１章　ベクトル解析

２節　ベクトル関数の微分積分

p.19～39　練習・問

練習 1

⑴　$\boldsymbol{f}'(t)=(2t,\ 2,\ 1)$　より　$\boldsymbol{f}'(2)=(4,\ 2,\ 1)$

⑵　$\boldsymbol{f}'(t)=(2,\ 2t,\ 0)$　より　$\boldsymbol{f}'(2)=(2,\ 4,\ 0)$

問 1　各関数において「(t)」を省き $f_1(t)$ を f_1 などと略記する。

1.　$\{(c_1,\ c_2,\ c_3)\}'=((c_1)',\ (c_2)',\ (c_3)')=(0,\ 0,\ 0)$

2.　左辺 $=\{(f_1+g_1,\ f_2+g_2,\ f_3+g_3)\}'=(f_1'+g_1',\ f_2'+g_2',\ f_3'+g_3')$

$=(f_1',\ f_2',\ f_3')+(g_1',\ g_2',\ g_3')=$ 右辺

3.　左辺 $=\{(\varphi f_1,\ \varphi f_2,\ \varphi f_3)\}'=((\varphi f_1)',\ (\varphi f_2)',\ (\varphi f_3)')$

$=(\varphi' f_1+\varphi f_1',\ \varphi' f_2+\varphi f_2',\ \varphi' f_3+\varphi f_3')$

$=(\varphi' f_1,\ \varphi' f_2,\ \varphi' f_3)+(\varphi f_1',\ \varphi f_2',\ \varphi f_3')=$ 右辺

4.　3.の証明の φ のところに $\dfrac{1}{\varphi}$ を代入すればよいので，第 4 式に代入して

$$-\frac{\varphi'}{\varphi^2}(f_1,\ f_2,\ f_3)+\frac{1}{\varphi}(f_1',\ f_2',\ f_3')$$

$$=\frac{(f_1',\ f_2',\ f_3')\varphi-\varphi'(f_1,\ f_2,\ f_3)}{\varphi^2}=4\text{ の右辺}$$

5.　左辺 $=(f_1g_1+f_2g_2+f_3g_3)'=(f_1g_1)'+(f_2g_2)'+(f_3g_3)'$

$=f_1'g_1+f_1g_1'+f_2'g_2+f_2g_2'+f_3'g_3+f_3g_3'$

$=(f_1',\ f_2',\ f_3')\cdot(g_1,\ g_2,\ g_3)+(f_1,\ f_2,\ f_3)\cdot(g_1',\ g_2',\ g_3')$

6. 左辺 $=\left\{\left(f_2g_3-f_3g_2,\ \ f_3g_1-f_1g_3,\ \ f_1g_2-f_2g_1\right)\right\}'$

$=\left\{\left(f_2g_3,\ \ f_3g_1,\ \ f_1g_2\right)-\left(f_3g_2,\ \ f_1g_3,\ \ f_2g_1\right)\right\}'$

$=\left(f_2'g_3+f_2g_3',\ \ f_3'g_1+f_3g_1',\ \ f_1'g_2+f_1g_2'\right)$

$\quad -\left(f_3'g_2+f_3g_2',\ \ f_1'g_3+f_1g_3',\ \ f_2'g_1+f_2g_1'\right)$

$=\left(f_2'g_3-f_3'g_2,\ \ f_3'g_1-f_1'g_3,\ \ f_1'g_2-f_2'g_1\right)$

$\quad +\left(f_2g_3'-f_3g_2',\ \ f_3g_1'-f_1g_3',\ \ f_1g_2'-f_2g_1'\right)$

$=$ 右辺

7. 左辺 $=\left\{\left(f_1(\psi(u)),\ \ f_2(\psi(u)),\ \ f_3(\psi(u))\right)\right\}'$

$=\left(f_1'(t)\psi'(u),\ \ f_2'(t)\psi'(u),\ \ f_3'(t)\psi'(u)\right)$

$=\psi'(u)\left(f_1',\ \ f_2',\ \ f_3'\right)$

$=$ 右辺

練習 2

$$\left\{\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)\right\}'=(2t,\ 2,\ 0)\cdot(e^t,\ \cos t,\ \sin t)+(t^2,\ 2t,\ 1)\cdot(e^t,\ -\sin t,\ \cos t)$$

$$=2te^t+2\cos t+t^2e^t-2t\sin t+\cos t$$

$$=(t^2+2t)e^t-2t\sin t+3\cos t$$

一方，$\left\{\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)\right\}'$

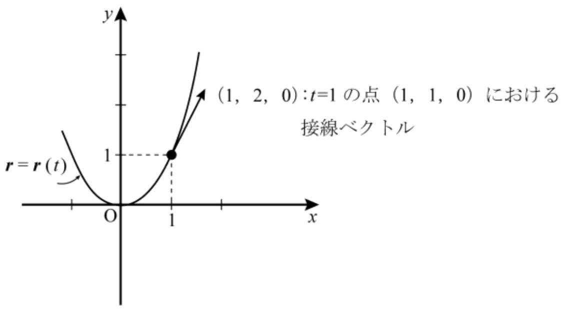
$$=(2t,\ 2,\ 0)\times(e^t,\ \cos t,\ \sin t)+(t^2,\ 2t,\ 1)\times(e^t,\ -\sin t,\ \cos t)$$

$$=(2\sin t,\ -2t\sin t,\ 2t\cos t-2e^t)+(2t\cos t+\sin t,\ -t^2\cos t+e^t,\ -t^2\sin t-2t\,e^t)$$

$$=(2t\cos t+3\sin t,\ -2t\sin t-t^2\cos t+e^t,\ 2t\cos t-t^2\sin t-2e^t(t+1))$$

練習 3

$\boldsymbol{r}'(t)=(1,\ 2t,\ 0)$ より $\boldsymbol{r}'(1)=(1,\ 2,\ 0)$



問 2

$$\boldsymbol{f}_u = (u,\ v) = \lim_{\varDelta u \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(u+\varDelta u,\ v) - \boldsymbol{f}(u,\ v)\,)}{\varDelta u}$$

$$= \lim_{\varDelta u \to 0} \frac{1}{\varDelta u}\{(f_1(u+\varDelta u,\ v),\ f_2(u+\varDelta u,\ v),\ f_3(u+\varDelta u,\ v))$$

$$-(f_1(u,\ v),\ f_2(u,\ v),\ f_3(u,\ v))\}$$

$$= \lim_{\varDelta u \to 0}\left(\frac{f_1(u+\varDelta u,\ v) - f_1(u,\ v)}{\varDelta u},\ \frac{f_2(u+\varDelta u,\ v) - f_2(u,\ v)}{\varDelta u},\ \frac{f_3(u+\varDelta u,\ v) - f_3(u,\ v)}{\varDelta u} \right)$$

$$= ((f_1)_u,\ (f_2)_u,\ (f_3)_u)$$

練習 4

$\boldsymbol{f}_u = (2u,\ 0,\ 2v)$

$\boldsymbol{f}_v = (0,\ 2v,\ 2u)$

問 3

1. $$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{1}{\varDelta t}\{\boldsymbol{f}(u(t+\varDelta t),\ v(t+\varDelta t)) - \boldsymbol{f}(u(t),\ v(t))\}$$

$$= \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{1}{\varDelta t}\{(f_1(u(t+\varDelta t),\ v(t+\varDelta t)),\ f_2(u(t+\varDelta t),\ v(t+\varDelta t)),\ f_3(u(t+\varDelta t),\ v(t+\varDelta t))$$

$$-(f_1(u(t),\ v(t)),\ f_2(u(t),\ v(t)),\ f_3(u(t),\ v(t))\}$$

$$= \lim_{\varDelta t \to 0}\left(\frac{f_1(u(t+\varDelta t),\ v(t+\varDelta t)) - f_1(u(t),\ v(t))}{\varDelta t},\right.$$

$$\frac{f_2(u(t+\varDelta t),\ v(t+\varDelta t)) - f_2(u(t),\ v(t))}{\varDelta t},$$

$$\left.\frac{f_3(u(t+\varDelta t),\ v(t+\varDelta t)) - f_3(u(t),\ v(t))}{\varDelta t}\right)$$

$\boldsymbol{f}(u,\ v)$の x 成分である $f_1(u,\ v)$について，$(f_1)_u$，$(f_1)_v$ が存在し連続で
$u(t)$，$v(t)$が微分可能なら

$\dfrac{df_1}{dt} = (f_1)_u u'(t) + (f_1)_v v'(t)$となり，$y$ 成分，z 成分も同様に求まる。

$$= ((f_1)_u u' + (f_1)_v v',\ (f_2)_u u' + (f_2)_v v',\ (f_3)_u u' + (f_3)_v v')$$

$$= ((f_1)_u,\ (f_2)_u,\ (f_3)_u)u' + ((f_1)_v,\ (f_2)_v,\ (f_3)_v)v'$$

$$= \boldsymbol{f}_u u' + \boldsymbol{f}_v v'$$

2. 偏微分するときは t を定数扱いして s で微分するので 1.を用いることで（i）が得られる。
$\boldsymbol{f}$ を t で偏微分するときも同様で（ii）を得る。

練習 5

⑴　$\boldsymbol{f}'(t) = (1,\ 0,\ v)\cdot 1 + (0,\ 1,\ u)\cdot 1 = (1,\ 1,\ 2t)$

⑵　$\boldsymbol{f}(t) = (2u,\ 0,\ v)\cdot s(-\sin t) + (0,\ 2v,\ u)\cdot s\cos t$

$= (2u,\ 0,\ v)(-v) + (0,\ 2v,\ u)u = (-2uv,\ 2uv,\ -v^2 + u^2)$

$= s^2(-\sin 2t,\ \sin 2t,\ \cos 2t)$

練習 6

⑴　(i)　$x = u,\ \ y = v,\ \ z = u^2 + v^2$　より　$z = x^2 + y^2$

(ii)　$v = \dfrac{\pi}{2}$　のとき　$z = x^2 + \dfrac{\pi^2}{4}$

(iii)　$u = 1$　のとき　$z = 1 + y^2$

(iv)　$\boldsymbol{r}_u = (1,\ 0,\ 2u)$　より　$\boldsymbol{r}_u = (1,\ 0,\ 2)$

$\boldsymbol{r}_v = (0,\ 1,\ 2v)$　より　$\boldsymbol{r}_v = (0,\ 1,\ \pi)$

(v)　$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \pi \end{vmatrix} = (-1,\ -\pi,\ 1)$

⑵　(i)　$x = \cos u,\ \ y = \sin u,\ \ z = v$　より　$x^2 + y^2 = 1$　　(z は任意）（z 軸中心半径 1 の円筒）

(ii)　$v = \dfrac{\pi}{2}$　のとき　$x^2 + y^2 = 1,\ \ z = \dfrac{\pi}{2}$

(iii)　$u = 1$　のとき　$x = \cos 1,\ \ y = \sin 1,\ \ z$ は任意

(iv)　$\boldsymbol{r}_u = (-\sin u,\ \cos u,\ 0)$　より　$\boldsymbol{r}_u = (-\sin 1,\ \cos 1,\ 0)$。　　$\boldsymbol{r}_u = (0,\ 0,\ 1)$

(v)　$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -\sin 1 & \cos 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos 1,\ \sin 1,\ 0)$

練習 7

$\boldsymbol{r}' = (-\sin t,\ \cos t,\ 1)$ より $\boldsymbol{r}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1,\ 0,\ 1)$

$\left|\boldsymbol{r}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ より $\boldsymbol{t}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ 1)$

一方 $\boldsymbol{t} = \dfrac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = \dfrac{(-\sin t,\ \cos t,\ 1)}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}$ より $\boldsymbol{t}' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$ なので

$\boldsymbol{t}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 0)$

よって $\boldsymbol{n}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 0)}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = (0,\ -1,\ 0)$

練習 8

$\boldsymbol{r}'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ 0)$ より $\dfrac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + 0^2} = a$

よって単位接線ベクトルは $\boldsymbol{t}(t) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{r}'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 0)$

したがって

$\boldsymbol{t}'(t) = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$ なので

$\boldsymbol{t}'(s) = \dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{ds}{dt}} = \dfrac{1}{a}(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$

よって曲率 $\kappa = |\boldsymbol{t}'(s)| = \dfrac{1}{a}\sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + 0^2} = \dfrac{1}{a}$

練習 9

$\boldsymbol{r}'(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 1)$ より $\dfrac{ds}{dt} = |\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

よって単位接線ベクトルは $\boldsymbol{t}(t) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\boldsymbol{r}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 1)$

$\boldsymbol{t}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)$ より $\boldsymbol{t}'(s) = \dfrac{d\boldsymbol{t}}{dt}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{ds}{dt}} = \dfrac{1}{5}(-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)$

より曲率 $\kappa = |\boldsymbol{t}'(s)| = \dfrac{1}{5}\sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 0^2} = \dfrac{2}{5}$

練習 10

円 $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)$　（p.31　例題 1(1)）は,

$\boldsymbol{t}(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$ なので $\boldsymbol{t}'(t)=2(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$, $|\boldsymbol{t}'(t)|=2$

よって p.29　2 式より　$\boldsymbol{n}(t)=(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$

従って　$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=2(-\sin t,\ \cos t,\ 0)\times(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)=(0,\ 0,\ 2)$ となり

$\boldsymbol{b}'(t)=(0,\ 0,\ 0)$ より $\boldsymbol{b}'(s)=(0,\ 0,\ 0)$　よって p.32　⑧式より

$(0,\ 0,\ 0)=-\tau(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$ となり　$\tau=0$ を得る。

練習 11

$\boldsymbol{v}(t)=(1,\ 2t,\ 2t)$, $v(t)=\sqrt{1+4t^2+4t^2}$, $\boldsymbol{a}(t)=(0,\ 2,\ 2)$ より

$\boldsymbol{v}(1)=(1,\ 2,\ 2)$, $v(1)=3$, $\boldsymbol{a}(1)=(0,\ 2,\ 2)$

一方　$v'(t)=\dfrac{1}{2}(1+8t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 16t=8t(1+8t^2)^{-\frac{1}{2}}$ より $v'(1)=\dfrac{8}{3}$

$\boldsymbol{t}(1)=\dfrac{\boldsymbol{v}(1)}{v(1)}=\dfrac{1}{3}(1,\ 2,\ 2)$

以上より与式は　$(0,\ 2,\ 2)=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{3}(1,\ 2,\ 2)+a_n\boldsymbol{n}$

よって　$a_n\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{-8}{9},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$

従って　$|a_n\boldsymbol{n}|=a_n=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

結局　$\boldsymbol{a}=\dfrac{8}{3}\boldsymbol{t}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{n}$

問 4

1. 微分法の公式 2（p.21）より

$$\left(\int \boldsymbol{f}(t)\ dt+\int \boldsymbol{g}(t)\ dt\right)'=\left(\int \boldsymbol{f}(t)dt\right)'+\left(\int \boldsymbol{g}(t)dt\right)'=\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{g}(t)$$

2. 微分法の公式 3（p.21）より

$$\left(k\int \boldsymbol{f}(t)dt\right)'=(k)'\int \boldsymbol{f}(t)dt+k\left(\int \boldsymbol{f}(t)dt\right)'=0+k\boldsymbol{f}(t)=k\boldsymbol{f}(t)$$

3. 微分法の公式 5（p.21）より

$$\left(\boldsymbol{c}\cdot\int \boldsymbol{f}(t)dt\right)'=(\boldsymbol{c})'\cdot\int \boldsymbol{f}(t)dt+\boldsymbol{c}\cdot\left(\int \boldsymbol{f}(t)dt\right)'=\boldsymbol{0}\cdot\int \boldsymbol{f}(t)dt+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f}(t)$$

4. 微分法の公式 6（p.21）より

$$\left(\boldsymbol{c}\times\int \boldsymbol{f}(t)dt\right)'=(\boldsymbol{c})'\int f(\boldsymbol{t})dt+\boldsymbol{c}\times\left(\int f(\boldsymbol{t})dt\right)'=\boldsymbol{0}\times\int f(t)dt+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{f}(t)$$

練習 12

$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{f}(t)=(8t^3-9t^2,\ -(4t^3-6t),\ 3t^2-4t)$ より

$$\int \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{f}(t)dt=(2t^4-3t^3+c_1,\ -(t^4-3t^2)+c_2,\ t^3-2t^2+c_3)$$

一方　$\int \boldsymbol{f}(t)dt=(t^2+c_1,\ t^3+c_2,\ t^4+c_3)$ より

$$\boldsymbol{c}\times\int \boldsymbol{f}(t)dt=(2(t^4+c_3)-3(t^3+c_2),\ -\{t^4+c_3-3(t^2+c_1)\},\ t^3+c_2-2(t^2+c_1))$$

$$=(2t^4-3t^3+c_4,\ -t^4+3t^2+c_5,\ t^3-2t^2+c_6)$$

（c_4， c_5， c_6は積分定数）

問 5

1, 2. 微分公式 3（p.21）より $\{\varphi(t)\boldsymbol{f}(t)\}' = \varphi'(t)\boldsymbol{f}(t) + \varphi(t)\boldsymbol{f}'(t)$

両辺を積分すると不定積分の公式 1（p.37）より

$$\varphi(t)\boldsymbol{f}(t) = \int \varphi'(t)\boldsymbol{f}(t)\,dt + \int \varphi(t)\boldsymbol{f}'(t)\,dt$$

第 1 項を左辺へ移項して 1, 第 2 項を左辺へ移項すると 2 を得る。

3. 微分方式 5（p.21）より $(\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t))' = \boldsymbol{f}'(t)\cdot\boldsymbol{g}(t) + \boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}'(t)$

両辺を積分すると不定積分の公式 1（p.37）より

$$\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t) = \int \boldsymbol{f}'(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)\,dt + \int \boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}'(t)\,dt$$

第 1 項を左辺へ移項して 3 を得る。

練習 13

$$\int \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}'\,dt = (1,\ 2,\ 3t)\cdot(e^t,\ e^{2t},\ 0) - \int (0,\ 0,\ 3)\cdot(e^t,\ e^{2t},\ 0)\,dt$$

$$= e^t + 2e^{2t} + c$$

問 6

$\boldsymbol{F}(t) = (F_1(t),\ F_2(t),\ F_3(t))$ とおくと p.37① より

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}(t)\,dt = \left(\Big[F_1(t)\Big]_\alpha^\beta,\ \Big[F_2(t)\Big]_\alpha^\beta,\ \Big[F_3(t)\Big]_\alpha^\beta\right) \quad \text{(p.39　③より)}$$

$$= (F_1(\beta) - F_1(\alpha),\ F_2(\beta) - F_2(\alpha),\ F_3(\beta) - F_3(\alpha))$$

$$= (F_1(\beta),\ F_2(\beta),\ F_3(\beta) - (F_1(\alpha),\ F_2(\alpha),\ F_3(\alpha))$$

$$= \boldsymbol{F}(\beta) - \boldsymbol{F}(\alpha)$$

練習 14

$$\int_0^\pi \boldsymbol{f}(t)\,dt = \left(\Big[\sin t\Big]_0^\pi,\ \Big[-\cos t\Big]_0^\pi,\ \Big[2t^2\Big]_0^\pi\right) = (0,\ 2,\ 2\pi^2)$$