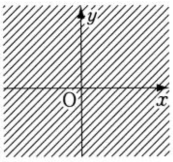
５章　偏微分

１節　2 変数関数と偏微分

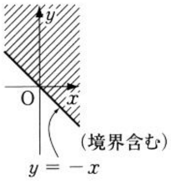
A

200

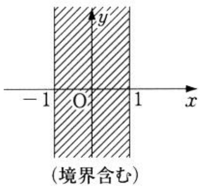
⑴　任意の x，y を代入できるので定義域は xy 平面の点全体。



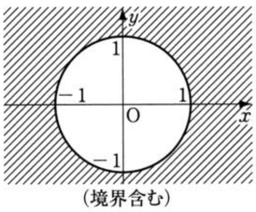
⑵　$y=-x$ より上の領域。



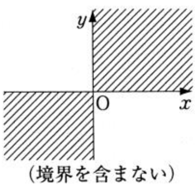
⑶　$0 \leqq 1-x^2$ となる点全体なので $x^2-1 \leqq 0$ より，
　$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす点全体。



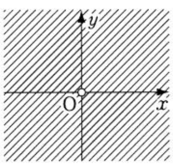
⑷　$0 \leqq x^2+y^2-1$ となる点全体なので
　$x^2+y^2 \geqq 1$ より，原点中心，半径 1 の円の外部および周。



⑸　$0<xy$ となる点全体なので
　$0<x$　かつ　$0<y$　　または　$0>x$　かつ　$0>y$　となる領域。

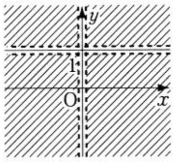


⑹　$0<x^2+y^2$ となる点全体なので　(0，0) 以外の点すべて。



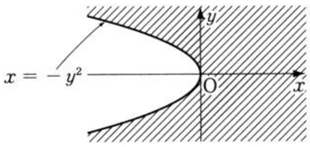
(7)　$x(y-1) \neq 0$ となる点全体なので

$x=0$ または $y=1$ となる点を除くすべての点全体。



(8)　$0 < x + y^2$ となる点全体なので

$x > -y^2$ より　$x = -y^2$ より右の領域。



（境界を含まない）

201

(1)　$f(x, y)$ は，$y=0$ にそって近づけると $\dfrac{0}{x+0} = 0$，$y = x$ にそって近づけると

$\dfrac{x}{x+x} = \dfrac{1}{2}$ に近づくので極限値なし。

(2)　$x=0$ にそって近づけると $\dfrac{0}{0+y^2} = 0$，$y=x$ にそって近づけると

$\dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$，に近づくので極限値なし。

(3)　$x=0$ にそって近づけると $\dfrac{0}{0+y^2} = 0$，$y=x$ にそって近づけると

$\dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$，に近づくので極限値なし。

(4)　$\displaystyle \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$　$(-1 \leqq \cos^2\theta\sin\theta \leqq 1$ より$)$

(5)　$\displaystyle \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} x\cos\frac{x}{y} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\cos\left(\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta}\right) = 0$　$\left(\ -1 \leqq \cos\theta\cos\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \leqq 1 \text{ より}\right)$

(6)　$\displaystyle \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} y\sin\frac{y}{x} = \lim_{r\to 0} r\sin\theta\sin\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) = 0$　$\left(\ -1 \leqq \sin\theta\sin\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \leqq 1 \text{ より}\right)$

(7)　$\displaystyle \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{|r|} = \lim_{r\to 0} |r|\cos 2\theta = 0$$

$(-1 \leqq \cos 2\theta \leqq 1$ より$)$

(8) $$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\ r\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{|r|}=\lim_{r\to 0}|r|\cdot\frac{1}{2}\sin\theta=0\qquad(-1\leqq\sin 2\theta\leqq 1\text{より})$$

202

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\ r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin^2\theta=0\qquad(-1\leqq\cos\theta\sin^2\theta\leqq 1\text{より})$$

一方，与式より $f(0,\ 0)=0$　よって $f(x,\ y)$ は $(0,\ 0)$ で連続である。

203

(1) $f_x=3x^2-3y$ より $f_x(1,\ 0)=3$

$f_y=-3x+3y^2$ より $f_y(1,\ 0)=-3$

(2) $f_x=1+4xy$ より $f_x(1,\ 0)=1$

$f_y=2x^2$ より $f_y(1,\ 0)=2$

(3) $f_x=e^y$ より $f_x(1,\ 0)=1$

$f_y=xe^y$ より $f_y(1,\ 0)=1$

(4) $f_x=e^{xy}+(x+y)ye^{xy}$ より $f_x(1,\ 0)=1+0=1$

$f_y=e^{xy}+(x+y)xe^{xy}$ より $f_y(1,\ 0)=1+1=2$

(5) $f_x=2y(-x^{-2})$ より $f_x(1,\ 0)=0$

$f_y=\dfrac{2}{x}$ より $f_y(1,\ 0)=2$

(6) $f_x=\dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\dfrac{2y}{(x+y)^2}$ より $f_x(1,\ 0)=0$

$f_y=\dfrac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\dfrac{-2x}{(x+y)^2}$ より $f_y(1,\ 0)=-2$

(7) $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^3}$ より $f_x(1,\ 0)=2$

$f_y=\dfrac{3y^2}{x^2+y^3}$ より $f_y(1,\ 0)=0$

(8) $f_x=2\pi\cos\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{2}y\right)$ より

$f_x(1,\ 0)=2\pi\cos 2\pi=2\pi$

$f_y=\dfrac{\pi}{2}\cos\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{2}y\right)$ より

$f_y(1,\ 0)=\dfrac{\pi}{2}\cos 2\pi=\dfrac{\pi}{2}$

204

(1) $f_x = y^2$ より $f_{xx} = 0,\quad f_{xy} = 2y$

$f_y = 2xy$ より $f_{yx} = 2y,\quad f_{yy} = 2x$

(2) $f_x = \dfrac{1}{xy^2} \times y^2 = x^{-1}$ より $f_{xx} = -\dfrac{1}{x^2},\quad f_{xy} = 0$

$f_y = \dfrac{1}{xy^2} \times 2xy = \dfrac{2}{y}$ より $f_{yx} = 0,\quad f_{yy} = 2 \cdot (-y^{-2}) = -\dfrac{2}{y^2}$

(3) $f_x = \dfrac{-y \cdot 1}{(x+y)^2} = -y(x+y)^{-2}$ より $f_{xx} = -y \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \dfrac{2y}{(x+y)^3}$

$f_{xy} = -(x+y)^{-2} - y \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \dfrac{-(x+y)+2y}{(x+y)^3} = \dfrac{-x+y}{(x+y)^3}$

$f_y = \dfrac{(x+y)-y}{(x+y)^2} = x(x+y)^{-2}$ より $f_{yx} = (x+y)^{-2} + x \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \dfrac{x+y-2x}{(x+y)^3} = \dfrac{-x+y}{(x+y)^3}$

$f_{yy} = x \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \dfrac{-2x}{(x+y)^3}$

(4) $f_x = 3(3x+2y)^2 \cdot 3 = 9(3x+2y)^2$ より

$f_{xx} = 9 \cdot 2(3x+2y) \cdot 3 = 54(3x+2y)$

$f_{xy} = 9 \cdot 2(3x+2y) \cdot 2 = 36(3x+2y)$

$f_y = 3(3x+2y)^2 \cdot 2 = 6(3x+2y)^2$ より

$f_{yx} = 6 \cdot 2(3x+2y) \cdot 3 = 36(3x+2y)$

$f_{yy} = 12(3x+2y) \cdot 2 = 24(3x+2y)$

(5) $f_x = yx^{y-1}$ より

$f_{xx} = y \cdot (y-1)x^{y-2}$

$f_{xy} = x^{y-1} + y(\log x) \cdot x^{y-1}$

$f_y = (\log x) \cdot x^y$ より

$f_{yx} = \dfrac{1}{x} \cdot x^y + (\log x) \cdot yx^{y-1} = x^{y-1} + y(\log x) \cdot x^{y-1}$

$f_{yy} = (\log x)^2 \cdot x^y$

(6) $f_x=\dfrac{1}{(xy)^2+1}\cdot y$ より

$$f_{xx}=\frac{-y\cdot(2xy\cdot y)}{\{(xy)^2+1\}^2}=\frac{-2xy^3}{\{(xy)^2+1\}^2}$$

$$f_{xy}=\frac{\{(xy)^2+1\}-y(2xy\cdot x)}{\{(xy)^2+1\}^2}=\frac{(xy)^2+1-2x^2y^2}{\{(xy)^2+1\}^2}=\frac{-(xy)^2+1}{\{(xy)^2+1\}^2}$$

$f_y=\dfrac{1}{(xy)^2+1}\cdot x$ より

$$f_{yx}=\frac{\{(xy)^2+1\}-x\cdot 2xy\cdot y}{\{(xy)^2+1\}^2}=\frac{(xy)^2+1-2x^2y^2}{\{(xy)^2+1\}^2}=\frac{-(xy)^2+1}{\{(xy)^2+1\}^2}$$

$$f_{yy}=\frac{-x(2xy\cdot x)}{\{(xy)^2+1\}^2}=\frac{-2x^3y}{\{(xy)^2+1\}^2}$$

(7) $f_x=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ より

$$f_{xx}=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}+x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy}=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f_y=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y=y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ より

$$f_{yx}=y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy}=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}+y\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=\frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(8) $f_x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} \cdot y(-x^{-2}) = \dfrac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}} = yx^{-1}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_{xx} = y\left\{-x^{-2}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right\} = \frac{y\{-(x^2-y^2)-x^2\}}{x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y(-2x^2+y^2)}{x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy} = x^{-1}(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} + yx^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2y) = \frac{x^2-y^2+y^2}{x(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f_y = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = -(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_{yx} = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy} = \frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2y) = \frac{-y}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

205

(1) $\dfrac{dz}{dt} = 2x\cos t + 4y(-\sin t)$

$= 2\sin t\cos t - 4\cos t\sin t$

$= -2\sin t\cos t = -\sin 2t$

(2) $\dfrac{dz}{dt} = y(e^t - e^{-t}) + x\cdot 2e^t$

$= 2e^t(e^t-e^{-t}) + 2(e^t+e^{-t})e^t$

$= 2e^{2t} - 2 + 2e^{2t} + 2 = 4e^{2t}$

(3) $\dfrac{dz}{dt} = 3x^2(-t^{-2}) + 3y^2\cdot 2t$

$= 3\cdot t^{-2}\cdot(-t^{-2}) + 3t^4\cdot 2t$

$= -\dfrac{3}{t^4} + 6t^5$

(4) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2}\cdot e^t$

$+ \dfrac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}\cdot(-e^{-t})$

$= \dfrac{2ye^t}{(x+y)^2} + \dfrac{2xe^{-t}}{(x+y)^2} = \dfrac{2}{(x+y)^2} + \dfrac{2}{(x+y)^2}$

$= \dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$

206

(1) $f_u = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot 2 + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot 2 = \dfrac{4(x+y)}{x^2+y^2} = \dfrac{8u}{4u^2+9v^2}$

$f_v = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot 3 + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot(-3) = \dfrac{6(x-y)}{x^2+y^2} = \dfrac{36v}{4u^2+9v^2}$

(2) $f_u = 3x^2y^2\cdot(-\sin u) + x^3\cdot 2y\cdot\cos v$

$= 3\cos^2 u\ \sin^2 v\cdot(-\sin u) + \cos^3 u\cdot 2\sin v\cdot 0$

$= -3\cos^2 u\sin u\sin^2 v + 2\cos^3 u\sin v\cos v$

$f_v = 2\cos^3 u\sin v\cos v$

(3) $f_u = 2x\cdot e^u\cos v - 4y\,e^u\sin v = 2e^{2u}\cos^2 v - 4e^{2u}\sin^2 v$

$f_v = 2xe^u(-\sin v) - 4ye^u\cos v$

$= -2e^{2u}\cos v\sin v - 4e^{2u}\sin v\cos v$

$= -6e^{2u}\cos v\sin v = -3e^{2u}\sin 2v$

207

(1) 面積 $f(x,\ y) = xy$ について $f_x = y,\ \ f_y = x$ より $f(6.1,\ 7.9) \fallingdotseq 6.8 + 8\cdot 0.1 - 6\cdot 0.1 = 48.2\ (\mathrm{cm}^2)$

(2) 長さ $f(x,\ y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について $f_x = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$

$f_y = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y$ より

$f(50+2.6,\ 120-2.6) \fallingdotseq \sqrt{50^2+120^2} + (50^2+120^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 50\cdot 2.6 + (50^2+120^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 120\cdot(-2.6)$

$\fallingdotseq 130 + \dfrac{130}{130} - \dfrac{12\times 26}{130} = 128.6\,(\mathrm{cm})$

208

(1) $dz = -\sin(3x+2y)\cdot 3\,dx$

$\quad - \sin(3x+2y)\cdot 2\,dy$

$= -\sin(3x+2y)(3dx+2dy)$

(2) $dz = \dfrac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}\,dx + \dfrac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}\,dy$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}(y\,dx + x\,dy)$

(3) $dz = \left(-yx^{-2} - \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} + xy^{-2}\right)dy$

$= \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy$

$= -\dfrac{y^2+x^2}{x^2y}\,dx + \dfrac{y^2+x^2}{xy^2}\,dy$

$= \dfrac{x^2+y^2}{xy}\left(-\dfrac{1}{x}\,dx + \dfrac{1}{y}\,dy\right)$

(4) $dz = \tan y\,dx + x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 y}\,dy$

209

体積 $f(x,\ y) = x^2 y$ （但し縦と高さを x，横を y とする）について

$df = 2x \cdot y\ dx + x^2 dy$

よって　体積の増加≒$2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0.1 + 6^2 \cdot (-0.1) = 9.6 - 3.6 = 6.0$（cm^3）

210

⑴　$f_x = 2x,\ \ f_y = 2y$ より $f_x(1,\ 2) = 2,\ \ f_y(1,\ 2) = 4$ なので $z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)$

$z = 2x - 2 + 4y - 8 + 5$

$z = 2x + 4y - 5$

⑵　$f_x(0,\ 1) = 0,\ \ f_y(0,\ 1) = 2$ より $z - 1 = 0(x-0) + 2(y-1)$

よって　$z = 2y - 1$

211

⑴　$(x,\ y) = (2,\ 2)$ のとき $z = 0$　より　接点は（2，2，0）。

一方，$f_x = 2x,\ \ f_y = -2y$　より　$f_x(2,\ 2) = 4,\ \ f_y(2,\ 2) = -4$

よって接平面は

$z - 0 = 4(x-2) - 4(y-2)$

$z = 4x - 8 - 4y + 8$

よって，$4x - 4y - z = 0$

⑵　$(x,\ y) = (2,\ 1)$ のとき $z = 2$　より　接点は（2，1，2）。

一方，$f_x = \dfrac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$f_y = \dfrac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y)$　より　$f_x(2,\ 1) = -1,\ \ f_y(2,\ 1) = -\dfrac{1}{2}$

なので接平面は

$z - 2 = -(x-2) - \dfrac{1}{2}(y-1)$

$2z - 4 = -2x + 4 - y + 1$

よって，$2x + y + 2z - 9 = 0$

⑶　$(x,\ y) = (2,\ -1)$ のとき $z = -1$　より　接点は（2，－1，－1）。

一方，$f_x = \dfrac{-y}{(x+y)^2}$，$f_x(2,\ -1) = 1$

$f_y = \dfrac{(x+y) - y}{(x+y)^2}$，$f_y(2,\ -1) = 2$

より接平面は

$z + 1 = 1(x-2) + 2(y+1)$

$= x - 2 + 2y + 2$

よって，$x + 2y - z - 1 = 0$

⑷　$(x, y) = (1, 1)$ のとき $z = 2$　より　接点は $(1, 1, 2)$。

一方，

$$f_x = 2xy + y,\quad f_x(1, 1) = 3$$

$$f_y = x^2 + x,\quad f_y(1, 1) = 2$$ より

接平面は

$$z - 2 = 3(x-1) + 2(y-1)$$

$$= 3x - 3 + 2y - 2$$

よって，$3x + 2y - z - 3 = 0$

B

212

⑴　$x = y^2$ にそって $(0, 0)$ に近づけると $f(x, y) = \dfrac{y^4}{y^4 + y^4} \to \dfrac{1}{2}$　一方

$x = 2y^2$ にそって $(0, 0)$ に近づけると $f(x, y) = \dfrac{2y^4}{4y^4 + y^4} \to \dfrac{2}{5}$

近づけ方により異なる値に近づくので答は「極限値なし」である。

⑵　$y = -x + x^2$ にそい $(0, 0)$ に近づけると $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2} \to 1$,

$y = -x + 2x^2$ にそって $(0, 0)$ に近づけると $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2x^2} \to \dfrac{1}{2}$

近づけ方により異なる値に近づくので答は「極限値なし」である。

213

(i)　$\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$　$(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと $(x, y) \to (0, 0)$ より $r \to 0)$

$$= \lim_{r\to 0} r^2 \cos\theta\sin\theta \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\sin 2\theta \cdot r^2 \cdot \cos 2\theta$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{4}\sin 4\theta \cdot r^2 = 0 \cdots\cdots ㋐$$

$(-1 \leqq \sin 4\theta \leqq 1$　より$)$

一方，$f(0, 0) = 0 \cdots\cdots$㋑　㋐，㋑より　$f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続。

(ii)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$　より $f(x, y)$ は $(0, 0)$ において x について偏微分可能。

同様　$\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = 0$　より $(0, 0)$ で y について偏微分可能。

214

$$f_{xy}(0,\ 0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,\ 0+k)-f_x(0,\ 0)}{k}$$

だが前問より　$f_x(0,\ 0)=0$　であり

$$f_x(0,\ k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,\ k)-f(0,\ k)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(kh\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-0\right)\frac{1}{h}$$

$=-k$　である

よって　$f_{xy}(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{-k}{k}=-1$ ……㋐

$f_{yx}(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,\ 0)-f_y(0,\ 0)}{h}$　だが，前問より $f_y(0,\ 0)=0$　であり

$$f_y(h,\ 0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(h,\ 0+k)-f(h,\ 0)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\left(hk\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-0\right)\frac{1}{k}$$

$=h$　である

よって　$f_{yx}(0,\ 0)=\lim_{k\to 0}\frac{h}{h}=1$ ……㋑

㋐，㋑より $f_{xy}(0,\ 0)\neq f_{yx}(0,\ 0)$

215

(1)　$f_x=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f_{xx}=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\{(-2x)(x^2+y^2)^2-(-x^2+y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x\}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^3}(-2x^3-2xy^2+4x^3-4xy^2)$$ ……㋐

$$f_y=\frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-2x\cdot\frac{y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy}=-2x\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\{1\cdot(x^2+y^2)^2-y\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y\}$$

$$=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^3}(x^2+y^2-4y^2)$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^3}(-2x^3+6xy^2)$$ ……㋑

㋐，㋑より $f_{xx}+f_{yy}=0$　よって調和関数

(2) $f=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ より

$$f_x=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$=-x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{xx}=-(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+(-x)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x$$

$$=-(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f_y=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y$$

$$=-y(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{yy}=-(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+3y^2(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

よって $f_{xx}+f_{yy}$

$$=-2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+3(x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

よって $f(x,\ y)$ は調和関数でない。

(3) $f_x=\dfrac{(x+y)-x}{(x+y)^2}=y(x+y)^{-2}$

$$f_{xx}=y\cdot(-2)(x+y)^{-3}$$

$$f_y=\frac{-x}{(x+y)^2}=-x(x+y)^{-2}$$

$$f_{yy}=-x\cdot(-2)(x+y)^{-3}$$

よって $f_{xx}+f_{yy}=(-2y-2x)(x+y)^{-3}$

従って $f(x,\ y)$ は調和関数でない。

(4) $f = \dfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ より

$$f_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$= x(x^2+y^2)^{-1}$$

$$f_{xx} = (x^2+y^2)^{-1} + x\cdot(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x$$

$$f_y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2} = y(x^2+y^2)^{-1}$$

$$f_{yy} = (x^2+y^2) + y\cdot(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y$$

よって　$f_{xx} + f_{yy}$

$$= 2(x^2+y^2)^{-1} + (-2x^2-2y^2)\cdot(x^2+y^2)^{-2} = 0$$

よって　$f(x,\ y)$は調和関数。

216

(1) $z_u = z_x x_u + z_y y_u$

$$= z_x \cos\alpha + z_y \sin\alpha$$

$$z_{uu} = \{(z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u\}\cos\alpha + \{(z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u\}\sin\alpha$$

$$= z_{xx}\cos^2\alpha + z_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + z_{yx}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\sin^2\alpha$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

$$= z_x(-\sin\alpha) + z_y\cos\alpha$$

$$z_{vv} = \{(z_x)_x x_v + (z_x)_y y_v\}(-\sin\alpha) + \{(z_y)_x x_v + (z_y)_y y_v\}\cos\alpha$$

$$= z_{xx}\sin^2\alpha - z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yx}(-\sin\alpha)\cos\alpha + z_{yy}\cos^2\alpha$$

よって $z_{uu} + z_{vv} = z_{xx}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z_{yy}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$$= z_{xx} + z_{yy}$$

(2)
$$
\begin{aligned}
z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\
&= z_x(e^u\cos v) + z_y(e^u\sin v) \\
z_{uu} &= \left[\{(z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u\} e^u + z_x e^u\right]\cdot\cos v \\
&\quad + \left[\{(z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u\} e^u + z_y e^u\right]\cdot\sin v \\
&= \left[(z_{xx}e^u\cos v + z_{xy}e^u\sin v)e^u + z_x e^u\right]\cdot\cos v \\
&\quad + \left[(z_{yx}e^u\cos v + z_{yy}e^u\sin v)e^u + z_y e^u\right]\cdot\sin v \\
&= (z_{xx}e^{2u}\cos^2 v + z_{xy}e^{2u}\sin v\cos v + z_x e^u\cos v) \\
&\quad + (z_{yx}e^{2u}\cos v\sin v + z_{yy}e^{2u}\sin^2 v + z_y e^u\sin v) \qquad \cdots\cdots ㋐
\end{aligned}
$$

一方,
$$
\begin{aligned}
z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\
&= z_x e^u(-\sin v) + z_y e^u(\cos v) \\
z_{vv} &= \left[\{(z_x)_x x_v + (z_x)_y y_v\}(-\sin v) + z_x(-\cos v)\right]\cdot e^u \\
&\quad + \left[\{(z_y)_x x_v + (z_y)_y y_v\}\cos v + z_y(-\sin v)\right]\cdot e^u \\
&= \left[\{z_{xx}e^u(-\sin v) + z_{xy}e^u\cos v\}(-\sin v) - z_x\cos v\right]\cdot e^u \\
&\quad + \left[\{z_{yx}e^u(-\sin v) + z_{yy}e^u\cos v\}\cos v - z_y\sin v\right]\cdot e^u \\
&= z_{xx}e^{2u}\sin^2 v - z_{xy}e^{2u}\cos v\sin v - z_x e^u\cos v \\
&\quad - z_{yx}e^{2u}\sin v\cos v + z_{yy}e^{2u}\cos^2 v - z_y e^u\sin v \qquad \cdots\cdots ㋑
\end{aligned}
$$

㋐, ㋑より　$z_{uu} + z_{vv} = z_{xx}e^{2u} + z_{yy}e^{2u}$

よって　$z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} + z_{vv})$

217

(1) 仮定より $z_x = f_x(x,\ y)$ に対し $(f_x)_{xy} = (f_x)_{yx}$ なので $f_{xxy} = f_{xyx}$

一方　$f_{xy} = f_{yx}$ より $(f_{xy})_x = (f_{yx})_x$

よって　$f_{xyx} = f_{yxx}$　以上により　$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$

(2) $(f_y)_{xy} = (f_y)_{yx}$　より　$f_{yxy} = f_{yyx}$

一方　$f_{xy} = f_{yx}$ より $(f_{xy})_y = (f_{yx})_y$

よって　$f_{xyy} = f_{yxy}$　以上から,　$f_{yyx} = f_{yxy} = f_{xyy}$

218

(1) $t = ax + by$ とおくとP.54 $\boxed{6}$ (Ⅰ)より

$z_x = f'(t)\cdot t_x = f'(t)\cdot a$

$z_y = f'(t)\cdot t_y = f'(t)\cdot b$

よって　$bz_x - az_y = abf'(t) - abf'(t) = 0$

⑵　$t = xy$ としてP.54 $\boxed{6}$(I)より

$z_x = f'(t)\cdot t_x = f'(t)y$

$z_y = f'(t)\cdot t_y = f'(t)x$

よって　$xz_x - yz_y = x f'(t)y - y f'(t)x = 0$

⑶　$t = \dfrac{y}{x}$ としてP.54 $\boxed{6}$ (I)より

$z_x = f'(t)t_x = f'(t)\cdot y(-x^{-2})$

$z_y = f'(t)t_y = f'(t)\cdot \dfrac{1}{x}$

よって　$xz_x + yz_y = f'(t)\,y(-x^{-1}) + f'(t)\cdot \dfrac{y}{x} = 0$

⑷　⑴と同様にして

$z_x = f'(x+ay)\cdot 1 + g'(x-ay)\cdot 1$

$z_{xx} = f''(x+ay)\cdot 1^2 + g''(x-ay)\cdot 1^2$

$z_y = f'(x+ay)\cdot a + g'(x-ay)\cdot(-a)$

$z_{yy} = f''(x+ay)\cdot a^2 + g''(x-ay)\cdot(-a)^2$

よって　$a^2 z_{xx} - z_{yy}$

$= a^2\{f''(x+ay) + g''(x-ay)\} - \{f''(x+ay)a^2 + g''(x-ay)a^2\}$

$= 0$

219

$t = \dfrac{y}{x}$　より　$y = xt$　z は x, y の関数 $f(x,\ y)$ であり，x と y はともに x, t の式であるとみなせるので

P.54 $\boxed{6}$ （II）より

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,\ xt) = f_x\cdot(x)_x + f_y\cdot(y)_x$$

$$= f_x + f_y t = f_x + f_y\cdot\frac{y}{x}$$

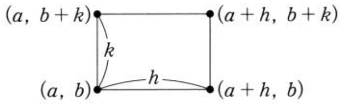
$$= \frac{x f_x + f_y y}{x} = 0$$ （$xz_x + yz_y = 0$ より）

よって $f(x,\ xt)$　すなわち　$f(x,\ y)$ は t のみの式である。

発展問題

220

$A = f(a+h,\ b+k) - f(a+h,\ b) - f(a,\ b+k) + f(a,\ b)$　とおく。



$A = \{f\,(a+h,\ b+h) - f(a+h,\ b)\} - \{f(a,\ b+k) - f(a,\ b)\}$

$= \Big[f(x,\ b+k) - f(x,\ b) \Big]_{x=a}^{x=a+h}$

$= \{ f_x(c_1,\ b+k) - f_x(c_1,\ b)\}h$

$(a < c_1 < a+h)$

（ x の関数 $f(x,\ b+k) - f(x,\ b)$ に平均値の定理を適用。）

$= \Big[f_x(c_1,\ y) \Big]_{y=b}^{y=b+k} \cdot h$

$= f_{xy}(c_1,\ c_2)\,k \cdot h$　　　……㋐

$(b < c_2 < b+k)$

（y の関数 $f_x(c_1,\ y)$ に平均値の定理を適用した。）

一方　$A = \{f\,(a+h,\ b+k) - f(a,\ b+k)\}$

$- \{ f(a+h,\ b) - f(a,\ b)\}$

$= \Big[f(a+h,\ y) - f(a,\ y) \Big]_{y=b}^{y=b+k}$

$= \{ f_x(a+h,\ c_4) - f_y(a,\ c_4)\} \cdot k$

$(b < c_4 < b+k)$

（ y の関数 $f(a+h,\ y) - f(a,\ y)$ に平均値の定理を適用。）

$= \Big[f_y(x,\ c_4) \Big]_{x=a}^{x=a+h} \cdot k$

$= f_{yx}(c_3,\ c_4)h \cdot k$　　　　……㋑

$(a < c_3 < a+h)$

(x の関数 $f_y(x,\ c_4)$ に平均値の定理を適用。)

㋐ ㋑より　$f_{xy}(c_1,\ c_2) = f_{yx}(c_3,\ c_4)$

よって　$\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f_{xy}(c_1,\ c_2) = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f_{yx}(c_3,\ c_4)$

$h\to 0,\ k\to 0$　のとき　$c_1\to a,\ c_2\to b,\ c_3\to a,\ c_4\to b$　であるが

f_{xy} が連続なので　左辺 $= f_{xy}(a,\ b)$，f_{yx} が連続なので　右辺 $= f_{yx}(a,\ b)$ である。

よって　$f_{xy}(a,\ b) = f_{yx}(a,\ b)$ が任意の点 $(a,\ b)$ について成立する。

221

⑴ $u_x = \dfrac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

$u_y = \dfrac{3y^2 - 3zx}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

$u_z = \dfrac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$ より

$u_x + u_y + u_z = \dfrac{3(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \dfrac{3}{x + y + z}$

（因数分解の公式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$ を適用した。←新版基礎数学演習 P.7，問題 23）

⑵ $u_x = (y - z)\{(z - x) + (x - y)(-1)\}$

$u_y = (z - x)\{(-1)(y - z) + (x - y)\}$

$u_z = (x - y)\{(-1)(z - x) + (y - z)\}$ より

$$
\begin{aligned}
u_x + u_y + u_z &= (y - z)(z - x) - (y - z)(x - y) \\
&\quad - (z - x)(y - z) + (z - x)(x - y) \\
&\quad - (x - y)(z - x) + (x - y)(y - z) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

222

⑴ 問題 82⑵にならって直接 u_{xx}，u_{yy}，u_{zz} を求めて加えてもよい。ここでは別解を紹介する。

与式より

$u^{-2} = x^2 + y^2 + z^2$ なので ……㋐

両辺を x で偏微分して

$-2u^{-3} \cdot u_x = 2x$ より $u_x = -xu^3$

よって $u_{xx} = -(u^3 + x \cdot 3u^2 u_x)$

同様に $u_{yy} = -(u^3 + y \cdot 3u^2 u_y)$

$u_{zz} = -(u^3 + z \cdot 3u^2 u_z)$ であり $u_y = -yu^3$，$u_z = -zu^3$

従って
$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= -\{u^3 + 3u^2 x \cdot (-xu^3) + u^3 + 3u^2 y \cdot (-yu^3) \\
&\qquad + u^3 + 3u^2 z \cdot (-zu^3)\} \\
&= -\{3u^3 - 3u^5(x^2 + y^2 + z^2)\} \\
&= -(3u^3 - 3u^5 \cdot u^{-2}) \quad (\text{㋐より}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって，調和関数である。

⑵　問題 221⑵より

$u_x = (y-z)(z-2x+y)$

$u_y = (z-x)(-2y+z+x)$

$u_z = (x-y)(-2z+x+y)$ なので

$u_{xx} = (y-z)(-2)$

$u_{yy} = (z-x)(-2)$

$u_{zz} = (x-y)(-2)$

従って　$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -2(y-z+z-x+x-y) = 0$

よって，調和関数である。