◊ 1 複素関数と正則関数

練習 1

(1) 与式$=3+i$ より $\underline{\mathrm{Re}(z)=3,\ \mathrm{Im}(z)=1, |z|=\sqrt{10}, \bar{z}=3-i}$

(2) 与式$=9-7i$ より $\underline{\mathrm{Re}(z)=9,\ \mathrm{Im}(z)=-7, |z|=\sqrt{130}, \bar{z}=9+7i}$

(3) 与式$=-2+2i$ より $\underline{\mathrm{Re}(z)=-2,\ \mathrm{Im}(z)=2, |z|=2\sqrt{2}, \bar{z}=-2-2i}$

(4) 与式$=-i$ より $\underline{\mathrm{Re}(z)=0,\ \mathrm{Im}(z)=-1, |z|=1, \bar{z}=i}$

練習 2

(1) $|1-i|=\sqrt{2}, \theta=\dfrac{7\pi}{4}$ より $\underline{\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}}$

(2) $|\sqrt{3}+i|=2, \theta=\dfrac{\pi}{6}$ より $\underline{2e^{\frac{\pi}{6}i}}$

(3) $|i|=1, \theta=\dfrac{\pi}{2}$ より $\underline{e^{\frac{\pi}{2}i}}$

(4) $|-1|=1, \theta=\pi$ より $\underline{e^{\pi i}}$

練習 3

$|(1+2i)-(-3+4i)|=|4-2i|=\underline{2\sqrt{5}}$

練習 4

$|z_1+z_2+z_3|=|(z_1+z_2)+z_3| \leqq |z_1+z_2|+|z_3| \leqq |z_1|+|z_2|+|z_3|$

練習 5

左辺$=e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)$

$=e^{x_1+x_2}\{\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+i(\cos y_1\sin y_2+\sin y_1\cos y_2)\}$

$=e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))$

$=e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)}=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=e^{z_1+z_2}$=右辺

練習 6 複素平面上の点 $z\,(z\neq 0)$ に対して，次の複素数はどんな点を表すか.

(1) $|iz|=|z|, \arg iz=\arg i+\arg z=\dfrac{\pi}{2}+\arg z$

点 z を原点の周りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転した点

(2) $|(1+\sqrt{3})iz|=2|z|,$

$\arg(1+\sqrt{3}i)z=\arg(1+\sqrt{3}i)+\arg z=\dfrac{\pi}{3}+\arg z$

点 z を原点の周りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点を z' とし，線分 Oz' を 2 倍に拡大した端の点

(3) $\left|\dfrac{z}{1-i}\right| = \dfrac{|z|}{|1-i|} = \dfrac{|z|}{\sqrt{2}}$

$\arg\left(\dfrac{z}{1-i}\right) = \arg z - \arg(1-i) = \arg z - \dfrac{7\pi}{4}$

$\underline{点\ z\ を原点の周りに\ -\dfrac{7\pi}{4}\ 回転した点を\ z'\ とし，線分\ Oz'\ を\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ 倍に縮小した端の点}$

練習 7

(1) $(1+i)^8 = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^8 = (\sqrt{2})^8\Big(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)^8$

$= 16\Big(\cos\dfrac{8\pi}{4} + i\sin\dfrac{8\pi}{4}\Big) = \underline{16}$

(2) $\dfrac{1}{(1-\sqrt{3}i)^4} = \dfrac{1}{(2e^{\frac{5\pi}{3}i})^4} = \dfrac{1}{2^4}\Big(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\Big)^{-4}$

$= \dfrac{1}{16}\Big(\cos\dfrac{-20\pi}{3} + i\sin\dfrac{-20\pi}{3}\Big) = \dfrac{1}{16}\Big(\cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}\Big)$

$= \dfrac{1}{16}\Big(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \underline{\dfrac{1}{32}(-1-\sqrt{3}i)}$

練習 8

(1) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^3 = r^3e^{3i\theta} = 1e^{(0+2k\pi)i}\,(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

絶対値と偏角を比較して，

$r^3 = 1$ より $r = 1$

$3\theta = \Big(0 + 2k\pi\Big)$ より $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2$

よって，$\theta = 0, \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi$

したがって，$z = e^0, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{\frac{4}{3}\pi i} = \underline{1, \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

(2) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^5 = r^5e^{5i\theta} = 1e^{(0+2k\pi)i}\,(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

絶対値と偏角を比較して，

$r^5 = 1$ より $r = 1$

$5\theta = \Big(0 + 2k\pi\Big)$ より $\theta = \dfrac{2k\pi}{5}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2, 3, 4$

よって，$\theta = 0, \dfrac{2}{5}\pi, \dfrac{4}{5}\pi, \dfrac{6}{5}\pi, \dfrac{8}{5}\pi$

したがって，$\underline{z = 1, e^{\frac{2}{5}\pi i}, e^{\frac{4}{5}\pi i}, e^{\frac{6}{5}\pi i}, e^{\frac{8}{5}\pi i}}$

(3) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^5 = r^5 e^{5i\theta} = 32e^{(0+2k\pi)i}\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

絶対値と偏角を比較して，

$r^5 = 32$ より $r = 2$

$5\theta = \left(0 + 2k\pi\right)$ より $\theta = \dfrac{2k\pi}{5}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2, 3, 4$

よって，$\theta = 0, \dfrac{2}{5}\pi, \dfrac{4}{5}\pi, \dfrac{6}{5}\pi, \dfrac{8}{5}\pi$

したがって，$\underline{z = 2,\ 2e^{\frac{2}{5}\pi i},\ 2e^{\frac{4}{5}\pi i},\ 2e^{\frac{6}{5}\pi i},\ 2e^{\frac{8}{5}\pi i}}$

(4) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$z^7 = r^7 e^{7i\theta} = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

絶対値と偏角を比較して，

$r^7 = 1$ より $r = 1$

$7\theta = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ より $\theta = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2k\pi}{7}$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

よって，$\theta = \dfrac{\pi}{14}, \dfrac{5}{14}\pi, \dfrac{9}{14}\pi, \dfrac{13}{14}\pi, \dfrac{17}{14}\pi, \dfrac{21}{14}\pi, \dfrac{25}{14}\pi$

したがって，$\underline{z = e^{\frac{1}{14}\pi i},\ e^{\frac{5}{14}\pi i},\ e^{\frac{9}{14}\pi i},\ e^{\frac{13}{14}\pi i},\ e^{\frac{17}{14}\pi i},\ e^{\frac{21}{14}\pi i},\ e^{\frac{25}{14}\pi i}}$

練習 9

(1) 左辺=$|e^{yi}| = |\cos y + i\sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$=右辺

(2) 左辺=$\overline{e^z} = \overline{e^x e^{yi}} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y)$

$= e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x e^{-yi} = e^{x-yi} = e^{\bar{z}}$=右辺

練習 10

(1) 左辺=$\cos(-z) = \dfrac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$=右辺

左辺=$\sin(-z) = \dfrac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$=右辺

(2) 左辺=$\sin(z_1 \pm z_2) = \dfrac{e^{i(z_1 \pm z_2)} - e^{-i(z_1 \pm z_2)}}{2i} = \dfrac{e^{iz_1}e^{\pm iz_2} - e^{-iz_1}e^{\mp iz_2}}{2i}$

$= \dfrac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 \pm i\sin z_2) - (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 \mp i\sin z_2)}{2i}$

$= \dfrac{2i(\sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2)}{2i}$

$= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$=右辺　(複号同順)

(3) 左辺$=\cos(z_1 \pm z_2) = \dfrac{e^{i(z_1 \pm z_2)} + e^{-i(z_1 \pm z_2)}}{2} = \dfrac{e^{iz_1}e^{\pm iz_2} + e^{-iz_1}e^{\mp iz_2}}{2}$

$= \dfrac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 \pm i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 \mp i\sin z_2)}{2}$

$= \dfrac{2(\cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2)}{2}$

$= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$=右辺　(複号同順)

<u>練習 11</u>

(1) 左辺$=\cosh iz = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$=右辺

左辺$=\sinh iz = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \dfrac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} = i\sin z$=右辺

(2) 左辺$=\sinh(z_1 \pm z_2) = \dfrac{e^{z_1 \pm z_2} - e^{-(z_1 \pm z_2)}}{2} = \dfrac{e^{z_1}e^{\pm z_2} - e^{-z_1}e^{\mp z_2}}{2}$

ここで，$e^z = \cosh z + \sinh z, e^{-z} = \cosh z - \sinh z$ より

$= \dfrac{(\cosh z_1 + \sinh z_1)(\cosh(\pm z_2) + \sinh(\pm z_2)) - (\cosh(-z_1) + \sinh(-z_1))(\cosh(\mp z_2) + \sinh(\mp z_2))}{2}$

$= \dfrac{(\cosh z_1 + \sinh z_1)(\cosh z_2 \pm \sinh z_2) - (\cosh z_1 - \sinh z_1)(\cosh z_2 \mp \sinh z_2)}{2}$

$= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$=右辺　(複号同順)

(3) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \dfrac{e^{z_1 \pm z_2} + e^{-(z_1 \pm z_2)}}{2} = \dfrac{e^{z_1}e^{\pm z_2} + e^{-z_1}e^{\mp z_2}}{2}$

ここで，$e^z = \cosh z + \sinh z, e^{-z} = \cosh z - \sinh z$ より

$= \dfrac{(\cosh z_1 + \sinh z_1)(\cosh(\pm z_2) + \sinh(\pm z_2)) + (\cosh(-z_1) + \sinh(-z_1))(\cosh(\mp z_2) + \sinh(\mp z_2))}{2}$

$= \dfrac{(\cosh z_1 + \sinh z_1)(\cosh z_2 \pm \sinh z_2) + (\cosh z_1 - \sinh z_1)(\cosh z_2 \mp \sinh z_2)}{2}$

$= \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$=右辺　(複号同順)

<u>練習 12</u>

(1) $\displaystyle\lim_{z\to 2-i}(z^3 - 1) = (2-i)^3 - 1 = 8 - 12i + 6i^2 - i^3 - 1 = \underline{1 - 11i}$

(2) $\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i} = \lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z-i)}{z+i} = \lim_{z\to -i}(z-i) = -i - i = \underline{-2i}$

(3) $\displaystyle\lim_{z\to 1+i}(z+\bar{z})^2 = (1+i+1-i)^2 = 2^2 = \underline{4}$

(4) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2-1}{z-i} = \underline{\infty}$

<u>練習 13</u>

(1) $w' = \underline{4z^3 + 2z + 1}$

(2) $w' = 3z^2(z^2 - iz + 1) + (z^3+1)(2z - i) = \underline{5z^4 + 3z^2 + 2z - i(4z^3+1)}$

(3) $w' = \underline{5(z^2 + iz + 1)^4(2z + i)}$

(4) $w' = \dfrac{i(z+1) - iz}{(z+1)^2} = \underline{\dfrac{i}{(z+1)^2}}$

$\overline{\underline{\text{練習 14}}}$

(1) $w = \dfrac{1}{z}$ より

$u + vi = \dfrac{1}{x+yi} = \dfrac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{-y}{x^2+y^2}i$

したがって，$\underline{u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}}$

(2) $w = (z + 2\bar{z})^2$ より

$u + vi = \{x + yi + 2(x - yi)\}^2 = (3x - yi)^2 = 9x^2 - y^2 - 6xyi$

したがって，$\underline{u = 9x^2 - y^2, v = -6xy}$

$\overline{\underline{\text{練習 15}}}$

(1) $u_x = 1, u_y = 1, v_x = 1, v_y = -1$ より

コーシー・リーマンの関係式がなりたつので，<u>正則である</u>

$\underline{f'(z) = 1 + i}$

(2) $u_x = 1, u_y = 0, v_x = 0, v_y = -1$ より

コーシー・リーマンの関係式がなりたたないので，<u>正則でない</u>

(3) $e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$u_x = e^x \cos y, u_y = -e^x \sin y, v_x = e^x \sin y, v_y = e^x \cos y$ より

コーシー・リーマンの関係式がなりたつので，<u>正則である</u>

$\underline{f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y}$

$\overline{\underline{\text{練習 16}}}$

$f'(z) = 0$ より $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ であるから u, v は定数である．

したがって，$f(z)$ は定数である．

$\overline{\underline{\text{練習 17}}}$

$(\tan z)' = \left(\dfrac{\sin z}{\cos z}\right)' = \dfrac{(\sin z)' \cos z - \sin z (\cos z)'}{\cos^2 z} = \dfrac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z}$

$\underline{= \dfrac{1}{\cos^2 z}}$

$\overline{\underline{\text{練習 18}}}$

(1) $\varphi_x = 3x^2 + 2y - 3y^2, \varphi_{xx} = 6x, \varphi_y = 2x - 6xy, \varphi_{yy} = -6x$ より

$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 6x - 6x = 0$ したがって，$\varphi(x, y)$ は調和関数である．

(2) $\varphi_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}, \varphi_{xx} = \dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$
$\varphi_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}, \varphi_{yy} = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ より
$\varphi_{xx}+\varphi_{yy} = \dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$
したがって，$\varphi(x,y)$ は調和関数である．

練習 19

$u(x,y)$ の導関数は

$$u_x = -e^{-x}(\sin y + \cos y),\ u_{xx} = e^{-x}(\sin y + \cos y)$$

$$u_y = e^{-x}(\cos y - \sin y),\ u_{yy} = e^{-x}(-\sin y - \cos y)$$

より

$$u_{xx} + u_{yy} = e^{-x}(\sin y + \cos y) + e^{-x}(-\sin y - \cos y) = 0$$

であるから，$u(x,y)$ は調和関数である．

正則関数は，コーシー・リーマンの方程式を満たすので，$v(x,y)$ の x, y に関する偏導関数は

$$v_x = -u_y = -e^{-x}(\cos y - \sin y), \quad v_y = u_x = -e^{-x}(\sin y + \cos y)$$

である．第一式を y を定数であるとみなして x について積分すると

$$v(x,y) = e^{-x}(\cos y - \sin y) + Y(y)$$

である．ここで，$Y(y)$ は y のみの関数である．これを上の第二式に代入すると，$Y(y)$ についての微分方程式

$$\frac{dY}{dy} = 0$$

が得られる．これより，$Y(y) = c \quad$ (c は任意定数) となる．
すなわち，$v(x,y) = e^{-x}(\cos y - \sin y) + c$
よって，求める正則関数は,
$\underline{f(z) = e^{-x}(\sin y + \cos y) + i\{e^{-x}(\cos y - \sin y) + c\}}$

練習 20

(1) $|1-i|=\sqrt{2}, \arg(1-i)=\dfrac{7}{4}\pi$ より $\sqrt{1-i}=\underline{\pm\sqrt[4]{2}e^{i\frac{7}{8}\pi}}$

(2) $|-4i|=4, \arg(-4i)=\dfrac{3}{2}\pi$ より

$\sqrt{-4i}=\pm 2e^{i\frac{3}{4}\pi}=\pm 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)=\pm 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\underline{\pm\sqrt{2}(1-i)}$

(3) $|-8|=8, \arg(-8)=\pi$ より ω_k を 1 の 3 乗根としたとき，

$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{3}}\omega_k=2e^{i\frac{\pi}{3}}\omega_k\ (k=0,1,2)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\omega_k$

$=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega_k=\underline{(1+i\sqrt{3})\omega_k \quad (k=0,1,2)}$

練習 21

(1) $|3i|=3, \arg(3i)=\dfrac{\pi}{2}$ より

$\log(3i)=\underline{\log 3+i\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right) \quad (n\text{ は整数})}$

(2) $|1-i|=\sqrt{2}, \arg(1-i)=\dfrac{7\pi}{4}$ より

$\log(1-i)=\underline{\log\sqrt{2}+i\left(\dfrac{7\pi}{4}+2n\pi\right) \quad (n\text{ は整数})}$

(3) $|-8|=8, \arg(-8)=\pi$ より $\mathrm{Log}(-8)=\underline{\log 8+i\pi}$

(4) $|1+i|=\sqrt{2}, \arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$ より $\mathrm{Log}(1-i)=\underline{\log\sqrt{2}+i\dfrac{\pi}{4}}$

練習 22

$z=e^{i\frac{5}{4}\pi}, w=e^{i\frac{5}{4}\pi}$ とすると，

$\mathrm{Log}(zw)=\mathrm{Log}e^{i\frac{5}{2}\pi}=\log|e^{i\frac{5}{2}\pi}|+i(\arg(e^{i\frac{5}{2}\pi})+2\cdot 0\cdot\pi)$

$=\log(1)+i(\arg e^{i\frac{\pi}{2}})=i\dfrac{\pi}{2}$

$\mathrm{Log}z+\mathrm{Log}w=\mathrm{Log}e^{i\frac{5}{4}\pi}+\mathrm{Log}e^{i\frac{5}{4}\pi}=2\{\log|e^{i\frac{5}{4}\pi}|+i(\arg(e^{i\frac{5}{4}\pi})+2\cdot 0\cdot\pi)\}$

$=2\{\log(1)+i(\arg e^{i\frac{5}{4}\pi})\}=2i\dfrac{5}{4}\pi=i\dfrac{5}{2}\pi$

であるので，成り立たない．

練習 23

(1) $z=w^3$ より $z'=3w^2=3(\sqrt[3]{z})^2$

したがって，$z\neq 0$ のとき，$\underline{w'=\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{z})^2}}$

(2) $z=w^n$ より $z'=nw^{n-1}=n(\sqrt[n]{z})^{n-1}$

したがって，$z\neq 0$ のとき，$\underline{w'=\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{z})^{n-1}}}$

$\underline{\overline{\text{練習 24}}}$

$w=\log z$ とおくと $z=e^w$

これより $z'=e^w=e^{\log z}=z$

したがって，逆関数の導関数の公式より $(\log z)'=\dfrac{1}{z}$

$\underline{\overline{\text{練習 25}}}$

$|z|=r, \arg z=\theta$ であり，$w=z^2=r^2e^{2i\theta}$

したがって，$\underline{|w|=r^2, \arg w=2\theta}$

$\underline{\overline{\text{練習 26}}}$

$w=\dfrac{1}{z-1}$ より $z=\dfrac{1+w}{w}$ である．

ここで，$z=x+yi, w=u+vi$ とおくと

$x+yi=\dfrac{1+u+vi}{u+vi}=\dfrac{(1+u+vi)(u-vi)}{u^2+v^2}=\dfrac{u+u^2+v^2-vi}{u^2+v^2}$

より $x=\dfrac{u+u^2+v^2}{u^2+v^2}, y=-\dfrac{v}{u^2+v^2}$

(1) $y=1$ より $-\dfrac{v}{u^2+v^2}=1$

したがって，$u^2+v^2=-v$ より $u^2+\left(v+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

よって，$\underline{\text{中心 }\left(0,-\frac{1}{2}\right)\text{，半径 }\frac{1}{2}\text{ の円に写る}}$．

(2) 両辺を 2 乗して，$|z-i|^2=x^2+(y-1)^2=1$

したがって，$\left(\dfrac{u+u^2+v^2}{u^2+v^2}\right)^2+\left(-\dfrac{v}{u^2+v^2}-1\right)^2=1$ より

$(u+1)^2+(v+1)^2=1$　よって，$\underline{\text{中心 }(-1,-1)\text{，半径 1 の円に写る}}$.

$\underline{\overline{\text{練習 27}}}$

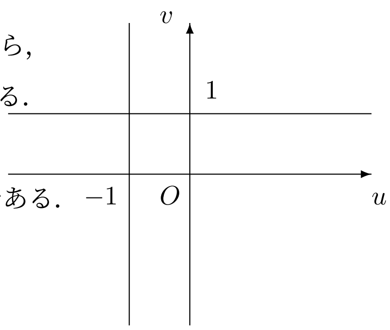
$z=x+yi$ のとき $iz=-y+xi$ であるから，

$w=u+vi$ とおくと $u=-y, v=x$ である．

$x=1$ の像の方程式は，$\underline{v=1\text{ の直線}}$,

$y=1$ の像の方程式は，$\underline{u=-1\text{ の直線}}$ である．

グラフは図のように等角性が成り立つ．



≪節末問題≫

1. (1) $(1-i)^{10} = (\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi})^{10} = 32e^{\frac{35}{2}\pi} = \underline{-i32}$

   (2) $(1+i)^{20} = (\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi})^{20} = 1024e^{5\pi} = \underline{-1024}$

   (3) $(1+\sqrt{3}i)^{-6} = (2e^{\frac{\pi}{3}})^{-6} = \dfrac{1}{64}e^{-2\pi} = \underline{\dfrac{1}{64}}$

   (4) $i^i = (e^{\frac{\pi}{2}i})^i = \underline{e^{-\frac{\pi}{2}}}$

2. (1) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

   $z^4 = r^4 e^{4i\theta} = 16e^{(\pi+2k\pi)i}\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

   絶対値と偏角を比較して,

   $r^4 = 16$ より $r = 2$

   $4\theta = (\pi + 2k\pi)$ より $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

   ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2, 3$

   よって，$\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{5}{4}\pi, \dfrac{7}{4}\pi$

   したがって，$z = 2e^{\frac{1}{4}\pi i}, 2e^{\frac{3}{4}\pi i}, 2e^{\frac{5}{4}\pi i}, 2e^{\frac{7}{4}\pi i} = \underline{\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}$

   (2) $z = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

   $z^8 = r^8 e^{8i\theta} = a^8 e^{(\pi+2k\pi)i}\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

   絶対値と偏角を比較して,

   $r^8 = a^8$ より $r = a$

   $8\theta = (\pi + 2k\pi)$ より $\theta = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$

   ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

   よって，$\theta = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3}{8}\pi, \dfrac{5}{8}\pi, \dfrac{7}{8}\pi, \dfrac{9}{8}\pi, \dfrac{11}{8}\pi, \dfrac{13}{8}\pi, \dfrac{15}{8}$

   したがって, $\underline{z = ae^{\frac{1}{8}\pi i}, ae^{\frac{3}{8}\pi i}, ae^{\frac{5}{8}\pi i}, ae^{\frac{7}{8}\pi i}, ae^{\frac{9}{8}\pi i}, ae^{\frac{11}{8}\pi i}, ae^{\frac{13}{8}\pi i}, ae^{\frac{15}{8}\pi i}}$

3. z_1, z_2, z_3 について，$\arg\left(\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ とおける．

すなわち，$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

これより，$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ は $x^2-x+1=0$ の解であるから

$\left(\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)^2-\left(\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)+1=0$

よって，$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=0$

条件は等しいのでこれは必要十分条件である．

4. (1) $\displaystyle\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{z^2+4}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{2z}=\frac{1}{4i}=\underline{-\frac{1}{4}i}$

(2) $\displaystyle\lim_{z\to\pi}\frac{e^{iz}+1}{\sin z}=\lim_{z\to\pi}\frac{ie^{iz}}{\cos z}=\frac{ie^{i\pi}}{-1}=\underline{i}$

5. (1) $f'(z)=u_x+iv_x$ より $|f'(z)|^2=(u_x)^2+(v_x)^2$,

コーシー・リーマンの関係式より $u_x=v_y, u_y=-v_x$ であるから

左辺$=|f'(z)|^2=(u_x)^2+(v_x)^2=u_xv_y-u_yv_x=$右辺

(2) $|f(z)|^2=u^2+v^2$ より

$\dfrac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2=2uu_x+2vv_x, \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2u_x^2+2uu_{xx}+2v_x^2+2vv_{xx}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}|f(z)|^2=2uu_y+2vv_y, \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=2u_y^2+2uu_{yy}+2v_y^2+2vv_{yy}$

コーシー・リーマンの関係式より $u_x=v_y, u_y=-v_x$ であり,

さらにこの両辺を x で偏微分すると，$u_{xx}=v_{yx}, u_{yx}=-v_{xx}$

y で偏微分すると，$u_{xy}=v_{yy}, u_{yy}=-v_{xy}$

したがって，$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2u_xv_y+2uv_{yx}-2u_yv_x-2vu_{yx}$

$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=-2u_yv_x-2uv_{xy}+2v_yu_x+2vu_{xy}$

以上より,

左辺$=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2$

$=2u_xv_y+2uv_{yx}-2u_yv_x-2vu_{yx}-2u_yv_x-2uv_{xy}+2v_yu_x+2vu_{xy}$

$=4(u_xv_y-u_yv_x)=4|f'(z)|^2=$右辺

6. (1) $w=iz+i$ より $z=\dfrac{w-i}{i}=-1-iw$

$z=x+yi, w=u+vi$ とおくと

$x+yi=-1-i(u+vi)=(-1+v)+(-u)i$ より $x=-1+v, y=-u$

$|z|=1$ の両辺を 2 乗して，$x^2+y^2=1$

したがって，$(-1+v)^2+(-u)^2=1$ より $u^2+(v-1)^2=1$

よって，$\underline{\text{中心 } (0,1)\text{，半径 } 1 \text{ の円}}$

(2) $w=\dfrac{1+iz}{-iz}=\dfrac{i-z}{z}$ より $z=\dfrac{i}{w+1}$

$x=x+yi, w=u+vi$ とおくと

$x+yi=\dfrac{i}{u+vi+1}=\dfrac{i(u+1-vi)}{(u+1)^2+v^2}=\dfrac{v+i(u+1)}{(u+1)^2+v^2}$ より

$x=\dfrac{v}{(u+1)^2+v^2}, y=\dfrac{u+1}{(u+1)^2+v^2}$

$x=1$ より $\dfrac{v}{(u+1)^2+v^2}=1$

したがって，$(u+1)^2+v^2=v$ より $(u+1)^2+\left(v-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

よって，$\underline{\text{中心 } \left(-1,\dfrac{1}{2}\right)\text{，半径 } \dfrac{1}{2} \text{ の円}}$

◇ 2 複素積分

練習 1

(1) $\displaystyle\int_C zdz = \int_0^1 (it)idt = \int_0^1 (-t)dt = \Big[-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = \underline{-\frac{1}{2}}$

(2) $\displaystyle\int_C (z-1)^2 dz = \int_0^1 (1-t+it-1)^2(-1+i)dt = \int_0^1 t(-1+i)^3 dt$

$\displaystyle = (2+2i)\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = \underline{1+i}$

練習 2

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z+2}dz = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+i+2}dt = [\log(t+i+2)]_{-1}^1$

$\displaystyle = \log(3+i) - \log(1+i) = \log\frac{3+i}{1+i} = \underline{\log(2-i)}$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z+2}dz = \int_0^1 \frac{1+i}{(t-1)+it+2}dt - \int_0^1 \frac{-1+i}{(1-t)+it+2}dt$

$\displaystyle = \int_0^1 \frac{1+i}{1+(1+i)t}dt - \int_0^1 \frac{-1+i}{3+(-1+i)t}dt$

$= [\log(1+(1+i)t)]_0^1 - [\log(3+(-1+i)t)]_0^1$

$= \log(2+i) - \log 1 - (\log(2+i) - \log 3) = \underline{\log 3}$

練習 3

$\displaystyle\frac{dz}{dt} = ire^{it}$ であるから

$\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-a)^l}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{r^l e^{ilt}}dt = \frac{i}{r^{l-1}}\int_0^{2\pi} e^{i(1-l)t}dt$

$l=1$ のとき $\displaystyle i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$

$l \neq 1$ のとき $\displaystyle\frac{i}{r^{l-1}}\int_0^{2\pi} e^{i(1-l)t}dt = \frac{i}{r^{l-1}}\Big[\frac{1}{i(1-l)}e^{i(1-l)t}\Big]_0^{2\pi}$

$\displaystyle = \frac{1}{(1-l)r^{l-1}}(e^{2(1-l)\pi i} - 1) = 0$

練習 4

図の曲線 C は $z = t + i\,(-1 \leqq t \leqq 1)$ である．

$-z^2 = -(t+i)^2 = (1-t^2) - 2it$ より

$|e^{-z^2}| = |e^{(1-t^2)-2it}| = |e^{(1-t^2)}||e^{-2it}| = |e^{(1-t^2)}| \leqq |e| = e$

したがって，$\displaystyle\Big|\int_C e^{-z^2}dz\Big| \leqq \int_C |e^{-z^2}||dz| \leqq \int_C e dz = e\int_C dz = 2e$

$\underline{\overline{\text{練習 5}}}$

(1) $\displaystyle\int_C e^z dz = \int_0^i e^z dz = [e^z]_0^i = \underline{e^i - 1}$

(2) $\displaystyle\int_C \cos z dz = \int_0^i \cos z dz = [\sin z]_0^i = \underline{\sin i}$

$\underline{\overline{\text{練習 6}}}$

$\dfrac{1}{z^2+2}$ は 2 点 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ を除いた全平面で正則である.

(1) -1 から 1 に至る実軸上の線分を C_1 とすると,

コーシーの積分定理より,

$$\int_{C+(-C_1)} \frac{1}{z^2+2}dz = \int_C \frac{1}{z^2+2}dz - \int_{C_1} \frac{1}{z^2+2}dz = 0$$

したがって,

$$\int_C \frac{1}{z^2+2}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2+2}dz = \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+2}dt = 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+2}dt$$

$$= 2\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big]_0^1 = \underline{\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(2) $-i$ から i に至る虚軸上の線分を C_1 とすると,

コーシーの積分定理より,

$$\int_{C+(-C_1)} \frac{1}{z^2+2}dz = \int_C \frac{1}{z^2+2}dz - \int_{C_1} \frac{1}{z^2+2}dz = 0$$

したがって,

$$\int_C \frac{1}{z^2+2}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2+2}dz = \int_{-1}^1 \frac{i}{(it)^2+2}dt = i2\int_0^1 \frac{1}{-t^2+2}dt$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{2}-t} + \frac{1}{\sqrt{2}+t}\Big)dt = \frac{i}{\sqrt{2}}\Big[-\log|\sqrt{2}-t| + \log|\sqrt{2}+t|\Big]_0^1$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}(-\log(\sqrt{2}-1)+\log(\sqrt{2}+1)) = \frac{i}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \underline{i\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1)}$$

$\underline{\overline{\text{演習 1}}}$

(1) $\dfrac{x-1}{(x-2)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2}$ の形に分解する.

$\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2} = \dfrac{Ax-2A+B}{(x-2)^2}$ より

$\begin{cases} A &= 1 \\ -2A+B &= -1 \end{cases}$ を解いて, $A=1, B=1$

したがって, $\underline{\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}}$

(2) $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$ の形に分解する．

$\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4} = \dfrac{(A+B)x^2+(B+C)x+4A+C}{(x+1)(x^2+4)}$ より

$\left\{\begin{array}{rcl} A+B &=& 1 \\ B+C &=& 1 \\ 4A+C &=& 1 \end{array}\right.$ を解いて，$A=\dfrac{1}{5}, B=\dfrac{4}{5}, c=\dfrac{1}{5}$

したがって，$\underline{\dfrac{1}{5}\Big(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{4x+1}{x^2+4}\Big)}$

(3) $2x^2+4x+1=0$ の解は $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$

したがって，$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\dfrac{1}{x-\frac{-2+\sqrt{2}}{2}} - \dfrac{1}{x-\frac{-2-\sqrt{2}}{2}}\Big) = \underline{\sqrt{2}\Big(\dfrac{1}{2x+2-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2x+2+\sqrt{2}}\Big)}$

練習 7

(1) コーシーの積分表示で $f(z)=\sin z$ を考えると

$\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z+\pi}dz = 2\pi i f(-\pi) = 2\pi i \sin(-\pi) = \underline{0}$

(2) コーシーの積分表示で $f(z)=z$ を考えると

$\displaystyle\int_C \frac{z}{z-i}dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i i = \underline{-2\pi}$

練習 8

点 $z=1$ は円の内部にある．

$f(z)=2z^3+5$ とおくと，導関数の積分表示より

$\displaystyle f^{(3)}(1) = \frac{3!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^4}dz$

したがって，

$\displaystyle\int_C \frac{2z^3+5}{(z-1)^4}dz = \frac{\pi i}{3} f^{(3)}(1) = \underline{4\pi i}$

練習 9

導関数の積分表示より，$\displaystyle f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

C 上の任意の点 ζ に対して，$\displaystyle\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\right| \leqq \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} \leqq \frac{M}{r^{n+1}}$

周の長さは $2\pi r$ なので，絶対値の評価より，

$\displaystyle|f^{(n)}(z)| \leqq \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right| \leqq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}$

練習 10

コーシーの不等式より $|f'(z)| \leqq \dfrac{M}{r}$

全平面で正則であるので，$r \to \infty$ として $|f'(z)| = 0$

ここで，$f = u + iv$ とおくと，$f'(z) = u_x + iv_x = \dfrac{1}{i}(u_y + iv_y) = 0$

したがって，$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$

よって，$f(z)$ は定数である．

練習 11

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)i}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)i = 2i$

したがって，収束する．極限値は $\underline{2i}$

(2) $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq 1$ したがって，収束する．極限値は $\underline{0}$

(3) $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \geqq 1$ したがって，発散する．

(4) $i, -1, -i, 1$ の値を繰り返してとるので 発散する．

練習 12

(1) $\left|\dfrac{1-i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq 1$

したがって，収束，和は $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1-i}{2}} = \dfrac{2}{1+i} = \underline{1-i}$

(2) $\left|\dfrac{2}{1-i}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \geqq 1$

したがって，発散する．

練習 13

べき級数の収束半径は $\underline{1}$，その導関数の収束半径も $\underline{1}$

演習 2

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{n+2}{n^2+n}}{\dfrac{(n+1)+2}{(n+1)^2+(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)(n^2+3n+2)}{(n+3)(n^2+n)}\right| = \underline{1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| = \underline{\infty}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^{2n}}}} = \lim_{n\to\infty} n^2 = \underline{\infty}$

$\overline{\text{練習 14}}$

(1) $f(z) = \sin z$ は全平面で正則で,

$f'(z) = \cos z, f''(z) = -\sin z, f^{(3)} = -\cos z, f^{(4)} = \sin z, \cdots$ より

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)} = -1, f^{(4)} = 0, \cdots$

したがって，0 を中心とするテイラー展開は,

$\sin z = 0 + z + \frac{0}{2!}z^2 + \frac{-1}{3!}z^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots$

$= \underline{z - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots}$，収束半径は $\underline{\infty}$.

(2) $f(z) = \cos z$ は全平面で正則で,

$f'(z) = -\sin z, f''(z) = -\cos z, f^{(3)} = \sin z, f^{(4)} = \cos z, \cdots$ より

$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f^{(3)} = 0, f^{(4)} = 1, \cdots$

したがって，0 を中心とするテイラー展開は,

$\cos z = 1 + 0z + \frac{-1}{2!}z^2 + \frac{0}{3!}z^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots$

$= \underline{1 - \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots}$，収束半径は $\underline{\infty}$.

(3) $f(z) = \frac{1}{z-2}$ は $z = 2$ を除く全平面で正則で,

$f'(z) = -(z-2)^{-2}, f''(z) = 2(z-2)^{-3}, f^{(3)}(z) = -3!(z-2)^{-4}, \cdots$

より

$f(1) = -1. f'(1) = -1, f''(1) = -2, f^{(3)}(1) = -3!, \cdots$

したがって，1 を中心とするテイラー展開は,

$\frac{1}{z-2} = -1 - (z-1) + \frac{-2}{2!}(z-1)^2 + \frac{-3!}{3!}(z-1)^3 + \cdots + \frac{-n!}{n!}(z-1)^n + \cdots$

$= \underline{-1 - (z-1) - (z-1)^2 - (z-1)^3 - \cdots - (z-1)^n - \cdots}$,

収束半径は $\underline{1}$.

$\overline{\text{練習 15}}$

(1) $\sin \frac{1}{z} = \underline{\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} + \cdots}$

(2) $\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots\right)$

$= \underline{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n-2} + \cdots}$

練習 16

$f(z)=\dfrac{3}{(z-1)(z+2)}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+2}$ と部分分数分解できる.

(1) $|z|<1$ より $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ であるから

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2\left(1+\dfrac{z}{2}\right)}$$

$$=-(1+z+z^2+\cdots)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\cdots\right)=\underline{-\sum_0^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}}$$

(2) $1<|z|<2$ より $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1,\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ であるから

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}-\frac{1}{2\left(1+\dfrac{z}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\cdots\right)=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}}$$

(3) $2<|z|$ より $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1,\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$ であるから

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}-\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\cdots\right)=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}}$$

練習 17

(1) $$\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n-3}+\cdots$$

であるから，$z=0$ は $\dfrac{\sin z}{z^4}$ の <u>3 位の極</u> である.

(2) $$\frac{z}{z+1}=\frac{z}{1-(-z)}=z(1-z+z^2-\cdots+(-1)^nz^n+\cdots)$$
$$=z-z^2+z^3+\cdots+(-1)^nz^{n+1}+\cdots$$

であるから，$z=-1$ は $\dfrac{z}{z+1}$ の <u>除去可能特異点</u> である.

(3) $$\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n!}\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$$

であるから，$z=0$ は $\cos\dfrac{1}{z}$ の <u>真性特異点</u> である.

練習 18

(1) 孤立特異点は ± 2 で，1 位の極である．

$\mathrm{Res}[f,2]=\lim_{z\to 2}(z-2)\dfrac{z}{(z+2)(z-2)}=\lim_{z\to 2}\dfrac{z}{z+2}=\underline{\dfrac{1}{2}}$

$\mathrm{Res}[f,-2]=\lim_{z\to -2}(z+2)\dfrac{z}{(z+2)(z-2)}=\lim_{z\to -2}\dfrac{z}{z-2}=\underline{\dfrac{1}{2}}$

(2) 孤立特異点は $-1,3$ で，それぞれ 1 位の極，3 位の極である．

$\mathrm{Res}[f,-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\dfrac{1}{(z+1)(z-3)^3}=\lim_{z\to -1}\dfrac{1}{(z-3)^3}=\underline{-\dfrac{1}{64}}$

$\mathrm{Res}[f,3]=\dfrac{1}{2!}\lim_{z\to 3}\dfrac{d^2}{dz^2}\Big((z-3)^3\dfrac{1}{(z+1)(z-3)^3}\Big)$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{z\to 3}\dfrac{2}{(z+1)^3}=\underline{\dfrac{1}{64}}$

(3) 孤立特異点は 1 で，2 位の極である．

$\mathrm{Res}[f,1]=\dfrac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\dfrac{d}{dz}\Big((z-1)^2\dfrac{e^{iz}}{(z-1)^2}\Big)=\lim_{z\to 1}ie^{iz}=\underline{ie^{i}}$

(4) 孤立特異点は 0 で，2 位の極である．

$\mathrm{Res}[f,0]=\dfrac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\dfrac{d}{dz}\Big(z^2\dfrac{\sin z}{z^3}\Big)=\lim_{z\to 0}\dfrac{z\cos z-\sin z}{z^2}$

$=\lim_{z\to 0}\dfrac{-z\sin z}{2z}=\underline{0}$

練習 19

(1) C の内部にある孤立特異点は，$-1,3$ であるから，

留数定理と練習 20(2) より

$\displaystyle\int_C\frac{1}{(z+1)(z-3)^3}dz=2\pi i(\mathrm{Res}[f,-1]+\mathrm{Res}[f,3])$

$=2\pi i\Big(-\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}\Big)=\underline{0}$

(2) C の内部にある孤立特異点は $\dfrac{1}{2},\dfrac{i}{2}$ であるから，留数定理より

$\displaystyle\int_C\frac{1}{(2z-1)(2z-i)}dz=2\pi i\Big(\mathrm{Res}\Big[f,\frac{1}{2}\Big]+\mathrm{Res}\Big[f,\frac{i}{2}\Big]\Big)$

$=2\pi i\Big(\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{i-1}\Big)=\underline{0}$

(3) C の内部にある孤立特異点は -2 のみであるから，留数定理より

$\displaystyle\int_C\frac{\cos z}{(z-1)(z+2)^2}dz=2\pi i(\mathrm{Res}[f,-2])$

$=2\pi i\Big(-\dfrac{\sin 2}{3}-\dfrac{\cos 2}{9})=\underline{-i\dfrac{2\pi}{9}(3\sin 2+\cos 2)}$

$\overline{\underline{\text{練習 20}}}$

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(1-az)}$ とおく．

$0 < a < 1$ より，$f(z)$ の C 内にある孤立特異点は a のみであり，

これは 1 位の極である．よって，$\mathrm{Res}[f,a] = \lim_{z \to a} \dfrac{1}{1-az} = \dfrac{1}{1-a^2}$

したがって $\displaystyle\int_C f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f,a] = \underline{\dfrac{2\pi i}{1-a^2}}$

(2) C の方程式を $z = e^{it}\,(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とおくと

$dz = ie^{it}dt = izdt$ より $dt = \dfrac{1}{iz}dz = -\dfrac{i}{z}dz$

また，$\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であるので，

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}dt = \int_C \frac{-i}{1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2}\frac{1}{z}dz$

$\displaystyle= -i\int_C \frac{1}{z-az^2-a+a^2z}dz = -i\int_C \frac{1}{(z-a)(1-az)}dz$

$= -i \times \dfrac{2\pi i}{1-a^2} = \underline{\dfrac{2\pi}{1-a^2}}$

≪節末問題≫

1. 曲線 C として，$z = t + it\,(0 \leqq t \leqq 1)$ をとると

$x = t, y = t, \dfrac{dz}{dt} = 1 + i$ より

$$\int_C (x + y + ix^3)dz = \int_0^1 (t + t + it^3)(1 + i)dt$$

$$= (1+i)\Big[t^2 + \frac{1}{4}t^4 i\Big]_0^1 = (1+i)\frac{4+i}{4} = \underline{\frac{3+5i}{4}}$$

2. $f(z)$ は領域 D で連続であるから，$f(z)$ の積分値は積分経路に依存しない．したがって，次のような関数 $F(z)$ が定義できる．

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

ここで，$F'(z) = f(z)$ であるから，$F(z)$ は 1 階微分可能である．よって，グルサの公式（参照：教科書 P111 の注意）より，$F(z)$ は何回でも微分可能である．したがって，$f(z)$ は正則である．

3. (1) $$\frac{2}{(z-1)(3-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

$$= \frac{1}{z}\Big(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\Big) + \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots\Big)$$

$$= \underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \quad (1 < |z| < 3)}$$

(2) $$\frac{1-e^{2z}}{z^4} = \frac{1}{z^4}\Big\{1 - (1 + 2z + \frac{1}{2!}(2z)^2 + \cdots)\Big\}$$

$$= -\Big(\frac{2}{z^3} + \frac{2^2}{2!z^2} + \frac{2^3}{3!z} + \frac{2^4}{4!} + \cdots\Big) = \underline{-\sum_{n=-3}^{\infty}\frac{2^{4+n}}{(4+n)!}z^n \quad (0 < |z| < \infty)}$$

4. (1) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)(z+2)}$ の特異点は，1 位の極，$0, \pm 2$.

このうち積分路内にあるのは，$0, 2$ である．

したがって，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^3 - 4z}dz = 2\pi i(\mathrm{Res}[f, 0] + \mathrm{Res}[f, 2])$

$$= 2\pi i\Big(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\Big) = \underline{-\frac{\pi i}{4}}$$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ の特異点は，1 位の極 $\pm i$.

$r > 1$ のとき，ともに積分路内にあるので

$\displaystyle\int_C \frac{1}{(z+i)(z-i)}dz = 2\pi i(\mathrm{Res}[f,i]+\mathrm{Res}[f,-i]) = 2\pi i\Big(\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i}\Big) = 0$

$0 < r < 1$ のとき，コーシーの積分定理より 0.

したがって，$\underline{0}$

5. (1) C_R 上で $iz = iRe^{i\theta} = iR(\cos\theta + i\sin\theta) = -R\sin\theta + iR\cos\theta$

したがって，$|e^{iz}| = |e^{-R\sin\theta + iR\cos\theta}| = |e^{-R\sin\theta}||e^{iR\cos\theta}| = e^{-R\sin\theta}$

(2) $g(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}\ \Big(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\Big)$ とおくと $g'(\theta) = \dfrac{\cos\theta(\theta - \tan\theta)}{\theta^2} < 0$

したがって，$g(\theta)$ は単調減少であり，$g(\theta) > g\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = \dfrac{2}{\pi}$

よって，$\sin\theta \geqq \dfrac{2}{\pi}\theta\ \Big(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\Big)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}d\theta = \Big[-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) < \dfrac{\pi}{2R}$

(4) $C_R : z = Re^{i\theta}$ 上では (1) − (3) より $R \to \infty$ のとき

$\displaystyle\Big|\int_{C_R} f(z)dz\Big| = \Big|\int_0^{\pi} \frac{e^{iz}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta\Big| \leqq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta$

$\displaystyle= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta < \frac{\pi}{R} \to 0$

$C_\epsilon : z = \epsilon e^{i\theta}$ 上では，$\epsilon \to 0$ のとき

$\displaystyle\int_{C_\epsilon} f(z)dz = \int_\pi^0 \frac{e^{iz}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta}d\theta = -i\int_0^\pi e^{i\epsilon e^{i\theta}}d\theta \to -\pi i$

$C_+ : z = x\,(\epsilon \leqq x \leqq R)$ 上では,

$\displaystyle\int_{C_+} f(z)dz = \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx$

$C_- : z = -x\,(\epsilon \leqq x \leqq R)$ 上では,

$\displaystyle\int_{C_-} f(z)dz = \int_R^\epsilon \frac{e^{-ix}}{-x}(-dx) = -\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{x}dx$

コーシーの積分定理より，正則関数 $f(z)$ の曲線 C に沿っての複素積分は 0 なので,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_+} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_-} f(z)dz + \int_{C_\epsilon} f(z)dz$$

$$= \int_\epsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\epsilon} f(z)dz$$

$$= 2i \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_R} f(z)dz + + \int_{C_\epsilon} f(z)dz = 0$$

ここで，$R \to \infty, \epsilon \to 0$ とすれば，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$