

### 3 章の問題

1

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+4x} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3x} \times \log(1+2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \log(1+2x)}{3x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \times \frac{1}{1+2x} \times 2}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10}{3(1+2x)} = \frac{10}{3}$$

$$(4) \quad y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{とすると} \quad \log y = \frac{1}{x} \log(1+x) \quad \text{より}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} \\ = 0$$

$$\log y \rightarrow 0 \quad \text{より} \quad y \rightarrow 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

2

$$x = e^t + e^{-t}, \quad y = e^t - e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$$

$$t = 1 \quad \text{のとき} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}}$$

3

$$x = 2t^2 + 1, \quad y = 3t - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4t}$$

$$t = 1 \quad \text{のとき} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$$

4

$$x = e^{\theta} \cos \theta, \quad y = e^{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\theta} \sin \theta + e^{\theta} \cos \theta}{e^{\theta} \cos \theta - e^{\theta} \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \quad \left( = \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} \right)$$

5

$$(1) \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3(x-3)(x-1)$$

グラフが増加するとき  $f'(x) > 0$  より  $x < 1, 3 < x$

$$(2) \quad f''(x) = 6x - 12$$

グラフが上に凸なとき  $f''(x) < 0$  より  $x < 2$

6

$$(1) \quad f(x) = x^4 - x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \text{ のとき } x = 0, \frac{3}{4}$$

$$x = 0 \text{ のとき } f''(0) = 0$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ のとき } f''\left(\frac{3}{4}\right) = 12 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 6 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

$$f(x) \text{ が極小をとるのは } x = \frac{3}{4} \text{ のとき}$$

$$(2) \quad f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$$

$$f(x) \text{ が上に凸のとき } f''(x) < 0 \quad \therefore 0 < x < \frac{1}{2}$$

7

$$(1) \quad y = x + \frac{4}{x}, \quad y' = 1 - \frac{4}{x^2}, \quad y'' = \frac{8}{x^3}$$

$$y' = 0 \text{ のとき } x = \pm 2$$

$$x = 2 \text{ のとき } y'' = 1 > 0 \quad y = 4$$

$$x = -2 \text{ のとき } y'' = -1 < 0 \quad y = -4$$

$$\therefore x = 2 \text{ のとき極小値 } 4$$

$$x = -2 \text{ のとき極大値 } -4 \text{ をとる}$$

$$(2) \quad y = \frac{x+1}{x^2+x+1}, \quad y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}, \quad y'' = \frac{2(x^3+3x^2-1)}{(x^2+x+1)^3}$$

$$y' = 0 \text{ のとき } x = 0, -2$$

$$x = 0 \text{ のとき } y'' = -2 < 0 \quad y = 1$$

$$x = -2 \text{ のとき } y'' = \frac{2}{9} > 0 \quad y = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore x = 0 \text{ のとき極大値 } 1$$

$$x = -2 \text{ のとき極小値 } -\frac{1}{3}$$

8

$$f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x$$

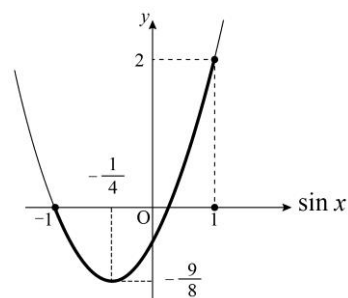
$$f(x) \text{ が極値をもつとき } f'(x) = 0 \text{ より } a - \sin x + \cos 2x = 0$$

$$a = \sin x - \cos 2x$$

$$= \sin x - (1 - 2 \sin^2 x)$$

$$= 2 \sin^2 x + \sin x - 1$$

$$= 2 \left( \sin x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{8}$$



$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ において } y = 2 \left( \sin x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{8} \text{ と } y = a \text{ の交点を考えると } -\frac{9}{8} \leq a \leq 2$$

$$\therefore \text{ 極値を持たない } a \text{ の範囲は } a < -\frac{9}{8}, 2 < a$$

9

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ とすると}$$

$$f(x) \doteq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{a^2}} (x - a)$$

$$\sqrt[3]{1057} \doteq \sqrt[3]{1000} + \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{1000^2}} (1057 - 1000)$$

$$= 10 + \frac{1}{300} \times 57$$

$$= 10.19$$

$$(1057^{\frac{1}{3}} = 10.1865001 \dots)$$

10

$f(x) = \cos x$  とすると

$$f(x) \doteq \cos a - \sin a \times (x - a)$$

$$\cos 29^\circ = \cos (30^\circ - 1^\circ)$$

$$= \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \times \left( -\frac{\pi}{180} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \left( -\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\doteq 0.866 + 0.500 \times 0.0175$$

$$= 0.87475$$

$$\left( \begin{array}{l} a = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \\ x = 29^\circ \text{ とすると} \\ x - a = 29^\circ - 30^\circ = -1^\circ \\ 1^\circ = \frac{\pi}{180} \doteq 0.0175 \end{array} \right)$$

$$(\cos 29^\circ = 0.874619707 \dots\dots)$$

$$\therefore \cos 29^\circ \doteq 0.87$$

11

$$(1) \quad f(x) = \log \{ax + b(1-x)\} - x \log a - (1-x) \log b$$

$$f'(x) = \frac{a-b}{ax+b(1-x)} - \log a + \log b$$

$$f''(x) = \frac{-(a-b)^2}{\{(a-b)x+b\}^2} = -\left\{ \frac{a-b}{(a-b)x+b} \right\}^2$$

題意より  $a > b > 0$  すなわち  $a - b \neq 0$

よって  $f''(x) < 0$  が常に成り立つ

$$(2) \quad f(x) \text{ は } 0 < x < 1 \text{ で微分可能なので}$$

平均値の定理より  $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$  を満たす  $c$  が存在する

$$f'(c) = \frac{(\log a - 1 \times \log a) - (\log b - \log b)}{1 - 0} = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

これより  $f'(c) = 0$  となる  $c$  が  $0 < c < 1$  で存在することがわかる

また, (1)より  $f(x)$  は上に凸のグラフなので

$f'(c) = 0$  ( $0 < c < 1$ ) となる  $c$  はただ 1 つだけ存在する

(3) (1), (2)より  $f(x)$  の増減表は

$x$	0	...	$c$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	最大	↘	0

$0 \leq x \leq 1$  で  $f(x) \geq 0$  より

$$\log \{ax + b(1-x)\} - x \log a - (1-x) \log b \geq 0$$

$$\log \{ax + b(1-x)\} \geq x \log a + (1-x) \log b$$

$$\log \{ax + b(1-x)\} \geq \log a^x \times b^{1-x}$$

$$e > 1 \text{ より } ax + b(1-x) \geq a^x b^{1-x}$$

よって不等式が成り立つ

12

$$(1) \quad r = \frac{3}{2 + \sin \theta}$$

$$r(2 + \sin \theta) = 3$$

$$2r + r \sin \theta = 3$$

$$2r = 3 - r \sin \theta$$

$$(2r)^2 = (3 - r \sin \theta)^2$$

$$4(x^2 + y^2) = (3 - y)^2$$

$$4x^2 + 4y^2 = 9 - 6y + y^2$$

$$4x^2 + 3y^2 + 6y = 9$$

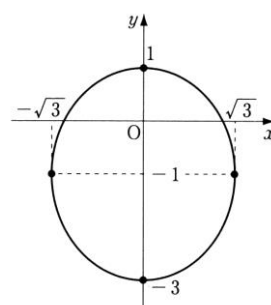
$$4x^2 + 3(y+1)^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

長軸 4 短軸  $2\sqrt{3}$  のたて長のだ円

両辺を 2 乗すると

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$



(2)  $4x^2 + 3(y+1)^2 = 12$  に  $y = 0$  を代入すると

$$4x^2 + 3 = 12$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x > 0 \text{ より点 P は } \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

また,  $4x^2 + 3(y+1)^2 = 12$  の両辺を  $x$  で微分すると

$$8x + 6(y+1) \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y \neq -1 \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{3(y+1)}$$

$$\text{点 P における接線の傾きは } \frac{dy}{dx} = -\frac{4 \times \frac{3}{2}}{3(0+1)} = -\frac{6}{3} = -2$$

求める接線は傾き  $-2$ , 点  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  を通るので

$$y - 0 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \therefore y = -2x + 3$$

13

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} \cos t \\ y(t) = e^{at} \sin t \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = ae^{at} \cos t + e^{at} (-\sin t)$$

$$= e^{at}(a \cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = ae^{at} \sin t + e^{at} \cos t$$

$$= e^{at}(a \sin t + \cos t)$$

$$\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

$$= (e^{at}(a \cos t - \sin t), e^{at}(a \sin t + \cos t))$$

$$(1) \quad \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\therefore \quad \vec{v} = (e^t (\cos t - \sin t), \quad e^t (\sin t + \cos t))$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t (\cos t - \sin t) + e^t (-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t (\cos t + \sin t) + e^t (-\sin t + \cos t) = 2e^t \cos t$$

$$\therefore \quad \vec{a} = (-2e^t \sin t, \quad 2e^t \cos t)$$

$$(2) \quad \vec{OP} = (e^t \cos t, \quad e^t \sin t) = e^t (\cos t, \quad \sin t)$$

$$\vec{v} = e^t (\cos t - \sin t, \quad \sin t + \cos t)$$

$$\text{以上より} \quad \left| \vec{OP} \right| = \left| e^t \right| \times \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = e^t$$

$$\begin{aligned} \left| \vec{v} \right| &= \left| e^t \right| \times \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} \\ &= e^t \times \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{2} e^t \end{aligned}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{v}}{\left| \vec{OP} \right| \cdot \left| \vec{v} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よ} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

同様に

$$\cos \theta_2 = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{a}}{\left| \vec{OP} \right| \cdot \left| \vec{a} \right|} = \frac{e^t \cos t \times (-2e^t \sin t) + e^t \sin t \times 2e^t \cos t}{e^t \cdot 2e^t} = 0$$

$$\text{よ} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$