$$
$$=\pi\delta_{nk}$$

【練習５】 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$g(x)=\dfrac{c_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$，

$f(x)+g(x)=\dfrac{\alpha_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$，と展開できたとすると，フーリエ係数の定義から

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx$$
$$=a_n+c_n.$$

同様に $\beta_n=b_n+d_n$ となる．よって

$$f(x)+g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$$
$$=\frac{a_0+c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+c_n)\cos nx+(b_n+d_n)\sin nx\}$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

これは $f(x)+g(x)$ のフーリエ級数が $f(x)$ のフーリエ級数と $g(x)$ のフーリエ級数の和であることを示している．

【練習６】 $f(x)$ は奇関数と考えることができるから $a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}\cos nx\Big]_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}(-\cos n\pi+\cos 0)=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$\boldsymbol{f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin nx}$$

【練習７】 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2}$

$n\neq 0$ のとき

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx=\frac{1}{\pi}\left(\Big[x\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\Big[x\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\Big[\frac{\cos nx}{n^2}\Big]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{1}{n^2\pi}((-1)^n-1)$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'dx=\frac{1}{\pi}\left(\Big[-x\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\Big[-x\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\Big[\frac{\sin nx}{n^2}\Big]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(-\pi)\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\boldsymbol{f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)}$$

【練習 8】 $f(x)$ は奇関数と考えることができるから，フーリエ正弦展開を求めればよい．

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx = \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx = \left[-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}$$

【練習 9】 $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$

$n \neq 0$ のとき

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)'\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{in}xe^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{in}e^{-inx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{in}xe^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{1}{(in)^2}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{in}\pi e^{-in\pi} + \frac{1}{in}(-\pi)e^{in\pi} + \frac{1}{n^2}e^{-in\pi} - \frac{1}{n^2}e^{in\pi}\right)$$

ここで，$e^{\pm in\pi} = (-1)^n$ であるから

$$c_n = -\frac{1}{in}(-1)^n = \frac{i}{n}(-1)^n$$

$$\boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}(-1)^n e^{inx}}$$

【練習 10】 $\lambda > 0$ ならば $X''(x) = \lambda X(x)$ の一般解は A, B を定数として $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ となるが，$X(0) = 0$ より $A + B = 0$ また，$X(1) = 0$ より $Ae^{\sqrt{\lambda}} + Be^{-\sqrt{\lambda}} = 0$ であるので $A = 0 = B$ となり，結局 $X(x) = 0$.

$\lambda = 0$ ならば $X''(x) = \lambda X(x) \Longrightarrow X''(x) = 0$，したがって，一般解は A，B を定数として $X(x) = A + Bx$ となるが，$X(0) = 0$ より $A = 0$ また，$X(1) = 0$ より $A + B = 0$ であるので $A = 0 = B$ となり，結局 $X(x) = 0$.

節末問題

1

(1) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx + \int_0^{\pi}3\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi + 3\pi\right) = 4 \quad\Longrightarrow\quad \frac{a_0}{2} = 2$

$n \neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx + \int_0^{\pi}3\cos nx\,dx\right) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \int_0^{\pi}3\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x) \sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx}$$

(2) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{(2\pi)^3}{3} = \dfrac{8}{3}\pi^2 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{4}{3}\pi^2$

$n \neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x^2\sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\left(\frac{\cos nx}{n}\right)' dx = \frac{2}{n\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)\right)$$

$$= -\frac{4}{n}\pi$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\pi\sin nx}$$

(3) $a_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^{L} x\,dx = \dfrac{2}{L}\cdot\dfrac{L^2}{2} = L \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{L}{2}$

$n \neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\left(\left[\frac{L}{n\pi}x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^{L} - \frac{L}{n\pi}\int_0^{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^{L} = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2(\cos n\pi - 1) = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

(4) $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} e^x\,dx = \dfrac{1}{L}\Big[e^x\Big]_{-L}^{L} = \dfrac{e^L - e^{-L}}{L} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{e^L - e^{-L}}{2L}$

$n \neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} e^x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

ここで，$\displaystyle\int e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2}\left(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx\right)$ を用いると

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\left(e^x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{n\pi}{L}e^x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{L}{L^2+(n\pi)^2}\left(e^L\cos n\pi - e^{-L}\cos(-n\pi)\right) = \frac{L}{L^2+(n\pi)^2}(e^L - e^{-L})(-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} e^x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

ここで，$\displaystyle\int e^{ax}\sin bx = \frac{1}{a^2+b^2}\left(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx\right)$ を用いると

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\left(e^x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \frac{n\pi}{L}e^x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{L}{L^2+(n\pi)^2}\left(-\frac{n\pi}{L}e^L\cos n\pi + \frac{n\pi}{L}e^{-L}\cos(-n\pi)\right) = \frac{n\pi}{L^2+(n\pi)^2}(e^L - e^{-L})(-1)^{n+1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{e^L - e^{-L}}{2L} + \sum_{n=1}^{\infty} L(e^L - e^{-L}) \frac{(-1)^n}{L^2 + (n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi(e^L - e^{-L}) \frac{n(-1)^{n+1}}{L^2 + (n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$

2

(1) $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)(\cos nx)'\,dx$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\left[\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos nx\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) = \frac{2}{n\pi}\left(\frac{\pi}{4}\cos n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{\pi}{4}(\cos n\pi + 1) = \frac{1}{2n}(1 + (-1)^n)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}(1 + (-1)^n)\sin nx}$$

(2) $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x^2\cos nx\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos nx\,dx\right)$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} - \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3}\Big[\cos nx\Big]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1)\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1)\right\}\sin nx}$$

3

(1) $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right]_0^\pi = 0$

$n \neq 0$ のとき

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)(\sin nx)'\,dx$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin nx\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right) = \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n^2\pi}(1 - (-1)^n)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}(1 - (-1)^n)\cos nx}$$

(2) $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos 2x\Big]_0^\pi = 0$

$n \neq 0$ のとき

n が偶数，すなわち $n = 2k$ の場合：

$a_{2k} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin 2x\,\cos 2kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(\sin 2(k+1)x + \sin 2(1-k)x\big)\,dx = 0$

n が奇数，すなわち $n = 2k+1$ の場合：

$a_{2k+1} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin 2x\,\cos(2k+1)x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(\sin(2k+3)x + \sin(1-2k)x\big)\,dx$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2k+3}\cos(2k+3)x + \frac{1}{1-2k}\cos(1-2k)x\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2k+3} + \frac{2}{1-2k}\right)$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k+3)(1-2k)} = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{2^2 - (2k+1)^2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^2 - (2k+1)^2}\cos(2k+1)x}$$

4

(1) $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi)\,dx\right) = 0$

$n \neq 0$ のとき

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-\pi)e^{-inx}\,dx + \int_{0}^{\pi}\pi e^{-inx}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{in}e^{-inx}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{in}(1-e^{in\pi}) - \frac{1}{in}(e^{-in\pi}-1)\right) = \frac{1}{in}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{i}{n}\left((-1)^n-1\right)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i}{n}\left((-1)^n-1\right)e^{inx}}$$

(2) $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot\pi = \dfrac{\pi}{2}$

$n \neq 0$ のとき

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\big(\cos nx - i\sin nx\big)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\big((-1)^n-1\big)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi}\big((-1)^n-1\big)e^{inx}}$$

第４章 ２節 フーリエ変換

【練習 1】　$k=0$ のとき $F(0) = \displaystyle\int_{-a}^{a}dx = 2a,$

$k \neq 0$ のとき

$$F(k) = \int_{-a}^{a}1\cdot e^{-ikx}\,dx = \left[\frac{1}{-ik}e^{-ikx}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{ik}(e^{ika}-e^{-ika}) = \boldsymbol{\frac{2}{k}\sin ka}$$

であるが，この結果は $\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{2}{k}\sin ka = 2a$ より $k=0$ の場合も含む.

【練習 2】　$f(x)$，$f'(x)$ の条件から $\mathcal{F}[f''(x)] = ik\mathcal{F}[f'(x)] = (ik)^2\mathcal{F}[f(x)]$

【練習 3】　$F(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}\,dx$ の両辺を k で微分すればよい.

【練習 4】　【例題 6】から

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}e^{-ikx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{k^2}{4a}}$ であり，文字 x と k を入れ替えて複素共役をとると

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ak^2}e^{ikx}\,dk = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{x^2}{4a}}$ となるので

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha k^2}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha k^2}e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}}$$

【練習 5】　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(-x)\,dx$ において $-x=t$ と変換すると

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)\delta(t)\,dt = f(-0) = f(0)$ となる．これは $\delta(-x) = \delta(x)$ を意味している.

【練習 6】 $E(x,\,t)=\dfrac{1}{\sqrt{4\kappa^2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}=\dfrac{1}{\sqrt{4\kappa^2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}$ より

$$E_t(x,\,t)=\frac{1}{\sqrt{4\kappa^2\pi}}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}+t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}\frac{x^2}{4\kappa^2t^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\kappa^2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}\left(-\frac{1}{2t}+\frac{x^2}{4\kappa^2t^2}\right)$$

$E_x(x,\,t)=\dfrac{1}{\sqrt{4\kappa^2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}\left(-\dfrac{x}{2\kappa^2t}\right)$ より

$$\kappa^2E_{xx}(x,\,t)=\frac{\kappa^2}{\sqrt{4\kappa^2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}\left(-\frac{x}{2\kappa^2t}\right)^2+e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}\left(-\frac{1}{2\kappa^2t}\right)\right)$$
$$=\frac{\kappa^2}{\sqrt{4\kappa^2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}\left(\frac{x^2}{4\kappa^4t^2}-\frac{1}{2\kappa^2t}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\kappa^2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}\left(\frac{x^2}{4\kappa^2t^2}-\frac{1}{2t}\right)$$

したがって $E_t(x,\,t)=\kappa^2E_{xx}(x,\,t)$

節末問題

1

(1) $f(x)$ は奇関数と考えることができることに注意する．

$k=0\Longrightarrow F(0)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$

$k\neq 0$ のとき

$$F(k)=\int_{-1}^{1}f(x)e^{-ikx}\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\left(\cos kx-i\sin kx\right)\,dx=-2i\int_0^1\sin kx\,dx$$
$$=2i\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_0^1=2i\frac{\cos k-1}{k}$$

であるが $\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{\cos k-1}{k}=0$ であるので，これは $k=0$ の場合も含むことを意味する．

$\therefore\quad \boldsymbol{F(k)=\mathcal{F}[f(x)]=2i\dfrac{\cos k-1}{k}}$

(2) $f(x)$ は偶関数と考えることができることに注意する．

$k=0\Longrightarrow F(0)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=1$

$k\neq 0$ のとき

$$F(k)=\int_{-1}^{1}f(x)e^{-ikx}\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\left(\cos kx-i\sin kx\right)\,dx=2\int_0^1 f(x)\cos kx\,dx$$
$$=2\int_0^1(1-x)\cos kx\,dx=2\left(\left[(1-x)\frac{\sin kx}{k}\right]_0^1+\int_0^1\frac{\sin kx}{k}\,dx\right)=2\int_0^1\frac{\sin kx}{k}\,dx$$
$$=2\left[-\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^1=\frac{2}{k^2}(1-\cos k)$$

であるが $\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{2(1-\cos k)}{k^2}=1$ であるので，これは $k=0$ の場合も含むことを意味する．

$\therefore\quad \boldsymbol{F(k)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{2}{k^2}(1-\cos k)}$

(3) $F(k)=\int_{-1}^{1} f(x)e^{-ikx}\,dx=\int_{-1}^{1}\sin x\,(\cos kx-i\sin kx)\;dx=-2i\int_{0}^{1}\sin x\,\sin kx\,dx$

$$=i\int_0^1\big(\cos(k+1)x-\cos(1-k)x\big)\,dx$$

ここで $k\neq\pm1$ なら

$$=i\left[\frac{1}{k+1}\sin(k+1)x-\frac{1}{1-k}\sin(1-k)x\right]_0^1=i\left(\frac{\sin(k+1)}{k+1}-\frac{\sin(1-k)}{1-k}\right)$$

で，$\displaystyle\lim_{k\to\pm1} i\left(\frac{\sin(k+1)}{k+1}-\frac{\sin(1-k)}{1-k}\right)=\pm i\left(\frac{\sin 2}{2}-1\right)$ となり，一方

$\displaystyle F(\pm1)=\int_{-1}^{1} f(x)e^{\mp ix}\,dx=\mp2i\int_0^1\sin^2 x\,dx=\pm i\left(\frac{\sin 2}{2}-1\right)$ であるから

$$\therefore\quad \boldsymbol{F(k)=\mathcal{F}[f(x)]=i\left(\frac{\sin(k+1)}{k+1}-\frac{\sin(1-k)}{1-k}\right)}$$

(4) $k=0\Longrightarrow F(0)=\displaystyle\int_{-1}^{1}x\,dx=0$

$k\neq0$ のとき

$$F(k)=\int_{-1}^{1}xe^{-ikx}\,dx=\int_{-1}^{1}x\,(\cos kx-i\sin kx)\;dx=-2i\int_0^1 x\sin kx\,dx$$

$$=-2i\left[-\frac{1}{k}x\cos kx+\frac{1}{k^2}\sin kx\right]_0^1=-2i\left(\frac{1}{k^2}\sin k-\frac{1}{k}\cos k\right)=2i\frac{k\cos k-\sin k}{k^2}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{k\to0}2i\frac{k\cos k-\sin k}{k^2}=0$ であるので $k=0$ の場合も含むことを意味する.

$$\therefore\quad \boldsymbol{F(k)=\mathcal{F}[f(x)]=2i\frac{k\cos k-\sin k}{k^2}}$$

(5) $\displaystyle F(k)=\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{-ikx}\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-(1+ik)x}\,dx=\left[-\frac{1}{1+ik}e^{-(1+ik)x}\right]_0^{\infty}$

$$=\frac{1}{1+ik}=\frac{1-ik}{1+k^2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{F(k)=\mathcal{F}[f(x)]=\frac{1-ik}{1+k^2}}$$

2

(1) ガウス関数のフーリエ変換は $\mathcal{F}[e^{-ax^2}]=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}\quad(a>0)$ であった.

$a=1$ とすれば $\boldsymbol{\mathcal{F}[e^{-x^2}]=\sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}}$.

また $a=\frac{1}{2}$ とすれば $\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{2}}]=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{k^2}{2}}$ を得る.

この両辺を k で微分する．このとき，フーリエ変換の性質 $\dfrac{dF(k)}{dk}=\mathcal{F}[(-ix)f(x)]$ を用いれば

$\mathcal{F}[(-ix)e^{-\frac{x^2}{2}}]=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{k^2}{2}}(-k)$ であるから，両辺に i をかければ

$\boldsymbol{\mathcal{F}[xe^{-\frac{x^2}{2}}]=-ik\sqrt{2\pi}e^{-\frac{k^2}{2}}}$

(2) 合成積のフーリエ変換の性質 $\mathcal{F}[(f*g)(x)]=\mathcal{F}[f(x)]\cdot\mathcal{F}[g(x)]$ を用いれば

$\mathcal{F}[xe^{-\frac{x^2}{2}}*e^{-x^2}]=-ik\sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{2}}\cdot\sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}=\boldsymbol{-ik\pi e^{-\frac{3}{4}k^2}}$

(3) (2) より

$$xe^{-\frac{x^2}{2}}*e^{-x^2}=\mathcal{F}^{-1}\left[-ik\pi e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]=\frac{2\sqrt{\pi}i}{3}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{d}{dk}e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}i}{3}(-ix)\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{3}{4}k^2}\right]=\frac{2\sqrt{\pi}i}{3}(-ix)\frac{1}{\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{1}{3}x^2}=\boldsymbol{\frac{2}{3\sqrt{3}}xe^{-\frac{1}{3}x^2}}$$

3

(1) $U(k,t)=\mathcal{F}[u(x,t)]$ とおくと $U_t(k,t)=\mathcal{F}[u_t(x,t)]$ であり，
$\mathcal{F}[u_{xx}(x,t)]=(ik)^2U(k,t)=-k^2U(k,t)$ であるから $u_t=u_{xx}-u$ の両辺をフーリエ変換すると $U_t(k,t)=-k^2U(k,t)-U(k,t)$ であり，また $U(k,0)=\mathcal{F}[u(x,0)]=\mathcal{F}[\delta(x)]=1$ となる．$U_t(k,t)=-k^2U(k,t)-U(k,t)=-(1+k^2)U(k,t)$ を初期条件 $U(k,0)=1$ の下で解けば，$U(k,t)=e^{-(1+k^2)t}=e^{-t}\,e^{-k^2t}$．従って

$$u=\mathcal{F}^{-1}[U(k,t)]=\mathcal{F}^{-1}[e^{-t}\,e^{-k^2t}]=e^{-t}\mathcal{F}^{-1}[e^{-k^2t}]=e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-t}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}}$$

(2) $U(k,t)=\mathcal{F}[u(x,t)]$ とおき，$u_t=u_{xx}$ の両辺をフーリエ変換すると
$U_t(k,t)=-k^2U(k,t)$．また，初期条件のフーリエ変換は

$$U(k,0)=\mathcal{F}[H(x)]=\int_0^{\infty}e^{-ikx}\,dx=\left[\frac{-1}{ik}e^{-ikx}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{ik}$$

したがって $U_t(k,t)=\dfrac{1}{ik}e^{-k^2}$ を得る．逆フーリエ変換して

$$u=\mathcal{F}^{-1}[U(k,t)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{ik}e^{-k^2}]=H(x)*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}=\int_{-\infty}^{+\infty}H(s)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\,ds$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\,ds=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\,ds}$$