３章　微分法Ⅱ

２節　平均値の定理とその応用

A

153

$f(x)$は閉区間$[0,\ 2\pi]$で連続

開区間$(0,\ 2\pi)$で微分可能

$f(0)=\sin 0=0,\quad f(2\pi)=\sin 2\pi=0 \quad \therefore\ f(0)=f(2\pi)=0$

このとき，ロールの定理より　$f'(c)=0$ を満たす c が存在する。

$$f'(c)=\cos c=0 \qquad \therefore\ c=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

これらの値は，区間$[0,\ 2\pi]$に含まれる。

154

$f(x)$は閉区間$[0,\ 2\pi]$で連続

開区間$(0,\ 2\pi)$で微分可能

$f(0)=\cos 0-\sin 0=1$

$f(2\pi)=\cos 2\pi-\sin 2\pi=1 \quad \therefore\ f(0)=f(2\pi)=1$

このとき，ロールの定理より　$f'(c)=0$ を満たす c が存在する。

$$f'(c)=-\sin c-\cos c=0$$

$$-\cos c=\sin c$$

$$-1=\frac{\sin c}{\cos c}$$

$$-1=\tan c \qquad \therefore\ c=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

155

⑴ $f(x)=x^2$ は閉区間$[0,\ 3]$で連続

開区間$(0,\ 3)$で微分可能なので，平均値の定理より

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$$

となる c が存在する。

このとき，$\dfrac{3^2-0^2}{3-0}=2\cdot c$　　$c=\dfrac{3}{2}$　（$0<c<3$ に適する）

⑵ $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ は閉区間$[1,\ 4]$で連続

開区間$(1,\ 4)$で微分可能なので，平均値の定理より

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$$

となる c が存在する。

このとき，$\dfrac{\sqrt{4^2-1}-\sqrt{1^2-1}}{3}=\dfrac{1\times 2c}{2\sqrt{c^2-1}}$　　$\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{c}{\sqrt{c^2-1}}$　　$c^2=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\quad c=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

$1<c<4$ より $c=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

⑶ $f(x)=\log x$ のとき，平均値の定理より

$\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}=f'(c)$ となるcが存在する

$$\frac{\log e-\log 1}{e-1}=\frac{1}{c}$$

$\dfrac{1-0}{e-1}=\dfrac{1}{c}$　　$\therefore\ c=e-1$　（$1<c<e$に適する）

⑷ $f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x$ のとき，平均値の定理より $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ となるcが存在する

$$\frac{\mathrm{Sin}^{-1}(1)-\mathrm{Sin}^{-1}(0)}{1-0}=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{1-0}=\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$　　$\therefore\ c=\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}}$　（$0<c<1$ のため）

(1) $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x^2-x-6)'}{(x^3-8)'}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4x-1}{3x^2}=\frac{7}{12}$$

別解 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x^2+2x+4}=\frac{7}{12}$$

(2) $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}$$

$$=2$$

(3) $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\log x)'}{(x-1)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

(4) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=0$$

(5) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)}{\log x} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log(\sin x))'}{(\log x)'}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\sin x}\times\cos x}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{x}{\tan x}$$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$= \lim_{x\to+0}\frac{x'}{(\tan x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 1$$

(6) $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}$$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$= \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2} = 0$$

157

⑴ $f(x)=x^2$ より $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

$$b^2-a^2=(b-a)\times 2c$$

$$2c=\frac{b^2-a^2}{b-a} \qquad \therefore\ c=\frac{1}{2}(a+b)$$

（$a<c<b$を満たす）

⑵ $f(x)=\sqrt{x}$ より $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

$$\sqrt{b}-\sqrt{a}=(b-a)\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$2\sqrt{c}=\frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

$$2\sqrt{c}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

$$2\sqrt{c}=\sqrt{b}+\sqrt{a}$$

$$4c=(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2 \qquad \therefore\ c=\frac{1}{4}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

158

$f(x)=x^2+px+q$ について

$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$ より

$$(a+h)^2+p(a+h)+q=a^2+pa+q+\{2(a+\theta h)+p\}\times h$$

$$a^2+2ah+h^2+ap+ph+q=a^2+pa+q+2h(a+\theta h)+ph$$

$$h^2=2h^2\theta$$

$$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}$$

159

$f(x)=\log x$ とおくと $x>0$ より

$[x,\ x+1]$で連続，$(x,\ x+1)$で微分可能なので

平均値の定理より $f'(c)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$ となる c が $x<c<x+1$ で存在する。

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より $\dfrac{1}{c}=\dfrac{\log(1+x)-\log x}{1}$

$0<x<c<x+1$ より $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$

$$\frac{1}{x+1}<\log(1+x)-\log x<\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1}<\log\frac{1+x}{x}<\frac{1}{x}$$

以上より $\dfrac{1}{x+1}<\log\dfrac{1+x}{x}$ が成り立つ。

160

$f(x)=\sin x$　とおくと，平均値の定理より

$\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=f'(c)$　となる c が　$\alpha<c<\beta$ で存在する

$f'(x)=\cos x$　より　$f'(c)=\cos c\leqq 1$

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$　より　$0<c<\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$\cos c\fallingdotseq 1$　　$\therefore$　$\cos c<1$

よって　$\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=\cos c<1$

すなわち　$\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$

161

(1)　$\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x-\tan x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-(\sec^2 x)}$$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(1-\sec^2 x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-2\sec x\cdot\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x}{-2}=-\frac{1}{2}$$

(2)　$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-x^2+1)'}{(e^x)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x}{e^x}$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^3-2x)'}{(e^x)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-2}{e^x}$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x-2)'}{(e^x)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0$$

(3)　$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}=\lim_{x\to+0}\frac{(\log(\tan 2x))'}{(\log(\tan x))'}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\tan 2x}\times\dfrac{1}{\cos^2 2x}\times 2}{\dfrac{1}{\tan x}\times\dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\tan x\cdot\cos^2 x}{\tan 2x\cdot\cos^2 2x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin 2x\cdot\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin 2x}{\sin 4x}$$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$=\lim_{x\to+0}\frac{(2\sin 2x)'}{(\sin 4x)'}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\cos 2x\cdot 2}{\cos 4x\cdot 4}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\cos 2x}{\cos 4x}$$

$$=1$$

(4) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(ax+1)}{\log(bx+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log(ax+1))'}{(\log(bx+1))'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{ax+1}\times a}{\dfrac{1}{bx+1}\times b}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a(bx+1)}{b(ax+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(abx+a)'}{(abx+b)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ab}{ab}=1$$

162

(1) $$\lim_{x\to+\infty}x\log\frac{x-3}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$ ロピタルの定理より

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{6}{x^2-9}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{6x^2}{x^2-9}\right)$$ ロピタルの定理より

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-6x^2)'}{(x^2-9)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-12x}{2x}=-6$$

(2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right)$$ ロピタルの定理より

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)'}{(\cos x)'}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}$$

$$=0$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ において $y=\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ とし両辺の対数をとると

$$\log y=\frac{1}{x}\log\frac{\tan x}{x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\log\dfrac{\tan x}{x}\right)'}{x'} \quad \longleftarrow \text{ロピタルの定理より}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x\sin 2x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)'}{(x\sin 2x)'} \quad \longleftarrow \text{ロピタルの定理より}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{\sin 2x+2x\cos 2x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{(2-2\cos 2x)'}{(\sin 2x+2x\cos 2x)'} \quad \longleftarrow \text{ロピタルの定理より}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{4\cos 2x-4x\sin 2x}\\ &=0\end{aligned}$$

$\log y \to 0$ より

$y \to 1$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ において $y=x^{\frac{1}{x}}$ とすると $\log y=\dfrac{\log x}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\log y=\lim_{x\to +\infty}\frac{\log x}{x}&=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\log x)'}{x'} \quad \longleftarrow \text{ロピタルの定理より}\\ &=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\\ &=0\end{aligned}$$

$\log y \to 0$ より $y \to 1$ $\qquad \therefore\quad \displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$

163

⑴　$f(x)=x+\dfrac{2}{x}$ の$[1,\ 3]$における平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\left(3+\dfrac{2}{3}\right)-\left(1+\dfrac{2}{1}\right)}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

⑵　接点を$(c,\ f(c))$とすると，接線の傾きは

$$f'(c)=1-\frac{2}{c^2}$$

⑴の平均変化率と等しい傾きとなることから

$$1-\frac{2}{c^2}=\frac{1}{3}$$

$$c^2=\pm\sqrt{3}$$

$1<c<3$　より　$c=\sqrt{3}$　　∴　$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$

164

2 点$(0,\ 0)$，$(4,\ 2)$を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{2-0}{4-0}=\frac{1}{2}\quad\cdots①$$

曲線　$y=\sqrt{x}$　上の任意の点　$(c,\ \sqrt{c})$，$0<c<4$ における接線の傾きは

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad より\quad \frac{1}{2\sqrt{c}}\quad\cdots②$$

よって，接線の方程式は

$$y-\sqrt{c}=\frac{1}{2\sqrt{c}}(x-c)$$

$$y=\frac{1}{2\sqrt{c}}x+\frac{1}{2}\sqrt{c}$$

①，②より　　$c=1$

∴　$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$