１章　ベクトル解析

３節　ベクトル場

p.62　節末問題

1.

⑴　勾配 $\nabla f=(yz,\ xz,\ xy)$ より P(1, 2, 3)での勾配は

$\nabla f=(6,\ 3,\ 2)$ である。$|\nabla f|=\sqrt{36+9+4}=7$ より

単位法線ベクトルは　$\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{7}(6,\ 3,\ 2)$ なので接平面 π は(6, 3, 2)が

法線方向で(1, 2, 3) を通る平面である。

よって π は　$6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)=0$

すなわち　$6x+3y+2z=18$

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向の単位ベクトルは $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ より　$\boldsymbol{e}=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,\ 2,\ 3)$

よって P での f の方向微分係数は

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{e}=(6,\ 3,\ 2)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}(1,\ 2,\ 3)=\frac{1}{\sqrt{14}}(6+6+6)=\frac{18}{\sqrt{14}}$$

2.　$\boldsymbol{f}=(f_1(x,\ y,\ z),\ f_2(x,\ y,\ z),\ f_3(x,\ y,\ z))$ について

$(f_1)_x=yz,\ (f_2)_y=xz,\ (f_3)_z=xy$ より 発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}=yz+xz+xy$ なので

P では $\nabla\cdot\boldsymbol{f}=2\times3+1\times3+1\times2=11$

一方回転は

$$\nabla\times\boldsymbol{f}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xyz & xyz & xyz\end{vmatrix}=(xz-xy,\ -(yz-xy),\ yz-xz)$$

なので P では $\nabla\times\boldsymbol{f}=(3-2,\ -(6-2),\ 6-3)=(1,\ -4,\ 3)$

3.

⑴　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$　より　$\boldsymbol{r}_x=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\dfrac{x}{r}$

同様にして

$r_y=\dfrac{y}{r}$，$r_z=\dfrac{z}{r}$　なので

$$\nabla r=(r_x,\ r_y,\ r_z)=\left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right)=\frac{1}{r}(x,\ y,\ z)=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

⑵　p.44 勾配の公式 5 より　$\nabla\varphi(r)=\varphi'(r)\nabla r$

ここで　$\varphi(r)=\dfrac{1}{r}$ とすると　$\varphi'(r)=-r^{-2}$

よって　$\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)=-r^{-2}\nabla r=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

⑶　$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=(x)_x+(y)_y+(z)_z=1+1+1=3$

⑷　p.49　発散の公式 3 より

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{r}\cdot 3=\frac{r^2}{r^3}+\frac{3}{r}=-\frac{1}{r}+\frac{3}{r}=\frac{2}{r}$$　（⑵，⑶より）

⑸　$\nabla\cdot\left(\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\right)=\nabla\cdot\underbrace{\left(-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)}_{⑵より}=\nabla\left(-\dfrac{1}{r^3}\right)\cdot\boldsymbol{r}-\dfrac{1}{r^3}\nabla\cdot\boldsymbol{r}$　（p.49　発散の公式 3 ）

$=\underbrace{(3r^{-4}\nabla r)\cdot\boldsymbol{r}-\dfrac{1}{r^3}\cdot 3}_{⑶より}=\dfrac{3}{r^4}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}-\dfrac{3}{r^3}=\dfrac{3r^2}{r^5}-\dfrac{3}{r^3}=0$

⑹　$\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=(0-0,\ -(0-0),\ 0-0)=\boldsymbol{0}$

⑺　$\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\times\boldsymbol{r}+\dfrac{1}{r}\nabla\times\boldsymbol{r}=\dfrac{-\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{r}+\underbrace{\dfrac{1}{r}\times\boldsymbol{0}}_{⑹より}=\boldsymbol{0}$　（p.52　回転の公式 3 ）

4. $\displaystyle\int_c (xy+z)\,ds = \int_0^1 (t\cdot 2t+2t)\frac{ds}{dt}\,dt \quad \left(\frac{ds}{dt} = \sqrt{(t')^2+\{(2t)'\}^2+\{(2t)'\}^2} = 3\right)$

$$= \int_0^1 (2t^2+2t)\cdot 3\,dt = 6\left[\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 5$$

5. $\displaystyle\int_S (x+y+z)\,ds = \iint_D (u\cos v+u\sin v+u)\,|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv$

（$\boldsymbol{r}_u = (\cos v,\ \sin v,\ 1)$, $\boldsymbol{r}_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$ より

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ u\cos^2 v+u\sin^2 v))$$

$$= \int_{v=0}^{v=2\pi}\int_{u=0}^{u=1}(u\cos v+u\sin v+u)\sqrt{u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v+u^2}\,du\,dv$$

$$= \int_{v=0}^{v=2\pi}\int_{u=0}^{u=1}\sqrt{2}u^2(\cos v+\sin v+1)\,du\,dv = \int_{v=0}^{v=2\pi}(\cos v+\sin v+1)\frac{\sqrt{2}}{3}\left[u^3\right]_0^1 dv$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\sin v-\cos v+v\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

6.

(1) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ で A が $\boldsymbol{r}(\alpha) = (x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha))$,

B が $\boldsymbol{r}(\beta) = (x(\beta),\ y(\beta),\ z(\beta))$ とする。このとき

$$\int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t=\alpha}^{t=\beta}(f_x,\ f_y,\ f_z)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f_x x'(t)+f_y y'(t)+f_z z'(t)\,dt$$

$$= \int_{t=\alpha}^{t=\beta}\frac{d}{dt}f(x(t),\ y(t),\ z(t))\,dt$$

$$= \Big[f(x(t),\ y(t),\ z(t))\Big]_{t=\alpha}^{t=\beta} = f(\boldsymbol{r}(\beta))-f(\boldsymbol{r}(\alpha))$$

(2) $\boldsymbol{r}(\alpha) = \boldsymbol{r}(\beta)$ の場合なので $\displaystyle\int_c \nabla f\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

7. S 上では $r = a$ であり， $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{a}$ なので

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_S \frac{\boldsymbol{r}}{a^3}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{a}\,dS$$

$$= \int_S \frac{|\boldsymbol{r}|^2}{a^4}\,dS = \frac{a^2}{a^4}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi$$