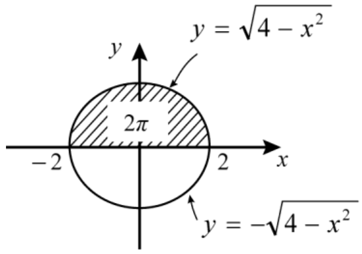
１章　ベクトル解析

４節　積分公式

p.74　節末問題

1.

⑴　ガウスの発散定理より



$$与式 = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}\,dV = \int_V \left\{ (x)_x + (y)_y + (z^2)_z \right\} dV$$

$$= \int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{z=1} (2+2z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \Big[\, 2z + z^2 \,\Big]_0^1 dy\,dx$$

$$= 3\int_{x=-2}^{x=2} 2\sqrt{4-x^2}\,dx = 6\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 6\cdot 2\pi = 12\pi$$

⑵　ガウスの発散定理より

$$与式 = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{f}\,dV = \int_V \left\{ (xy)_x + (yz)_y + (zx)_z \right\} dV$$

$$= \int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \left[(y+x)z + \frac{1}{2}z^2 \right]_0^1 dy\,dx$$

$$= \int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \left(y + x + \frac{1}{2} \right) dy\,dx = \int_{-2}^{2} \left[\frac{1}{2}y^2 + \left(x + \frac{1}{2} \right) y \right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx$$

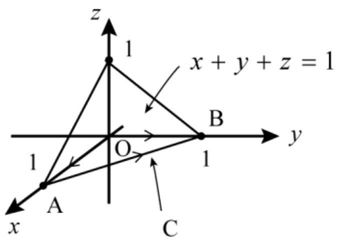
$$= \int_{-2}^{2} \left(x + \frac{1}{2} \right)\cdot 2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-2}^{2} \left(2x\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x^2} \right) dx$$

（第1項は奇関数なので積分値は0）

$$= 2\pi$$

2.　ストークスの定理より

$$与式 = \int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t}\, dS = \int_C \boldsymbol{f} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt$$



（C は△OAB の周）

OA は $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$，AB は $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$，

BO は $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$　と表されるので，

各々の曲線上では

$\boldsymbol{f} = (xy,\ z,\ xz) = (0,\ 0,\ 0),\ ((1-t)t,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0)$ となる

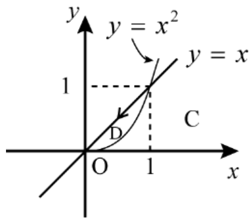
$$= \int_0^1 (t - t^2,\ 0,\ 0) \cdot (-1,\ 1,\ 0)\, dt$$

$$\left(AB上では \frac{dr}{dt} = \left\{ (1-t,\ t,\ 0) \right\}' = (-1,\ 1,\ 0) \right)$$

$$= \int_0^1 (-t + t^2)\, dt = \left[-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

3. C_1は$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, C_2は$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

と表されるので



$$\int_{C_1} f_1\,dx = \int_0^1 xy^2 \frac{dx}{dt}\,dt = \int_0^1 t^5 \cdot 1\,dt = \frac{1}{6}$$

$$\int_{C_2} f_1\,dx = \int_0^1 (1-t)(1-t)^2(-1)\,dt = \int_0^1 (t-1)^3\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}(t-1)^4\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

よって $\displaystyle\int_C f_1\,dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$ ……①

$$\int_{C_1} f_2\,dy = \int_0^1 x^3 \frac{dy}{dt}\,dt = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_{C_2} f_2\,dy = \int_0^1 (1-t)^3(-1)\,dt = \left[\frac{1}{4}(t-1)^4\right]_0^1 = \frac{-1}{4}$$

よって $\displaystyle\int_C f_2\,dy = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ ……② ①②より $\displaystyle\int_C f_1\,dx + f_2\,dy = \frac{-1}{12}$

一方グリーンの定理より

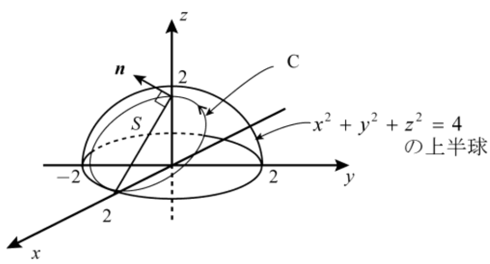
$$与式 = \iint_D (f_2)_x - (f_1)_y\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (3x^2 - 2xy)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=x} (3x^2 - 2xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \Big[\,3x^2 - xy^2\,\Big]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (-x^3 + x^5)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^5\right]_0^1 = \frac{-1}{12}$$

4. (2, 0, 0), (0, 0, 2)を結ぶ線分を直径とし単位法線ベクトルが

$\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)$ であるような円板を S とすると,



その周が C である。

与式をベクトル場 $\boldsymbol{f} = (y,\ z,\ x)$ についての線積分とみて

ストークスの定理を適用すると

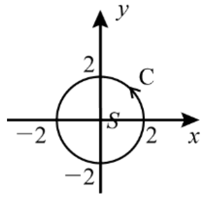
$$与式 = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS = \int_S ((x)_y - (z)_z,\ -(x)_x - (y)_z,\ (z)_x - (y)_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)\,dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_S (-1,\ -1,\ -1)\cdot(1,\ 0,\ 1)\,dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_S (-1-1)\,dS$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}}\int_S dS \quad (S\text{は半径}\sqrt{2}\text{の円なので面積は}2\pi)$$

$$= -\sqrt{2}\cdot 2\pi = -2\sqrt{2}\,\pi$$

5. C で囲まれた領域を S とすると，グリーンの定理より



$$\text{与式} = \int_S (y - xy^2)_x - (x^2y + x)_y \, dx\, dy$$

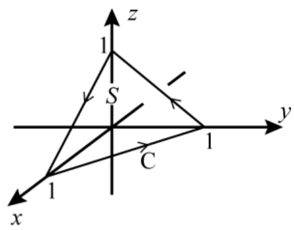
$$= \int_S (-y^2 - x^2)\, dx\, dy$$

（S は極座標で　$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta \quad 0 \leqq r \leqq 2,\ \ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$　で表される）

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left\{ \int_{r=0}^{r=2} (-r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta\, r)\, dr \right\} d\theta$$

$$= -\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = -8\pi$$

6. ストークスの定理より



$$\text{与式} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

$$\left(\begin{array}{l} \nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1,\ 1,\ 1) \\ \\ x + y + z = 1 \text{ の法線ベクトルの一つは}(1,\ 1,\ 1)\text{ なので } \boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1) \end{array} \right.$$

$$= \int_S \frac{1}{\sqrt{3}}(1+1+1)\, dS = \sqrt{3}\int_S 1\, dS$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \qquad (\ S\text{は辺}\sqrt{3}\text{の正三角形}\ )$$

7. $$\text{与式} = \int_S (4x,\ 3y,\ 2z) \cdot (x,\ y,\ z)\, dS$$

（ $\boldsymbol{f} = (4x,\ 3y,\ 2z)$ とし $(x,\ y,\ z)$ が半径 1，中心 O の球面上の点より
$\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z) = \boldsymbol{n}$ であることに注意して ）

$$= \int_S \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

$$= \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{f}\, dV$$

（ガウスの発散定理より）

$$= \int_V (4 + 3 + 2)\, dV$$

$$= 9 \times \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = 12\pi$$