

5 章の問題

1

$$(1) \quad f_x(1, 2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 2) - f(1, 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) \cdot 4 - 1 \cdot 4}{h} = 4$$

$$\begin{aligned} f_y(1, 2) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1, 2+k) - f(1, 2)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 \cdot (4 + 4k + k^2) - 4}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} (4 + k) = 4 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} z_x &= \cos xy \times (xy)_x = y \cos xy \\ z_y &= \cos xy \times (xy)_y = x \cos xy \end{aligned}$$

$$(3) \quad z_x = 9x^2 + 4y, \quad z_y = 4x - 10y \quad \text{よ} \quad z_{xx} = 18x, \quad z_{xy} = 4 = z_{yx}, \quad z_{yy} = -10$$

$$\begin{aligned} (4) \quad z_u &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot 1 + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot 1 = \frac{2(u+v) + 2(u-2v)}{(u+v)^2 + (u-2v)^2} \\ &= \frac{2u + 2v + 2u - 4v}{u^2 - 2uv + v^2 + u^2 - 4uv + 4v^2} = \frac{4u - 2v}{2u^2 - 2uv + 5v^2} \\ z_v &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot 1 + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot (-2) = \frac{2(u+v) - 4(u-2v)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-2u + 10v}{2u^2 - 2uv + 5v^2} \end{aligned}$$

2

$$(1) \quad z_x = e^{-\frac{y}{x}} \cdot (-yx^{-1})_x = e^{-\frac{y}{x}} \cdot yx^{-2} = \frac{e^{-\frac{y}{x}} y}{x^2}$$

$$z_y = e^{-\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right)_y = e^{-\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} z_x &= 2x + 4y, \quad z_{xx} = 2 \\ z_y &= 3 + 4x \quad \text{よ} \quad z_{yx} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad z_u &= -\sin(2x+y) \cdot 2 \cdot 1 - \sin(2x+y) \cdot 2u \\ &= -\sin(2u+u^2-v) \cdot (2+2u) = -2(u+1) \sin(2u+u^2-v) \\ z_v &= -\sin(2x+y) \cdot 2 \cdot 0 - \sin(2x+y) \cdot (-1) \\ &= \sin(2x+y) \\ &= \sin(2u+u^2-v) \end{aligned}$$

3

- (1) $f_x = 3y + 6x^2, f_y = 3x - 1$
 (2) $f_{xx} = 12x, f_{xy} = 3$ より $f_{xx}(1, 1) = 12, f_{xy}(1, 1) = 3$
 (3) $z_x = 3x^2 - 3y^2, z_y = -6xy$ より $\Delta z \doteq (3x^2 - 3y^2)\Delta x - 6xy\Delta y$
 (4) $z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = z_u \cdot 3 + z_v \cdot 5$

4

- (1) $f_x = 2x - 6y + 2 = 0$ かつ $f_y = -6x + 20y - 10 = 0$ となるのは
 $x - 3y + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{ア}$ かつ
 $-3x + 10y - 5 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{イ}$ $\textcircled{ア}$ より $3x - 9y + 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{ア}'$ $\textcircled{イ} + \textcircled{ア}'$ で
 $y - 2 = 0$ よって $y = 2$
 $\textcircled{ア}$ より $x = 5$ よって答は $(5, 2)$
 (2) $f_{xx} = 2, f_{xy} = -6, f_{yy} = 20$ より $H(5, 2) = 2 \times 20 - (-6)^2 = 4 > 0$ より f は $(-5, -1)$ で
 極値 $f(5, 2) = 25 - 6 \times 10 + 40 + 10 - 20 = -5$ をとる。
 $f_{xx}(5, 2) = 2 > 0$ よりこれは極小値。

5

- (1) $z = xy^{-2}$ より $z_x = y^{-2},$
 $z_y = x \cdot (-2y^{-3}) = -2xy^{-3}$ より
 $z_{xx} = 0, z_{xy} = -2y^{-3} = \frac{-2}{y^3}$
 $z_{yx} = -2y^{-3} = \frac{-2}{y^3}, z_{yy} = -2x \cdot (-3y^{-4}) = \frac{6x}{y^4}$
 (2) $z = f(x, y)$ とおく。
 (i) $f_x = 2x = 0, f_y = -3y^2 = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$ のとき。
 $f_{xx} = 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = -6y$ より $H(0, 0) = 2 \times 0 - 0^2 = 0$
 $x = 0$ のとき $z = -y^3$ なので z は y の増加につれ $(0, 0)$ において正から負に変化する。
 よって f は $(0, 0)$ で極値をとらない。
 (ii) $f_x = -2x = 0, f_y = -2y = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$ のとき。
 $f_{xx} = -2, f_{xy} = 0, f_{yy} = -2$ より $H(0, 0) = (-2)^2 > 0$ なので f は $(0, 0)$ で極値 $f(0, 0) = 0$ をとる。
 $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$ よりこれは極大値である。
 (iii) $f_x = 2x = 0, f_y = -4y^3 = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$ のとき。
 $f_{xx} = 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = -12y^2$ より $H(0, 0) = 2 \times 0 - 0^2 = 0$
 $x = 0$ のとき $z = -y^4$ より f は $(0, 0)$ で極大となっているが、 $y = 0$ のとき $z = x^2$ より
 f は $(0, 0)$ で極小となっているので f は $(0, 0)$ で極値をとらない。
 (iv) $f_x = 4x^3 = 0, f_y = 2y = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$ のとき。
 $f_{xx} = 12x^2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2$ より $H(0, 0) = 0 \times 2 - 0^2 = 0$
 $z = f(x, y)$ は $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $z > 0, (x, y) = (0, 0)$ のとき $z = 0$ なので f は $(0, 0)$ で極小
 値 0 をとる。

$$(3) \quad z = f(x, y) = x^2 y^3 \text{ とおくと } f_x = 2x \cdot y^3, f_y = x^2 \cdot 3y^2 \text{ より}$$

$$\Delta z \doteq f_x(1, 1)\Delta x + f_y(1, 1)\Delta y$$

$$= 2 \times 0.02 + 3 \times 0.01 = 0.07$$

6

$$(1) \quad f_x = 3x^2 - y, f_y = -x + 3y^2, f_{xx} = 6x, f_{xy} = -1, f_{yy} = 6y$$

$$(2) \quad 3x^2 - y = 0, -x + 3y^2 = 0 \text{ のとき } y = 3x^2 \text{ より } -x + 3 \cdot 9x^4 = 0$$

$$-x(1 - 27x^3) = 0 \text{ よって } x = 0, \frac{1}{3} \text{ 従って } (x, y) = (0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

(3) f が極値をとる可能性があるのは(2)の2点のみである。

$H(x, y) = 6x \cdot 6y - (-1)^2$ であるから $H(0, 0) = -1 < 0$ より $(0, 0)$ で極値をとらない。

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$(4) \quad H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) > 0 \text{ より } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ で極値をとる。}$$

$$\text{その値は } f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = -\frac{1}{27}$$

$$(5) \quad f_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 6 \times \frac{1}{3} > 0 \text{ より極小値である。}$$

$$(6) \quad f_x(1, 1) = 2, f_y(1, 1) = 2 \text{ より } z - 1 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$(7) \quad \Delta z \doteq 2(1.01 - 1) + 2(1.02 - 1) = 0.02 + 0.04 = 0.06$$

- (1) $F(x, y) = x^2(x+2) - y^2 = 0$ とおくと $F_x = 3x^2 + 4x$, $F_y = -2y$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2 + 4x)}{-2y} = \frac{3x^2 + 4x}{2y}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(6x+4)y - (3x^2+4x)y'}{y^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(6x+4)2y^2 - (3x^2+4x)^2}{2y^3} \\ &= \frac{(6x+4) \cdot 2x^2(x+2) - (9x^4 + 24x^3 + 16x^2)}{4y^3} \\ &= \frac{2x^2(6x^2 + 16x + 8) - 9x^4 - 24x^3 - 16x^2}{4y^3} = \frac{3x^4 + 8x^3}{4y^3} \end{aligned}$$

- (2) $x = -1$ のとき $y^2 = x^2(x+2) = 1$ よって $y = \pm 1$

- (i) $(x, y) = (-1, 1)$ では $F_x = (-1, 1) = -1$, $F_y(-1, 1) = -2$

$$\text{よって } (-1)(x+1) - 2(y-1) = 0$$

$$-x-1-2y+2=0 \quad \text{つまり} \quad x+2y-1=0 \text{ が接線}$$

$$\text{一方 } (-2)(x+1) + (y-1) = 0$$

$$\text{つまり} \quad 2x - y + 3 = 0 \text{ が法線}$$

- (ii) $(x, y) = (-1, -1)$ では $F_x = (-1, -1) = -1$, $F_y(-1, -1) = 2$

$$\text{よって } (-1)(x+1) + 2(y+1) = 0$$

$$\text{つまり} \quad x - 2y - 1 = 0 \text{ が接線の方程式}$$

$$2(x+1) + (y+1) = 0$$

$$\text{つまり} \quad 2x + y + 3 = 0 \text{ が法線の方程式}$$

- (3) $(-1, 1)$ では(1)より $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3-8}{4} < 0$ より上に凸,

$$(-1, -1) \text{ では } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3-8}{-4} > 0 \text{ より下に凸。}$$

- (4) (1)より $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x}{2y} = \frac{x(3x+4)}{2y} = 0$ となるのは $x = -\frac{4}{3}$ のとき。

($x = 0$ のときは $y = 0$ となり不適)

$$\text{このとき } y^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \left(-\frac{4}{3} + 2\right) = \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$$

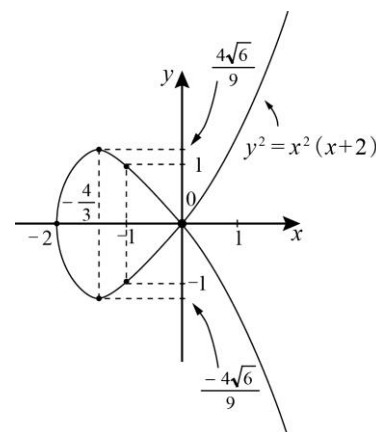
$$\text{よって } y = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{従って } (x, y) = \left(-\frac{4}{3}, \pm \frac{4}{9}\sqrt{6}\right)$$

(5) (4)より y は $x = -\frac{4}{3}$ のとき $0 < y$ では極値 $y = \frac{4\sqrt{6}}{9}$ をとる。

$$\text{このとき } -\frac{F_{xx}}{F_y} = -\frac{6 \times \left(-\frac{4}{3}\right)}{-2 \times \frac{4\sqrt{6}}{9}} < 0 \text{ より 極大値である。}$$

また, $0 > y$ では極値 $y = \frac{-4\sqrt{6}}{9}$ をとる。

$$\text{このとき } -\frac{F_{xx}}{F_y} = -\frac{6 \times \left(-\frac{4}{3}\right)}{-2 \times \left(\frac{-4\sqrt{6}}{9}\right)} > 0 \text{ より 極小値である。}$$



8

(1) $f_x = 10x - 6y = 0$

$f_y = -6x + 10y = 0$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$f_{xx} = 10, f_{xy} = -6, f_{yy} = 10 \text{ より } H(0, 0) = 10^2 - (-6)^2 = 64 > 0 \text{ であり}$$

極値 $f(0, 0) = -4$ をとる。 $f_{xx}(0, 0) = 10 > 0$ より極小値である。

(2) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ とおくと $g_x = 2x$, $g_y = 2y$ なので極値をとる点 (x, y) では

$$\frac{10x - 6y}{2x} = \frac{-6x + 10y}{2y} (= \lambda) \quad \text{..... ㉞}$$

の成立することが必要である。(λ はラグランジュの乗数)

㉞より $5xy - 3y^2 = -3x^2 + 5xy$ よって $y = \pm x$ 。

条件式 $g = 0$ に代入して $x^2 = \frac{1}{2}$ であり $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

よって f は次の 4 点で極値をとる可能性がある。

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{このとき } f\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{2} - \frac{6}{2} + \frac{5}{2} - 4 = \frac{4}{2} - 4 = -2 \text{ (複号同順)}$$

$$f\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, \frac{\mp 1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{5}{2} - 4 = 4 \text{ (複号同順)}$$

よって $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極小値 -2 , $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極大値 4 をとる。

(条件 $x^2 + y^2 = 1$ をもつ (x, y) で f が最大値と最小値をもつことは既知とする。)

(3) (1)(2)より最大値は $z = 4$, 最小値は $z = -4$