５章　偏微分

２節　偏微分の応用

223

⑴　$f_x = 2x - y$, $f_y = -x + 2y - 3$　より　$f_x = f_y = 0$　となるのは（x, y）$=(1,\ 2)$　のときのみ。

一方，$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -1$, $f_{yy} = 2$　なので　$\mathrm{H}(x,\ y) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3$

よって　$\mathrm{H}(1,\ 2) = 3 > 0$　したがって$(1,\ 2)$でzは極値$f(1,\ 2) = 1 - 2 + 4 - 6 = -3$をとる。

$f_{xx}(1,\ 2) = 2 > 0$よりそれは極小値である。

⑵　$f_x = 2x + y - 5$, $f_y = x - 2y - 1$　より　$f_x = f_y = 0$となるのは

$(x,\ y) = \left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$のときのみ。一方，$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = -2$　なので

$\mathrm{H}(x,\ y) = 2 \cdot (-2) - 1^2 = -5$

よって　$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{11}{5}\right) < 0$　したがって　$\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{11}{5}\right)$　でzは極値をとらない。

⑶　$f_x = 3x^2 - 2x$, $f_y = 2y$　より　$f_x = f_y = 0$となるのは

$(x,\ y) = (0,\ 0)$, $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$のときのみ。

$f_{xx} = 6x - 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2$より$\mathrm{H}(x,\ y) = (6x - 2) \cdot 2 - 0^2$

よって　$\mathrm{H}(0,\ 0) = -4 < 0$。したがって　$(0,\ 0)$でzは極値をとらない。

$\mathrm{H}\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right) = 4 > 0$より$z$は$\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$で極値

$f\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3} - 1\right) = -\dfrac{4}{27}$　をとる。

$f_{xx}\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right) = 2 > 0$　よりそれは極小値である。

⑷　$f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = -3x + 3y^2$　より　$f_x = f_y = 0$　となるのは

$x^2 - y = 0$, $x - y^2 = 0$　より　$x - x^4 = x(1 - x^3) = 0$，つまり$x = 0,\ 1$のとき。

したがって$(x,\ y) = (0,\ 0)$, $(1,\ 1)$のときのみzが極値をとる可能性あり。

$f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3$, $f_{yy} = 6y$より$\mathrm{H}(x,\ y) = 36xy - 9$　なので　$\mathrm{H}(0,\ 0) < 0$であり

zは$(0,\ 0)$で極値をとらない。一方$\mathrm{H}(1,\ 1) = 36 - 9 > 0$なので$z$は$(1,\ 1)$で

極値$f(1,\ 1) = 1 - 3 + 1 = -1$をとる。$f_{xx}(1,\ 1) = 6 > 0$よりそれは極小値である。

⑸　$f_x = 3x^2 - 3,\ \ f_y = 3y^2 - 12$ より　$f_x = f_y = 0$ となるのは
$(x,\ y) = (1,\ 2),\ (1,\ -2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$ のみ。 $f_{xx} = 6x,\ \ f_{xy} = 0,\ \ f_{yy} = 6y$ より
$\mathrm{H}(x,\ y) = 36xy$ なので $\mathrm{H}(1,\ -2),\ \mathrm{H}(-1,\ 2)$ はともに負となり $(1,\ -2),\ (-1,\ 2)$ のとき
z は極値をとらない。 $\mathrm{H}(1,\ 2),\ \mathrm{H}(-1,\ -2)$ はともに正となり $(-1,\ -2),\ (1,\ 2)$ のとき z は極値をとる。
極値 $f(-1,\ -2) = -1 - 8 + 3 + 24 = 18$ は $f_{xx}(-1,\ -2) < 0$ より極大値である。
一方， $f(1,\ 2) = 1 + 8 - 3 - 24 = -18$ は $f_{xx}(1,\ 2) = 6 > 0$ より極小値である。

⑹　$f_x = 4x^3 + 4x - 4y,\ \ f_y = 2y - 4x$ より　$f_x = f_y = 0$ となるのは
$x^3 + x = y,\ \ y = 2x$ より $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$ であり，
$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (1,\ 2),\ (-1,\ -2)$ のときのみ。
$f_{xx} = 12x^2 + 4,\ \ f_{xy} = -4,\ \ f_{yy} = 2$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 2(12x^2 + 4) - 16 = 24x^2 - 8$ であり
$\mathrm{H}(0,\ 0) < 0$ より z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。
$\mathrm{H}(1,\ 2) = 16 > 0$ より z は極値
z は $f(1,\ 2) = 1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0$ をとり，それは $f_{xx}(1,\ 2) > 0$ より極小値である。
$\mathrm{H}(-1,\ -2) = 16 > 0$ より z は極値
z は $f(-1,\ -2) = 1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0$ をとり，それは $f_{xx}(-1,\ -2) > 0$ より極小値である。

⑺　$f_x = 3x^2 - 9y,\ \ f_y = -9x + 3y^2$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは
$x^2 = 3y,\ 3x = y^2$ より $3x = \dfrac{1}{9}x^4$，つまり　$27x - x^4 = x(27 - x^3) = 0$ のときだから
$x = 0,\ 3$ より $(x,\ y) = (0,\ 0),\ (3,\ 3)$ のときのみ。
$f_{xx} = 6x - 9,\ \ f_{xy} = -9,\ \ f_{yy} = 9y$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 9y(6x - 9) - 81$ なので $\mathrm{H}(0,\ 0) < 0$ であり
z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。
$\mathrm{H}(3,\ 3) = 27 \cdot 9 - 81 > 0$ なので z は $(3,\ 3)$ で極値 $f(3,\ 3) = 27 - 81 + 27 + 1 = -26$ をとる。
$f_{xx}(3,\ 3) = 9 > 0$ よりそれは極小値である。

⑻　$f_x = 4x^3 - 4y,\ \ f_y = -4x + 4y$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは
$x^3 = y,\ \ x = y$ より $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ のときだから
$x = 0,\ 1,\ -1$ より $(x,\ y) = (0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ のときのみ。
$f_{xx} = 12x^2,\ \ f_{xy} = -4,\ \ f_{yy} = 4$ より $\mathrm{H}(x,\ y) = 48x^2 - 16$ なので $\mathrm{H}(0,\ 0) = -16 < 0$ であり
z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。
$\mathrm{H}(-1,\ -1) = \mathrm{H}(-1,\ -1) = 32 > 0$ なので z は $(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ で
極値 $f(-1,\ -1) = f(1,\ 1) = 1 - 4 + 2 = -1$ をとる。
その値は $f_{xx}(-1,\ -1) = f_{xx}(1,\ 1) = 12 > 0$ より極小値である。

224

(1)　$F(x,\ y)=x^2+y^2-4=0$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{2y}=\dfrac{-x}{y}$

(2)　$F(x,\ y)=\cos x+\sin y-1=0$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-(-\sin x)}{\cos y}=\dfrac{\sin x}{\cos y}$

(3)　$F(x,\ y)=x+y+\log x+\log y$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1+\dfrac{1}{y}}=-\dfrac{xy+y}{xy+x}$

(4)　$F(x,\ y)=x+y-e^x-e^y$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-(1-e^x)}{1-e^y}=\dfrac{-1+e^x}{1-e^y}$

225

(1)　$F(x,\ y)=x^2+y^2-4=0$ とおくと $F_x=2x$，$F_y=2y$ より

$F_x(1,\ \sqrt{3})=2$，$F_y(1,\ \sqrt{3})=2\sqrt{3}$ なので

l は，$2(x-1)+2\sqrt{3}(y-\sqrt{3})=0$　　l' は，$2\sqrt{3}(x-1)-2(y-\sqrt{3})=0$

つまり l は，$x+\sqrt{3}y-4=0$　　l' は，$\sqrt{3}x-y=0$

(2)　$F(x,\ y)=x^3+3xy+y^3-5=0$ とおくと $F_x=3x^2+3y$，$F_y=3x+3y^2$ より

$F_x(1,\ 1)=6$，$F_y(1,\ 1)=6$ なので

l は，$6(x-1)+6(y-1)=0$　　l' は，$6(x-1)-6(y-1)=0$

つまり l は，$x+y-2=0$　　l' は，$x-y=0$

(3)　$F(x,\ y)=x^2-xy+y^3-3y=0$ とおき $F_x=2x-y$，$F_y=-x+2y-3$ より

$F_x(2,\ 1)=4-1=3$，$F_y(2,\ 1)=-2+2-3=-3$，なので

l は，$3(x-2)-3(y-1)=0$　　l' は，$-3(x-2)-3(y-1)=0$

つまり l は，$x-y-1=0$　　l' は，$x+y-3=0$

(4)　$F(x,\ y)=x^3-x^2+y^2-4=0$ とおくと $F_x=3x^2-2x$，$F_y=2y$ より

$F_x(1,\ 2)=3-2=1$，$F_y(1,\ 2)=4$，なので

l は，$(x-1)+4(y-2)=0$　　l' は，$4(x-1)-1(y-2)=0$

つまり l は，$x+4y-9=0$　　l' は，$4x-y-2=0$

⑴　$F(x,\ y)=x^2-2xy+3y^2-2=0$ とおく。$F=0$，　$F_x=2x-2y=0$ となるのは

$x^2-2x^2+3x^2=2$，つまり $x=\pm1$ のとき。

よって　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ のときであり

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{2}{-2x+6y}=\dfrac{1}{x-3y}$ の値は各々 $-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ であるので，

y は $(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき極大値 1 をとり

$(x,\ y)=(-1,\ -1)$ のとき極小値 -1 をとる。

⑵　$F(x,\ y)=x^2+xy+y^2-1=0$ とおく。$F=0$，　$F_x=2x+y=0$ となるのは

$x^2-2x^2+4x^2=1$ のとき，つまり $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき。

よって　$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{2}{x+2y}$ の値は各々 $-\dfrac{2}{\frac{-3}{\sqrt{3}}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}>0,\ -\dfrac{2}{\frac{3}{\sqrt{3}}}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}<0$ であるので，

y は $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき極小値 $y=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$ をとり

$\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき極大値 $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。

⑶　$F(x,\ y)=x^2-xy+y^3-7=0$ とおく。$F=0$，　$F_x=2x-y=0$ となるのは

$x^2-2x^2+8x^3=7$ のとき　$(x-1)=(8x^2+7x+7)=0$ より $x=1$。このとき $y=2$。

$(x,\ y)=(1,\ 2)$ で

$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{2}{-x+2y^2}<0$ より y は $(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき極大値 $y=2$ をとる。

⑷　$F(x,\ y)=xy^2-x^2y-2=0$ とおく。$F=0$，　$F_x=y^2-2xy=0$ となるのは

$y-2x=0$ のときなので $x\cdot4x^2-x^2\cdot2x=0$

つまり $x=1$ のとき，このとき $y=2$。

$(x,\ y)=(1,\ 2)$ で $-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{-2y}{2xy-x^2}=\dfrac{4}{4-1}>0$ より

$(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき y は極小値 2 をとる。

227

⑴　$f=y-x$，$g=x^2+y^2-2=0$ ……㋐　とおくと $f_x=-1$，$f_y=1$，$g_x=2x$

$g_y=2y$ より $f_xg_x-f_yg_x=-2y-2x=0$ とすると $y=-x$

㋐に代入して $2x^2=2$ より $x=\pm1$　　よって $(x,\ y)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$

$f(1,\ -1)=-2$，$f(-1,\ 1)=2$

仮定㊟より $(1,\ -1)$ で極小値 -2，$(-1,\ 1)$ で極大値 2

⑵　$f=x+y$，$g=x^2+2y^2-1=0$ ……㋑　とおくと $f_x=1$，$f_y=1$，$g_x=2x$，$g_y=4y$ より

$f_xg_y-f_yg_x=4y-2x=0$　このとき $x=2y$ である。

㋑に代入して $4y^2+2y^2=1$ より　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　　よって $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{6}}$（複号同順）

従って

$$f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\pm\frac{3}{\sqrt{6}}$$

仮定㊟より z は

$(x,\ y)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$のとき極大値 $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

$(x,\ y)=\left(\dfrac{-2}{\sqrt{6}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right)$のとき極小値 $\dfrac{-3}{\sqrt{6}}$

⑶　$f=xy$，$g=x^2+2y^2-1=0$ …㋒　で $f_x=y$，$f_y=x$，$g_x=2x$，$g_y=4y$ より

$f_xg_y-f_yg_x=4y^2-2x^2=0$ とすると $x=\pm\sqrt{2}y$ である。

㋒に代入して $2y^2+2y^2=1$ より $y=\pm\dfrac{1}{2}$　　よって $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

従って

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\ （複号同順）,$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ （複号同順）$$

仮定㊟より z は

$(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$のとき極大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\dfrac{1}{2}\right)$のとき極小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

⑷　$f=(x-1)^2+y^2$，$g=x^2+2y^2-2=0$……㊁　とおくと　$f_x=2(x-1)$，$f_y=2y$

$g_x=2x$，$g_y=4y$　より　$f_xg_y-f_yg_x=2(x-1)\cdot 4y-2y\cdot 2x=0$ となるのは

$2(x-1)y-xy=y(2x-2-x)=y(x-2)=0$ のとき。

よって　$x=2$，または $y=0$

$x=2$ をみたす y は㊁よりないので不適。

$y=0$ のとき㊁より $x=\pm\sqrt{2}$，$f(\sqrt{2},\ 0)=(\sqrt{2}-1)^2$

$f(-\sqrt{2},\ 0)=(-\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$ と仮定㊇より

$(x,\ y)=(\sqrt{2},\ 0)$ のとき極小値 $(\sqrt{2}-1)^2$，

$(x,\ y)=(-\sqrt{2},\ 0)$ のとき極大値 $(\sqrt{2}+1)^2$

⑸　$f=xy^3$，$g=x^2+y^2-4=0\cdots$㊉　とおくと $f_x=y^3$，$f_y=3xy^2$，$g_x=2x$，$g_y=2y$ より

$f_xg_y-f_yg_x=2y^4-6x^2y^2=2y^2(y^2-3x^2)=0$ となるのは $y=0$，$y=\pm\sqrt{3}x$ のとき。

㊉に代入すると $y=0$ のとき $x=\pm 2$，$y=\pm\sqrt{3}x$ のとき $x=\pm 1$。

よって　$f(\pm 1,\ \pm\sqrt{3})=3\sqrt{3}$

$f(\pm 1,\ \mp\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$

$f(0,\ \pm 2)=0$

仮定㊇より

$(x,\ y)=(\pm 1,\ \pm\sqrt{3})$ のとき極大値 $3\sqrt{3}$ をとり

$(\pm 1,\ \mp\sqrt{3})$ のとき極小値 $-3\sqrt{3}$　　　（以上複号同順）

一方 f は第 1 象限の $(x,\ y)$ で正，第 4 象限の $(x,\ y)$ で負の値をとるので

$(x,\ y)=(2,\ 0)$ で極値をとらない。同様に，f は第 2 象限の $(x,\ y)$ で負，

第 3 象限の $(x,\ y)$ で正の値をとるので $(x,\ y)=(-2,\ 0)$ で極値をとらない。

⑹　$f=x^3+y^3$，$g=x^2+y^2-1=0\cdots$㋕　とおくと $f_x=3x^2$，$f_y=3y^2$，$g_x=2x$，$g_y=2y$ より

$f_xg_y-f_yg_x=6x^2y-6xy^2=6xy(x-y)=0$ とおくと

㋕より $x\neq 0$，$y\neq 0$ のとき $x=y$。これを㋕に代入して $2x^2=1$

よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（複号同順）

このとき $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pm 1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\pm 1}{2\sqrt{2}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

仮定㊇より z は $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極小値 $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

一方，$x=0$ のとき㋕より $y=\pm 1$ だが，このときは $f=y^3$ となるので $(x,\ y)=(0,\ \pm 1)$ では極値をとらない。同様に，$y=0$ のとき $f=x^3$ となるので $(x,\ y)=(\pm 1,\ 0)$ では極値をとらない。

B

228

(1) $f_x = \cos x + \cos(x+y)$

$f_y = \cos y + \cos(x+y)$ より

$f_x = f_y = 0$ となるのは $\cos x = \cos y$ のとき。$0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$ より $x = y$ ……㋐。

このとき $f_x = f_y = \cos x + \cos 2x = 0$ となる。

よって　$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$（加法定理より）。

従って　$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

よって　$\cos x = \frac{1}{2},\ -1$

$0 < x < \pi$ より $x = \frac{\pi}{3}$ で㋐より　$y = \frac{\pi}{3}$

$f_{xx} = -\sin x - \sin(x+y)$

$f_{xy} = -\sin(x+y)$

$f_{yy} = -\sin y - \sin(x+y)$ より

$f_{xx}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ ……㋑

$f_{xy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ f_{yy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ であるから

$\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0$　となり　z は $(x,\ y) = \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)$ で

極値 $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

㋑よりこれは極大値である。

⑵ $f_x = -\sin x + \sin(x+y)$

$f_y = -\sin y + \sin(x+y)$ より

$f_x = f_y = 0$ とすると， $\sin x = \sin y$ である。 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$， $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ ……㋒ で $x = y$ ……㋓。

このとき $f_x = f_y = -\sin x + \sin 2x = -\sin x + 2\sin x \cos x = \sin x(-1 + 2\cos x) = 0$ より

$\sin x = 0$, $\cos x = \dfrac{1}{2}$ で ㋒ ㋓ から $x = y = \dfrac{\pi}{3}$ ……㋔

$f_{xx} = -\cos x + \cos(x+y)$

$f_{xy} = \cos(x+y)$

$f_{yy} = -\cos y + \cos(x+y)$ なので

㋔のとき $f_{xx} = -\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$ ……㋕

$f_{xy} = -\dfrac{1}{2}$， $f_{yy} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1$ より $\mathrm{H}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = (-1)^2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 >= 0$

よって z は $(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ で

極値 $f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$ をとる。㋕よりこれは極大値である。

(3)　$f_x=\cos x+\cos(x+y)$　……㋖

$f_y=-\sin y+\cos(x+y)$　……㋗　で $f_x=f_y=0$ とすると，$\cos x=-\sin y$　……㋘である。

また，㋖より三角関数の和を積にする公式を用いて

$$f_x=2\cos\frac{x+(x+y)}{2}\cos\frac{x-(x+y)}{2}=0$$

よって　$\dfrac{2x+y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+m\pi$（$m$は整数）　または　$\dfrac{y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（$n$は整数）

したがって㋖は $2x+y=(2m+1)\pi$　…㋖′　　または　$y=(2n+1)\pi$

　$0\leqq y\leqq\pi$　より　$y=\pi$　…㋖″

同様にして㋗を積の形にすると

$$f_y=\cos(x+y)+\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{x+2y+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0$$

よって　$\dfrac{x+2y+\frac{\pi}{2}}{2}=\dfrac{\pi}{2}+l\pi$（$l$は整数）

または　$\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{2}=\dfrac{\pi}{2}+s\pi$（$s$は整数）

したがって㋗は $x+2y=\dfrac{\pi}{2}+2l\pi$　…㋗′

または　$x=\dfrac{3}{2}\pi+2s\pi$ であるが　いま，$0\leqq x\leqq\pi$ なので不適。

(i)　㋖′と㋗′をみたす $(x,\ y)$ を求める。

　㋖′×2−㋗′　より

$$3x=(4m+2-2l)\pi-\frac{\pi}{2}$$

　よって　$x=\dfrac{4m+2-2l}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}$

　$0\leqq x\leqq\pi$　より　$x=\dfrac{\pi}{2}$ で $0\leqq y\leqq\pi$，㋘より $y=0,\ \pi$

　したがって　$(x,\ y)=\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right),\ \left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ で極値をとる可能性がある。

(ii)　㋖″と㋗′をみたす$(x,\ y)$を求める。

㋖″より $y=\pi$ であり㋘と $0 \leqq x \leqq \pi$ より $x=\dfrac{\pi}{2}$

したがって$(x,\ y)=\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$で極値をとる可能性がある。

$f_{xx}=-\sin x-\sin(x+y)$

$f_{xy}=-\sin(x+y)$

$f_{yy}=-\sin y-\sin(x+y)$ なので

$\mathrm{H}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)=(-1-1)(-1-1)-(-1)^2>0$ より$(x,\ y)=\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$で

極値 $f\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)=1+1+1=3$ をとる。

これは $f_{xx}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)=-1-1<0$ より極大値である。

一方，$\mathrm{H}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)=(-1+1)(0+1)-(-1)^2<0$ より

$(x,\ y)=\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$で極値をとらない。

229

(1)　$f_x=y,\ f_y=x$ より $f_x=f_y=0$ となるのは$(x,\ y)=(0,\ 0)$のときのみ。

$f_{xx}=0,\ f_{xy}=1,\ f_{yy}=0$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0)=0^2-1^2<0$

よって $f(x,\ y)$は$(0,\ 0)$で極値をとらない。

よって極値なし。

(2)　$f_x=-4x,\ f_y=2y$ より $f_x=f_y=0$ となるのは$(x,\ y)=(0,\ 0)$のときのみ。

$f_{xx}=-4,\ f_{xy}=0,\ f_{yy}=2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0)=-8-0^2<0$

よって $f(x,\ y)$は$(0,\ 0)$で極値をとらない。

よって極値なし。

(3)　$f_x=y+4(-x^{-2}),\ f_y=x+2(-y^{-2})$　より　$f_x=f_y=0$ となるのは

$y-\dfrac{4}{x^2}=0,\ x-\dfrac{2}{y^2}=0$ より $y-y^4=0$，$y(y^3-1)=0$ で $y\neq 0$ より $y=1$。

このとき $x=2$。よって$(x,\ y)=(2,\ 1)$で極値をとる可能性がある。

$f_{xx}=8x^{-3},\ f_{xy}=1,\ f_{yy}=4y^{-3}$　より　$\mathrm{H}(x,\ y)=8x^{-3}\cdot 4y^{-3}-1^2$ で $\mathrm{H}(2,\ 1)=4-1>0$ なので

$(2,\ 1)$で極値 $f(2,\ 1)=2+2+2=6$ をとる。

$f_{xx}(2,\ 1)=1>0$ よりこれは極小値。

⑷　$f_x = y + a(-x^{-2})$，$f_y = x + a(-y^{-2})$ より $f_x = f_y = 0$ となるのは
$y = ax^{-2}$，$x = ay^{-2}$ より $y = a(ay^{-2})^{-2} = a^{-1}y^4$ なので $y^4 - ay = y(y^3 - a) = 0$。

$y \neq 0$ より $y = a^{\frac{1}{3}}$　よって $x = a^{\frac{1}{3}}$

従って $\left(a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}\right)$ で極値をとる可能性がある。

$f_{xx} = 2ax^{-3}$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = 2ay^{-3}$ より $\mathrm{H}\left(a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}\right) = 2aa^{-1} \cdot 2aa^{-1} - 1 = 3 > 0$ なので

極値 $f\left(a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}\right) = a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} = 3a^{\frac{2}{3}}$ をとる。

これは $f_{xx}\left(a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}\right) = 2aa^{-1} = 2 > 0$ より極小値である。

⑸　$f = x^2 + xy + y^2 + 3x^{-1} + 3y^{-1}$　より　$f_x = 2x + y - 3x^{-2}$，$f_y = x + 2y - 3y^{-2}$　であり
$f_x = f_y = 0$ となるのは　$2x + y = 3x^{-2}$，$x + 2y = 3y^{-2}$　……㋐
つまり $2x^3 + yx^2 = 3$，$xy^2 + 2y^3 = 3$ のとき。
$2x^3 + yx^2 = xy^2 + 2y^3$　より　$2(x^3 - y^3) + yx^2 - xy^2 = 0$
従って

$$
\begin{aligned}
&2(x-y)(x^2+xy+y^2) + yx(x-y) \\
&= (x-y)(2x^2+3xy+2y^2) = (x-y)\left\{2\left(x^2+\frac{3}{2}xy\right)+2y^2\right\} \\
&= (x-y)\left[2\left\{\left(x+\frac{3}{4}y\right)^2-\frac{9}{16}y^2\right\}+2y^2\right] = (x-y)\left[2\left(x+\frac{3}{4}y\right)^2+\frac{7}{8}y^2\right] = 0
\end{aligned}
$$

より $(x,\ y) = (0,\ 0)$ 以外のとき

$x = y$　このとき㋐より $3x = 3x^{-2}$ で $x = 1$，$y = 1$

$f_{xx} = 2 + 6x^{-3}$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = 2 + 6y^{-3}$ より $\mathrm{H}(1,\ 1) = 8^2 - 1^2 > 0$ となり $(1,\ 1)$ で

極値 $f(1,\ 1) = 1 + 1 + 1 + 3(1 + 1) = 9$ をとる。

$f_{xx}(1,\ 1) = 2 + 6 > 0$ よりこれは極小値。

⑹ $f_x = 3x^2 + 2x + 2y = 0$ ……㋑

$f_y = 3y^2 + 2y + 2x = 0$ とすると

辺々引いて $3(y^2 - x^2) = 0$ より $y = \pm x$。㋑に代入して $3x^2 = 0$，$3x^2 + 4x = 0$。

これと㋑より $(x,\ y) = (0,\ 0)$，$\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$ のとき，極値をとる可能性がある。

$f_{xx} = 6x + 2,\ f_{xy} = 2,\ f_{yy} = 6y + 2$ より $\mathrm{H}(0,\ 0) = 2^2 - 2^2 = 0$。

$(0,\ 0)$ の近くでの z の変化を考えると $y = -x$ のとき $z = x^3 - x^3 + x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$

よって $(0,\ 0)$ で極値をとらない。

$\mathrm{H}\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right) = \left(6 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) + 2\right)^2 - 2^2 = 36 - 4 > 0$ より $\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$ で

極値 $f\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right) = 2\left(-\dfrac{4}{3}\right)^3 + 4\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2$

$= \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2\left(2 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) + 4\right) = \dfrac{16}{9} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{64}{27}$ をとる

これは $f_{xx}\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right) = 6 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) + 2 = -6 < 0$ より極大値

⑺ $f_x = 12x^3 - 4xy$ ……㋒

$f_y = -2x^2 + 2y = -2(x^2 - y)$ で $f_x = f_y = 0$ となるのは $y = x^2$ を㋒に代入して

$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときのみ。

$f_{xx} = 36x^2 - 4y,\ f_{xy} = -4x,\ f_{yy} = 2$ より $\mathrm{H}(0,\ 0) = 0 \times 2 - 0^2 = 0$

ここで $z = 3\left(x^4 - \dfrac{2}{3}y\right)^2 + y^2 = 3\left\{\left(x^2 - \dfrac{y}{3}\right)^2 - \dfrac{y^2}{9}\right\} + y^2$

$= 3\left(x^2 - \dfrac{y}{3}\right)^2 - \dfrac{y^2}{3} + y^2 = 3\left(x^2 - \dfrac{y}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{3}y^2 \geqq 0$

$x^2 - \dfrac{y}{3} = 0$ かつ $y = 0$ のとき，すなわち $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときのみ等号成立。

$(x,\ y) \fallingdotseq (0,\ 0)$ のとき $z > 0$　　よって z は $(x,\ y) = (0,\ 0)$ で極小値 $f(0,\ 0) = 0$ をとる。

⑻ $f_x = 4x^3 - 2x + 2y = 0$ ……㊓

$f_y = 4y^3 + 2x - 2y = 0$ となるのは $4x^3 + 4y^3 = 0$ より $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ ……㊔

ここで $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 - \dfrac{y^2}{4} + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 = 0$ となるのは

$y = \dfrac{y}{2}$ かつ $y = 0$ のとき，つまり $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときのみ。

$(x,\ y) \fallingdotseq 0$ のときは ㊔より $y = -x$。このとき㊓より $4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$

従って　$x = 0,\ \pm 1$ で $(x,\ y) = (0,\ 0),\ (\pm 1,\ \mp 1)$ （複号同順）

$f_{xx} = 12x^2 - 2,\ f_{xy} = 2,\ f_{yy} = 12y^2 - 2$ より $\mathrm{H}(0,\ 0) = (-2)^2 - 2^2 = 0$。

ここで，$(0,\ 0)$ 近くでの z の変化をみると

$y = 0$ のとき $z = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$ で $(0,\ 0)$ のとき $f_{xx}(0,\ 0) = -2 < 0$ より極大であり

$y = x$ のとき $z = 2x^4$ で $(0,\ 0)$ のとき極小になっている。従って z は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。

一方 $\mathrm{H}(\pm 1,\ \mp 1) = 10^2 - 2^2 > 0$ より $(x,\ y) = (\pm 1,\ \mp 1)$ で極値 $f(\pm 1,\ \mp 1) = 1 + 1 - 1 - 2 - 1 = -2$ をとる。

これは $f_{xx}(\pm 1,\ \mp 1) = 10 > 0$ より極小値である。

230

⑴　$F = x^2 + y^2 - 4 = 0$ とおくと $F_x = 2x$，　$F_y = 2y$ なので

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3}$$ （与式より　$x^2 + y^2 = 4$）

⑵　$F = x^3 + xy^2 - 2 = 0$ とおくと $F_x = 3x^2 + y^2$，　$F_y = 2xy$ より

$$y' = -\frac{3x^2 + y^2}{2xy} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3x^2 + y^2}{xy}$$

$$y'' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(xy)^2} \left\{(6x + 2yy')xy - (3x^2 + y^2)(y + xy')\right\}$$

$$= \frac{-1}{2(xy)^2} \cdot \left\{6x^2 y + 2y^2 y' x - (3x^2 + y^2)y - (3x^2 + y^2)xy'\right\}$$

$$= \frac{-1}{2(xy)^2} \left\{(3x^2 - y^2)y - (3x^2 - y^2)xy'\right\}$$

$$= \frac{-(3x^2 - y^2)}{2x^2 y^2} \cdot (y - xy') = \frac{y^2 - 3x^2}{2x^2 y^2} \cdot \left(y + \frac{x}{2} \cdot \frac{3x^2 + y^2}{xy}\right)$$

$$= \frac{y^2 - 3x^2}{2x^2 y^2} \cdot \frac{(2xy^2 + 3x^3 + xy^2)}{2xy} = \frac{(y^2 - 3x^2) \cdot (x^3 + xy^2) \cdot 3}{4x^3 y^3}$$

$$= \frac{3(y^2 - 3x^2)}{2x^3 y^3}$$ （与式より　$x^3 + xy^2 = 2$）

(3) $F = x^3 - 3axy + y^3 = 0$

$F_x = 3x^2 - 3ay$, $F_y = -3ax + 3y^2$ より

$$y' = -\frac{3x^2 - 3ay}{-3ax + 3y^2} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$$

$$y'' = \frac{1}{(ax - y^2)^2}\left\{(2x - ay')(ax - y^2) - (x^2 - ay)(a - 2yy')\right\}$$

$$= \frac{1}{(ax - y^2)^2}\left\{2x(ax - y^2) - a(ax - y^2)y' - a(x^2 - ay) + 2y(x^2 - ay)y'\right\}$$

（ここで，上の y' の式を変形した $(ax - y^2)y' = x^2 - ay$ を用いる）

$$= \frac{1}{(ax - y^2)^2}\left\{2x(ax - y^2) - 2a(x^2 - ay) + 2y\cdot\frac{(x^2 - ay)^2}{(ax - y^2)}\right\}$$

$$= \frac{2}{(ax - y^2)^3}\left\{x(a^2x^2 - 2axy^2 + y^4) - a(ax^3 - x^2y^2 - a^2xy + ay^3) + y(x^4 - 2ax^2y + a^2y^2)\right\}$$

$$= \frac{2}{(ax - y^2)^3}\left\{a^2x^3 - 2ax^2y^2 + xy^4 - a^2x^3 + ax^2y^2 + a^3xy - a^2y^3 + x^4y - 2ax^2y^2 + a^2y^3\right\}$$

$$= \frac{2}{(ax - y^2)^3}(-3ax^2y^2 + xy^4 + x^4y + a^3xy) = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}$$

（与式より， $x^3 - 3axy + y^3 = 0$）

(4) $F = ax^2 + 2cxy + by^2 - 1 = 0$ とおくと $F_x = 2ax + 2cy$, $F_y = 2cx + 2by$ より

$$y' = -\frac{ax + cy}{cx + by} \quad \cdots ㋕ \quad よって$$

$$y'' = -\frac{1}{(cx + by)^2}\left\{(a + cy')(cx + by) - (ax + cy)(c + by')\right\}$$

$$= \frac{-1}{(cx + by)^2}\left\{a(cx + by) + cy'(cx + by) - (ax + cy)c - (ax + cy)by'\right\}$$

（㋕より， $y'(cx + by) = -(ax + cy)$）

$$= \frac{-1}{(cx + by)^2}\left\{a(cx + by) - 2c(ax + cy) + \frac{(ax + cy)^2 b}{cx + by}\right\}$$

$$= \frac{-1}{(cx + by)^3}\left\{a(cx + by)^2 - 2c(ax + cy)(cx + by) + b(ax + cy)^2\right\}$$

$$= \frac{-1}{(cx + by)^3}\left\{a(c^2x^2 + 2bcxy + b^2y^2) - 2c(acx^2 + abxy + c^2xy + bcy^2) + b(a^2x^2 + 2acxy + c^2y^2)\right\}$$

$$= \frac{-1}{(cx + by)^3}(-ac^2x^2 + 2abcxy + ab^2y^2 - bc^2y^2 - 2c^3xy)$$

$$= \frac{-1}{(cx + by)^3}\left\{c^2(-ax^2 - by^2 - 2cxy) + ab(2cxy + by^2 + ax^2)\right\}$$

$$= \frac{-1}{(cx + by)^3}(-c^2 + ab) \quad （与式より，\ ax^2 + by^2 + 2cxy = 1）$$

$$= \frac{c^2 - ab}{(cx + by)^3}$$

231

⑴　$F = x^m + y^n - 2 = 0$ とおくと $F_x = mx^{m-1}$，$F_y = ny^{n-1}$ より

$F_x(1,\ 1) = m$，$F_y = (1,\ 1) = n$ なので，接線は $m(x-1) + n(y-1) = 0$ より

$mx + ny = m + n$

法線は $n(x-1) + m(y-1) = 0$ より $nx - my = n - m$

⑵　$F = x^m y^n - 1 = 0$ とおくと $F_x = mx^{n-1}y^n$，$F_y = x^m \cdot ny^{n-1}$ より

$F_x(1,\ 1) = m$，$F_y = (1,\ 1) = n$ なので，接線は $m(x-1) + n(y-1) = 0$ より

$mx + ny = m + n$

法線は $n(x-1) - m(y-1) = 0$ より $nx - my = n - m$

⑶　$F = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ とおくと $F_x = \dfrac{2}{a^2}x$，$F_y = \dfrac{2}{b^2}y$ より

$$F_x(x_0,\ y_0) = \frac{2x_0}{a^2},\quad F_y(x_0,\ y_0) = \frac{2y_0}{b^2}$$

より接線は

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

よって　$\dfrac{2x_0}{a^2}x + \dfrac{2y_0}{b^2}y = \dfrac{2}{a^2}{x_0}^2 + \dfrac{2}{b^2}{y_0}^2 = 2$

（P は楕円上にあるので，$\dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = 1$）

よって　$\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$

法線は $\dfrac{2y_0}{b^2}(x - x_0) - \dfrac{2x_0}{a^2}(y - y_0) = 0$

よって　$\dfrac{y_0}{b^2}x - \dfrac{x_0}{a^2}y = \dfrac{x_0y_0}{b^2} - \dfrac{x_0y_0}{a^2}$

⑷　$F = y^2 - 4mx = 0$ より $F_x = -4m$，$F_y = 2y$　より

$F_x(x_0,\ y_0) = -4m$，$F_y(x_0,\ y_0) = 2y_0$ なので

接線は $-4m(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$ で $-4mx + 2y_0 y = -4mx_0 + 2{y_0}^2$

$(x_0,\ y_0)$ は放物線上にあるので　${y_0}^2 = 4mx_0$ だから

$-4mx + 2y_0 y = -4mx_0 + 8mx_0$

よって　$y_0 y = 2m(x + x_0)$

接線は　$2mx - y_0 y = -2mx_0$

法線は　$2y_0(x - x_0) + 4m(y - y_0) = 0$ より

$2y_0 x + 4my = 2x_0 y_0 + 4my_0$ で $y_0 x + 2my = x_0 y_0 + 2my_0$

⑸　$F = xy - m = 0$ より $F_x = y$，$F_y = x$ より $F_x(x_0,\ y_0) = y_0$，$F_y(x_0,\ y_0) = x_0$

よって接線は

$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = 0$ より

$y_0 x + x_0 y = 2x_0 y_0$

$(x_0,\ y_0)$ は双曲線上にあるので　$x_0 y_0 = m$ である。

よって

接線は　$y_0 x + x_0 y = 2m$

法線は　$x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0$　より　$x_0 x - y_0 y = {x_0}^2 - {y_0}^2$

⑹　$F = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ とおくと $F_x = \dfrac{2}{a^2}x$，$F_y = \dfrac{-2}{b^2}y$ なので

$F_x(x_0,\ y_0) = \dfrac{2x_0}{a^2}$，$F_y(x_0,\ y_0) = \dfrac{-2y_0}{b^2}$

よって接線は

$\dfrac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{-2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$ より $\dfrac{2x_0}{a^2}x + \dfrac{-2y_0}{b^2}y = \dfrac{2{x_0}^2}{a^2} - \dfrac{2{y_0}^2}{b^2} = 2$

（$(x_0,\ y_0)$ は双曲線上の点なので　$\dfrac{{x_0}^2}{a^2} - \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = l$ である。）

従って　$\dfrac{x_0}{a^2}x - \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$

法線は　$\dfrac{-2y_0}{b^2}(x - x_0) - \dfrac{2x_0}{a^2}(y - y_0) = 0$ より $\dfrac{y_0}{b^2}x + \dfrac{x_0}{a^2}y = \dfrac{x_0 y_0}{b^2} + \dfrac{x_0 y_0}{a^2}$

⑴ $F=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$とおくと$F_x=2(x^2+y^2)\cdot 2x-2a^2x$

$F=0,\ F_x=0$をみたす点を求める。

$F_x=0$より$(x^2+y^2)\cdot 2x-a^2x=x\{2(x^2+y^2)-a^2\}=0$で$x=0$，または$2(x^2+y^2)=a^2$。

$F=0$に代入すると$x=0$のとき

$y^4+a^2y^2=y^2(y^2+a^2)=0$より$y=0$。

一方　$x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}\cdots$㋐を$F=0$に代入すると

$\dfrac{a^4}{4}=a^2(x^2-y^2)$より$x^2-y^2=\dfrac{a^2}{4}\cdots$㋑　　㋐＋㋑より　　$2x^2=\dfrac{3}{4}a^2$。

よって　$x^2=\dfrac{3}{8}a^2$，$a>0$より，$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$，$y=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}a$

以上により極値をとる候補は次の5点

$A(0,\ 0)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$，$C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}a\right)$，$D\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$，$E\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}a\right)$

Aでは$F_y=0$となるのでこれは不適として除外する。

$F_{xx}=4(3x^2+y^2)-2a^2$，$F_y=2(x^2+y^2)\cdot 2y+2a^2y$よりB，Dのときは

$F_{xx}=4\left(3\cdot\dfrac{3}{8}a^2+\dfrac{1}{8}a^2\right)-2a^2=5a^2-2a^2$，$F_y=2\cdot\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}a+2a^2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}a=\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}+\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a^3$

よって　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{3a^2}{\sqrt{2}a^3}=-\dfrac{3}{\sqrt{2}a}<0$。

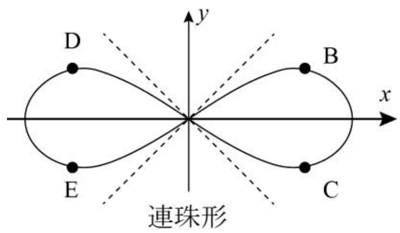
C，Eのとき，F_{xx}はB，Dのときと同じで

$F_y=2\cdot\dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{2}}a+2a^2\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}a=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}a^3-\dfrac{1}{\sqrt{2}}a^3=-\sqrt{2}a^3$

よって　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{3a^2}{\sqrt{2}a^3}=\dfrac{3}{\sqrt{2}a}>0$

従って　B，Dで極大値　$y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}a$

C，Eで極小値　$y=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}a$



連珠形

（注）　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$として与式を極方程式に直すと

$(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^2=a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)$　より　$r^2=a^2\cos 2\theta$となり曲線の形を理解しやすくなる。

⑵　$F = xy^2 - x^2y - 2a^3$ とおくと $F_x = y^2 - 2xy$, $F_y = 2xy - x^2$ である。

$F = 0$, $F_x = 0$ をみたす点を求めると

$F_x = 0$ より $y(y - 2x) = 0$ で, $y = 0$, $y = 2x$ である。 $y = 0$ のとき $F = -2a^3 = 0$ となって不適。

$y = 2x$ のとき $F = 4x^3 - 2x^3 - 2a^3 = 2x^3 - 2a^3 = 0$ 。 $a > 0$ より $x = a$ 。

このとき $y = 2a$ 。よって $(a,\ 2a)$ で極値をとる可能性がある。

$F_{xx} = -2y$ より $F_{xx}(a,\ 2a) = -4a$

$F_y(a,\ 2a) = 2 \cdot a \cdot 2a - a^2 = 3a^2$

より　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y} = -\dfrac{-4a}{3a^2} = \dfrac{4}{3a} > 0$　だから $x = a$ のとき極小値 $y = 2a$ をとる。

233

条件 $g(x,\ y) = ax + by + c = 0$ のもと AP の長さの 2 乗 $f(x,\ y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ の最小値を求める。

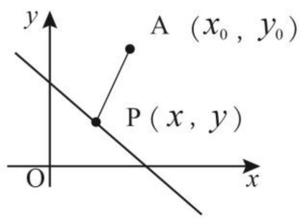
$f_x = 2(x - x_0)$, $f_y = 2(y - y_0)$

$g_x = a$, $g_y = b$ なのでラグランジュの乗数 λ を用いると，極値をとる点 $(x,\ y)$ では $\boxed{教}$ P.119④⑤より

$2(x - x_0) - \lambda a = 0$　かつ　$2(y - y_0) - \lambda b = 0$ をみたす必要がある。（λ はラグランジュの乗数）

つまり $x - x_0 = \dfrac{a\lambda}{2}$, $y - y_0 = \dfrac{b\lambda}{2}$ より $(x,\ y) = \left(x_0 + \dfrac{a\lambda}{2},\ y_0 + \dfrac{b\lambda}{2}\right)$　……㋐のとき

$f(x,\ y) = \left(\dfrac{a\lambda}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b\lambda}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{4}\lambda^2$



ここで λ は，㋐が条件 $g(x,\ y) = 0$ をみたすことより

$a\left(x_0 + \dfrac{a\lambda}{2}\right) + b\left(y_0 + \dfrac{b\lambda}{2}\right) + c = 0$ だから $ax_0 + by_0 + c = -\dfrac{a^2 + b^2}{2}\lambda$ で

$$\lambda = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \cdot 2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \cdot \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot 4$$

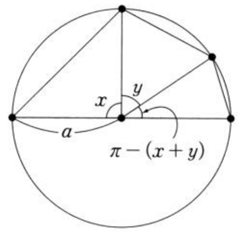
これが極値の候補だが，いま，極値があり，それが最小値であることが分っている。

よって答は　$\dfrac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$　（a, b は同時に 0 とならない。）

234

円の半径を a とし，直径以外の 3 辺の各内角の大きさを x，y，$\pi-(x+y)$ とする。

このとき四角形の面積 $f(x,\ y)$ は



$$f(x,\ y)=\frac{a\cdot a\sin x}{2}+\frac{a\cdot a\sin y}{2}+\frac{a\cdot a\sin(\pi-(x+y))}{2}$$
$$=\frac{a^2\{\sin x+\sin y+\sin(x+y)\}}{2}$$

よって問題 95 と同じ問題になる。その解答より $\sin x+\sin y+\sin(x+y)$

（$0<x<\pi,\ 0<y<\pi$）は $(x,\ y)\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)$ のとき極大値をとる。

よって　$x=y=\frac{\pi}{3}$ のとき面積は最大値をとる。

235

3 辺の長さを x，y，$k-(x+y)$ とすると

直方体の体積 $f(x,\ y)=xy(k-x-y)=kxy-x^2y-xy^2$ であり

$f_x=ky-2xy-y^2=0$　…㋐

$f_y=kx-x^2-2xy=0$　…㋑

とおくと㋐－㋑より

$k(y-x)-(y-x)(y+x)=(y-x)\{k-(y+x)\}=0$ で

$y=x$ または $k=x+y$。後者では三角形ができず不適。前者では㋐より $x=y=\frac{1}{3}k$ となる。

$f_{xx}=-2y$，$f_{xy}=k-2y$，$f_{yy}=-2x$ より

$\mathrm{H}\left(\frac{k}{3},\ \frac{k}{3}\right)=\left(\frac{-2}{3}k\right)^2-\left(k-\frac{2}{3}k\right)^2=\frac{k^2}{3}>0$ となり $f(x,\ y)$ は $\left(\frac{k}{3},\ \frac{k}{3}\right)$ で極値

$f\left(\frac{k}{3},\ \frac{k}{3}\right)=\frac{k^3}{27}$ をとり $f_{xx}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}k<0$ よりそれは極大値。

つまり，一辺 $\frac{k}{3}$ の立方体のとき体積は最大である。

注　前問と同様 3 辺の長さを $x,\ y,\ z$ とし条件 $g(x,\ y,\ z)=x+y+z-k=0$ のもと $f(x,\ y,\ z)=xyz$ の最大を考えてもよい。

注　相加平均と相乗平均の関係より x，y，z が正数のとき

$$\frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$$

今 $x+y+z=k$ より $\frac{k^3}{27}\geqq xyz$ として $x=y=z=\frac{k}{3}$ のとき $f(x,\ y,\ z)=xyz$ の最大は $\frac{k^3}{27}$ であるとしてもよい。

円の半径を k とし三角形の各辺の中心角を x，y，$2\pi - x - y$ とする。

三角形の面積　$f(x,\ y) = \frac{1}{2}k \cdot k\sin x + \frac{1}{2}k \cdot k\sin y$

$$+\frac{1}{2}k \cdot k\sin(2\pi - (x+y))$$

$$= \frac{k^2}{2}(\sin x + \sin y - \sin(x+y))$$ より

$$f_x = \frac{k^2}{2}(\cos x - \cos(x+y)) = 0 \quad \cdots\cdots ㋐$$

$$f_y = \frac{k^2}{2}(\cos y - \cos(x+y)) = 0 \quad \cdots\cdots ㋑$$

面積が最大になるのは三角形が鋭角三角形または直角三角形のときなので

$0 < x2 \leqq \pi$，$0 < y \leqq \pi$，$x + y < 2\pi$ とする　……㋒

となるのは　$\cos x = \cos y$ のときで ㋒ より $x = y$　㋐ より

$$\cos x - \cos 2x = \cos x - (2\cos^2 x - 1) = \cos x - 2\cos^2 x + 1$$

$$= -(2\cos^2 x - \cos x - 1) = -(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

となるのは $\cos x = 1,\ -\frac{1}{2}$ のとき。

㋒より $x = \frac{2}{3}\pi$　よって $y = \frac{2}{3}\pi$ である。

$$f_{xx} = \frac{k^2}{2}(-\sin x + \sin(x+y))$$

$$f_{yy} = \frac{k^2}{2}(-\sin y - \sin(x+y))$$

$$f_{xy} = \frac{k^2}{2}\sin(x+y)$$

よって　$\mathrm{H}\left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right) = \left\{\frac{k^2}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{k^2}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2$

$= \frac{k^4}{4}\left(3 - \frac{3}{4}\right) > 0$ より極値　$f\left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right)$

$= \frac{k^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}k^2$ をとる。

$f_{xx}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right) = \frac{k^2}{2} \cdot \left(-\sqrt{3}\right) < 0$ よりこれは極大値である。

よって正三角形のとき面積は最大である。

注　各辺の内角を x，y，z とし，条件 $g(x,\ y,\ z) = x + y + z - 2\pi$ のもとで

$f(x,\ y,\ z) = \frac{k^2}{2}(\sin x + \sin y + \sin z)$ の最大を考えてもよい。

237

縦，横，高さを各々x，y，zとすると$xyz = k$の仮定から$z = \dfrac{k}{xy}$であり

表面積$f(x,\ y) = xy + 2x \cdot \dfrac{k}{xy} + 2y \cdot \dfrac{k}{xy} = xy + 2k\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right)$

$f_x = y + 2k(-x^{-2}) = 0$ ……㋐

$f_y = x + 2k(-y^{-2}) = 0$ のとき $y = \dfrac{2k}{x^2}$，$x = \dfrac{2k}{y^2}$ より$x^2 y = xy^2$

よって$xy(x - y) = 0$ 従って $x = y$ ㋐より$x = y = \sqrt[3]{2k}$である。

$f_{xx} = 2k \cdot 2x^{-3}$，$f_{xy} = 1$，$f_{yy} = 2k \cdot 2y^{-3}$より

$\mathrm{H}\left(\sqrt[3]{2k},\ \sqrt[3]{2k}\right) = \left(4k \cdot \dfrac{1}{2k}\right)^2 - 1 > 0$ より f は $\left(\sqrt[3]{2k},\ \sqrt[3]{2k}\right)$で極値

$f\left(\sqrt[3]{2k},\ \sqrt[3]{2k}\right) = \left(\sqrt[3]{2k}\right)^2 + 2k \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{2k}} = 2\left(\sqrt[3]{2k}\right)^2$をとる。

$f_{xx}\left(\sqrt[3]{2k},\ \sqrt[3]{2k}\right) = 2 > 0$ よりこれは極小値。

またこのとき $z = \dfrac{k}{\left(\sqrt[3]{2k}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2k}{\left(\sqrt[3]{2k}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$

よって縦$\sqrt[3]{2k}$，横$\sqrt[3]{2k}$，高さ$\dfrac{\sqrt[3]{2k}}{2}$のとき表面積は最小。

注 $g(x,\ y,\ z) = xyz - k = 0$の条件のもと$f(x,\ y,\ z) = xy + 2xz + 2yz$の最小を考えてもよい。

238

$f(x,\ y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$ に対し

$f_x = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 2a^2 \cdot 2x$

$= 4x(x^2 + y^2 - a^2) = 0$ ……㋐

同様に $f_y = 4y(x^2 + y^2 + a^2) = 0$ ……㋑

とすると「$x = 0$ または $x^2 + y^2 = a^2$」かつ「$y = 0$ または $x^2 + y^2 = -a^2$」なので

$(x,\ y) = (0,\ 0)$，$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$

$f_{xx} = 4(x^2 + y^2 - a^2) + 4x \cdot 2x$

$f_{yy} = 4(x^2 + y^2 + a^2) + 4y \cdot 2y$

$f_{xy} = 4x \cdot 2y$ より

$\mathrm{H}(0,\ 0) = -4a^2 \cdot 4a^2 < 0$より$f$は$(0,\ 0)$で極値をとらない。

$\mathrm{H}(\pm a,\ 0) = 8a^2 \cdot 8a^2 - 0 = 64a^4 > 0$より$f$は$(\pm a,\ 0)$で

極値$f(\pm a,\ 0) = a^4 - 2a^2 \cdot a^2 = -a^4$をとる。

$f_{xx}(\pm a,\ 0) = 8a^2 > 0$よりこれは極小値

239

$z = f(x,\ y) = x^2 + xy + y^2$ とする。

$f_x = 2x + y = 0,\quad f_y = x + 2y = 0$ とすると $(x,\ y) = (0,\ 0)$

$f_{xx} = 2,\quad f_{xy} = 1,\quad f_{yy} = 2$ より $\mathrm{H}(0,\ 0) = 2 \times 2 - 1^2 > 0$

よって f は $(0,\ 0)$ で極値 $f(0,\ 0) = 0$ をとる。

$f_x(0,\ 0) = 2 > 0$ よりこれは極小値　……㋐

一方，$g(x,\ y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$　……㋑　としてこの条件のもと f の極値を求める。

$g_x = 2x,\ g_y = 2y$ より $\dfrac{2x + y}{2x} = \dfrac{x + 2y}{2y} = \lambda$　（ラグランジュの乗数）

より $4xy + 2y^2 = 2x^2 + 4xy$

よって　$y^2 - x^2 = 0$　従って $y = \pm x$ で㋑に代入して　$2x^2 = 1$。

よって　$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　従って $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極値をとる可能性がある。

$x^2 + y^2 = 1$ の条件のもとでは f が最大最小をとることを既知として次の値は最大値と最小値である。…㋒

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

㋐　㋒　より $x^2 + y^2 \leqq 1$ をみたす点については $(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとり，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき最小値 0 をとる。

発展問題

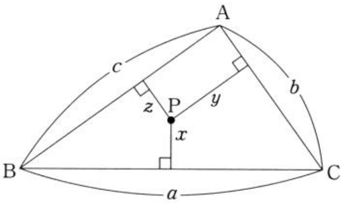
240

△ABCについて3辺の長さを各々BC = a，CA = b，AB = cとおく。

また，三角形内部の一点Pからの BC，CA，ABにおろした垂線の長さを各々x，y，zとおく。

今，△ABC = k（一定値）とおくと△ABC = $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz = k$であり $z = (2k - ax - by)\frac{1}{c}$　…＊

従って題意の距離の平方和を$f(x,\ y)$とおくと



$$f(x,\ y) = x^2 + y^2 + \frac{(2k - ax - by)^2}{c^2}$$

$$f_x = 2x + \frac{2}{c^2}(2k - ax - by)(-a),\ f_y = 2y + \frac{2}{c^2}(2k - ax - by)(-b)$$

について $f_x = f_y = 0$ となるのは

$c^2 x - 2ak + a^2 x + aby = 0$　……㋐

$c^2 y - 2bk + abx + b^2 y = 0$　……㋑

㋐×b−㋑×a　より

$$bc^2 x - 2abk + a^2 bx + ab^2 y = 0$$

$$ac^2 y - 2abk + a^2 bx + ab^2 y = 0$$

$$c^2(bx - ay) = 0$$

よって　$bx = ay$。これを㋐に代入して　$c^2 x - 2ak + a^2 x + b^2 x = 0$　よって

$$x = \frac{2ak}{a^2 + b^2 + b^2}\quad ……㋒$$

同様に　$bx = ay$を㋑に代入して　$c^2 y - 2bk + a^2 y + b^2 y = 0$より

$$y = \frac{2bk}{a^2 + b^2 + c^2}\quad ……㋓$$

$$f_{xx} = 2 + \frac{2}{c^2}(-a)(-a)$$

$$f_{xy} = \frac{2}{c^2}(-b)(-a)$$

$$f_{yy} = 2 + \frac{2}{c^2}(-b)(-b)$$　より

$$\mathrm{H}\left(\frac{2ak}{a^2 + b^2 + c^2},\ \frac{2bk}{a^2 + b^2 + c^2}\right) = \left(2 + \frac{2a^2}{c^2}\right)\left(2 + \frac{2b^2}{c^2}\right) - \left(\frac{2ab}{c^2}\right)^2$$

$$= 4 + \frac{4b^2}{c^2} + \frac{4a^2}{c^2} + \frac{4a^2 b^2}{c^4} - \frac{4a^2 b^2}{c^4} > 0$$

なのでfは㋒，㋓の$(x,\ y)$において極値

$$f(x,\ y) = \left(\frac{2ak}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{2bk}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{2ck}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2$$

なぜなら＊より x，y が各々㋒，㋓で

$$z=\frac{1}{c}\left(2k-\frac{2a^2k}{a^2+b^2+c^2}-\frac{2b^2k}{a^2+b^2+c^2}\right)=\frac{2ck}{a^2+b^2+c^2}\quad\cdots\cdots㋔$$

$f_{xx}=2+\dfrac{2a^2}{c^2}>0$ よりこれは極小値である。

$f(x,\ y)$ は x，y の 2 次式であるからこれが最小値である。

以上により $f(x,\ y)$ が最小となる点 P は，辺 BC，CA，AC からの距離が各々①，②，③であるような位置である。

$$x=\frac{2ak}{a^2+b^2+c^2}\quad\cdots\cdots①$$

$$y=\frac{2bk}{a^2+b^2+c^2}\quad\cdots\cdots②$$

$$z=\frac{4ck}{a^2+b^2+c^2}\quad\cdots\cdots③$$

別解　$g(x,\ y,\ z)=ax+by+cz-2k=0$ の条件のもと $f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$ の最小を考えてもよい。

$f_x=2x$，$f_y=2y$，$f_z=2z$，$g_x=a$，$g_y=b$，$g_z=c$ より $\dfrac{2x}{a}=\dfrac{2y}{b}=\dfrac{2z}{c}=\lambda$

条件 $g=0$ に代入して　$ax+b\cdot\dfrac{b}{a}x+c\cdot\dfrac{c}{a}x-2k=0$　$x=\dfrac{2ak}{a^2+b^2+c^2}$

同様にして　$y=\dfrac{2bk}{a^2+b^2+c^2}$，$z=\dfrac{2ck}{a^2+b^2+c^2}$

辺 BC，CA，AC からの距離が各々これらの x，y，z である点 P が f を最小にする。

241

3辺の長さが x，y，z のとき仮定より $x+y+z=2k$ (一定値)　よってヘロンの公式より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{k(k-x)(k-y)(x+y-k)}$$

そこで

$f(x,\ y)=(k-x)(k-y)(x+y-k)$ が最大になる x，y を求める。

$$f_x=(-1)(k-y)(x+y-k)+(k-x)(k-y)$$
$$=(k-y)(-x-y+k+k-x)=(k-y)(2k-y-2x)=0$$
$$f_y=(-1)(k-x)(x+y-k)+(k-x)(k-y)$$
$$=(k-x)(-x-y+k+k-y)=(k-x)(2k-x-2y)=0$$

とすると　$k=y$ または $y+2x=2k$　かつ　$k=x$ または $x+2y=2k$

今，$k\fallingdotseq x$，$k\fallingdotseq y$ より　$y+2x=x+2y$　　よって $x=y$

従って $3x=2k$，$x=\dfrac{2}{3}k=y$

$$f_{xx}=(k-y)(-2)$$
$$f_{xy}=(-1)(2k-y-2x)+(k-y)(-1)$$
$$=-2k+y+2x-k+y=2x+2y-3k$$

$f_{yy}=(k-x)(-2)$ より

$\mathrm{H}\left(\dfrac{2}{3}k,\ \dfrac{2}{3}k\right)=\left\{\dfrac{k}{3}\cdot(-2)\right\}^2-\left(-\dfrac{k}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}k^2-\dfrac{1}{9}k^2>0$ で f は $\left(\dfrac{2}{3}k,\ \dfrac{2}{3}k\right)$ で

極値 $f\left(\dfrac{2k}{3},\ \dfrac{2k}{3}\right)=\dfrac{1}{3}k\cdot\dfrac{1}{3}k\cdot\dfrac{1}{3}k=\dfrac{1}{27}k^3$ をとり

$f_{xx}\left(\dfrac{1}{3}k,\ \dfrac{1}{3}k\right)=-\dfrac{2}{3}k<0$ よりこれは極大値。よって $\left(\dfrac{2}{3}k,\ \dfrac{2}{3}k\right)$ のとき，つまり正三角形のとき面積は最大になる。

別解　$x+y+z=2k$ (一定)のとき $\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{k(k-x)(k-y)(k-z)}$　……㋐の最大を求める為，

条件 $g(x,\ y)=x+y+z-2k=0$ のもと $f(x,\ y)=(k-x)(k-y)(k-z)$ を調べる。

$$f_x=-(k-y)(k-z)$$
$$f_y=-(k-x)(k-z)$$
$$f_z=-(k-x)(k-y)$$

$g_x=1$，$g_y=1$，$g_z=1$ より

$\dfrac{-(k-y)(k-z)}{1}=\dfrac{-(k-x)(k-z)}{1}=\dfrac{-(k-x)(k-y)}{1}=\lambda$ で

㋐より $x\fallingdotseq k$，$y\fallingdotseq k$，$z\fallingdotseq k$ なので

$k-y=k-x$　かつ　$k-z=k-y$。

よって $x=y=z$。$g=0$ に代入して　$x=y=z=\dfrac{2}{3}k$　すなわち正三角形のとき f

つまり△ABC は最大となる。

注　問題 36 の解答の（注）と同様，相加平均，相乗平均の関係式。正数 a，b，c に対し

$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$（等号成立は $a=b=c$ のとき）を用いてもよい。

㋐で $k-x$，$k-y$，$k-z$ は正数なので

$\{(k-x)+(k-y)+(k-z)\}\times\dfrac{1}{3} \geqq \sqrt[3]{(k-x)+(k-y)+(k-z)}$ より

$\dfrac{k}{3} \geqq \sqrt[3]{(k-x)(k-y)(k-z)}$，等号成立は $k-x=k-y=k-z$ のとき。

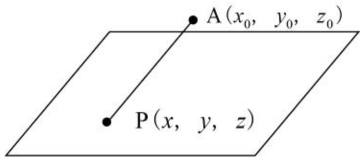
つまり $x=y=z$ のとき。従って $x=y=z=\dfrac{2}{3}k$ の正三角形のとき

△ABC は最大値 $\sqrt{k\cdot\left(\dfrac{k}{3}\right)^3}=\dfrac{k^2}{3\sqrt{3}}$ をとる。

242

問題 233 の解答と同様の方法をとればよい。

定点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ と平面上の一点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ との距離の 2 乗 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=f(x,\ y,\ z)$ の最小を条件 $g(x,\ y,\ z)=ax+by+cz=0$ のもとで考える。



$f_x=2(x-x_0)$，$f_y=2(y-y_0)$

$f_z=2(z-z_0)$，$g_x=a$，$g_y=b$，$g_z=c$　より　f が極値をとる $(x,\ y,\ z)$ で

$2(x-x_0)-\lambda a=0$　かつ　$2(y-y_0)-\lambda b=0$　かつ　$2(z-z_0)-\lambda c=0$

をみたす必要がある。（λ はラグランジュの乗数）

よって

$$x=x_0+\frac{a\lambda}{2},\quad y=y_0+\frac{b\lambda}{2},\quad z=z_0+\frac{c\lambda}{2}\quad \cdots ㋐$$

これらを $f(x,\ y,\ z)$ に代入して

$$f=\left(\frac{a\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{b\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{c\lambda}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\cdot\lambda^2$$

㋐を $g(x,\ y,\ z)=0$ に代入すると

$$ax_0+\frac{a^2\lambda}{2}+by_0+\frac{b^2\lambda}{2}+cz_0+\frac{c^2\lambda}{2}=ax_0+by_0+cz_0+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\lambda=0$$

よって $\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{-(ax_0+by_0+cz_0)}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{(ax_0+by_0+cz_0)^2}{a^2+b^2+c^2}$ が極値の候補だが，今 f には極値がありそれが最小値であることが分っているので答は

$\dfrac{|\ ax_0+by_0+cz_0+d\ |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$　　（与式より a，b，c は同時に 0 とならない。）