１章　ベクトル解析

１節　ベクトルの演算

p.8～17　練習・問

問１

1. 左辺 $=(a_1,\ a_2,\ a_3)\cdot(b_1,\ b_2,\ b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=(b_1,\ b_2,\ b_3)\cdot(a_1,\ a_2,\ a_3)=$ 右辺

2. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(b_1,\ b_2,\ b_3)+(c_1,\ c_2,\ c_3)=(b_1+c_1,\ b_2+c_2,\ b_3+c_3)$　より第１の式は
$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(a_1,\ a_2\ \ a_3)\cdot(b_{,1}+c_1,\ b_2+c_2,\ b_3+c_3)=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$
$=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$　　第2式も同様に示せる。

3. 左辺 $=k(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=ka_1b_1+ka_2b_2+ka_3b_3=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)\cdot(b_1,\ b_2,\ b_3)=(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$,
左辺 $=ka_1b_1+ka_2b_2+ka_3b_3=(a_1,\ a_2,\ a_3)\cdot(kb_1,\ kb_2,\ kb_3)=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})$

4. $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0,\ 0)\cdot(1,\ 0,\ 0)=1\times1+0\times0+0\times0=1$,
同様に　$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=(0,\ 1,\ 0)\cdot(0,\ 1,\ 0)=0+1+0=1$,　$\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=(0,\ 0,\ 1)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0+0+1=1$,
$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=(1,\ 0,\ 0)\cdot(0,\ 1,\ 0)=1\times0+0\times1+0\times0=0$
同様に　$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=(0,\ 1,\ 0)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0+0+0=0$,　$\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=(0,\ 0,\ 1)\cdot(1,\ 0,\ 0)=0$

練習１

$\boldsymbol{b}=(-3,\ 0,\ 1)$　を考えると　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-3)+2\times0+3\times1=0$

よって内積の性質５より，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ となる。

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2}=\sqrt{10}$　より　$\boldsymbol{e}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3,\ 0,\ 1)$　とすればよい。

問 2

1. 左辺 $= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$ 右辺

2. 左辺 $= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$ 右辺

   左辺 $= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$ 右辺

3. 左辺 $= k\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$,

   左辺 $= k\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b})$

4. $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

   同様に　$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$,　$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

   一方　$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\boldsymbol{e}_1 - 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$

   同様に　$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_1$,　$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2$

練習 2

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-3)\boldsymbol{e}_1 - (-2-3)\boldsymbol{e}_2 + (2+1)e_3 = (-2,\ 5,\ 3)$$

練習 3

⑴　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1-0)\boldsymbol{e}_1-(2-3)\boldsymbol{e}_2+(0+1)\boldsymbol{e}_3=(-1,\ 1,\ 1)$　より

$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$,　$\boldsymbol{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ 1,\ 1)$

⑵　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(0-6)\boldsymbol{e}_1-(2+3)\boldsymbol{e}_2+(-4-0)\boldsymbol{e}_3=(-6,\ 5,\ -4)$　より

$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-6)^2+(-5)^2+(-4)^2}=\sqrt{36+25+16}=5\sqrt{5}$,　$\boldsymbol{e}=\pm\dfrac{1}{5\sqrt{5}}(6,\ 5,\ 4)$

練習 4

$$V=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 6 & -1 & 7\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 6 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1$$

練習 5

$\boldsymbol{a}=(0,\ 1,\ 2)$, $\boldsymbol{b}=(-1,\ 2,\ 3)$, $\boldsymbol{c}=(1,\ -1,\ 1)$　のとき

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\times(-1)+1\times2+2\times3=8$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\times1+1\times(-1)+2\times1=1$

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-1\times1+2\times(-1)+3\times1=0$　より

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=1(-1,\ 2,\ 3)-8(1,\ -1,\ 1)=(-9,\ 10,\ -5)$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=1(-1,\ 2,\ 3)-0(0,\ 1,\ 2)=(-1,\ 2,\ 3)$