

3節 導関数の応用

A 問題

48

(1) $f(x) = x^3 - 2x$ とすると
 $f'(x) = 3x^2 - 2$ $f'(1) = 1$
 よって、接線の方程式は
 $y + 1 = x - 1$ より $y = x - 2$

(2) $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2$ とすると
 $f'(x) = -4x^3 + 6x$ $f'(-1) = -2$
 よって、接線の方程式は
 $y - 4 = -2(x + 1)$ より $y = -2x + 2$

(3) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ とすると
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ $f'(2) = 0$
 よって、接線の方程式は
 $y - 3 = 0$ より $y = 3$

(4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ とすると
 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$ $f'(2) = 2$
 よって、接線の方程式は
 $y - 1 = 2(x - 2)$ より $y = 2x - 3$

(5) $f(x) = \sin x$ とすると
 $f'(x) = \cos x$ $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
 よって、接線の方程式は
 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ より
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

(6) $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ とすると
 $f'(x) = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
 よって、接線の方程式は
 $y - 1 = x - \frac{\pi}{2}$ より
 $y = x + 1 - \frac{\pi}{2}$

(7) $f(x) = e \log x$ とすると
 $f'(x) = \frac{e}{x}$ $f'(e) = 1$
 よって、接線の方程式は
 $y - e = x - e$ より $y = x$

(8) $f(x) = e^{2x}$ とすると
 $f'(x) = 2e^{2x}$ $f'(1) = 2e^2$
 よって、接線の方程式は
 $y - e^2 = 2e^2(x - 1)$ より $y = 2e^2x - e^2$

49

(1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 12$
 $f'(x) = x^3 - 8x = x(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})$

これより、増減表は下のようになる。

| | | | | | | | |
|---------|------------|--------------|------------|------|------------|-------------|------------|
| x | \cdots | $-2\sqrt{2}$ | \cdots | 0 | \cdots | $2\sqrt{2}$ | \cdots |
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | \searrow | -4 | \nearrow | 12 | \searrow | -4 | \nearrow |

よって

$x = 0$ のとき 極大値 12

$x = \pm 2\sqrt{2}$ のとき 極小値 -4

$$(2) \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+3) - (x+1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

これより，増減表は下のようになる。

| | | | | | |
|---------|------------|----------------|------------|---------------|------------|
| x | ... | -3 | ... | 1 | ... |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | \searrow | $-\frac{1}{6}$ | \nearrow | $\frac{1}{2}$ | \searrow |

よって

$$x=1 \text{ のとき} \quad \text{極大値} \quad \frac{1}{2}$$

$$x=-3 \text{ のとき} \quad \text{極小値} \quad -\frac{1}{6}$$

$$(3) \quad f(x) = x(x-1)e^x$$

$$f'(x) = (2x-1)e^x + (x^2-x)e^x = (x^2+x-1)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{ を解くと } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

これより，増減表は下のようになる。

| | | | | | |
|---------|------------|---|------------|--|------------|
| x | ... | $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | ... | $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | ... |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | \nearrow | $\frac{2+\sqrt{5}}{e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$ | \searrow | $\frac{2-\sqrt{5}}{e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$ | \nearrow |

よって

$$x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ のとき} \quad \text{極大値} \quad \frac{2+\sqrt{5}}{e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ のとき} \quad \text{極小値} \quad \frac{2-\sqrt{5}}{e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$(4) \quad f(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2 \cdot (-2e^{-2x}) = -2x(x-1)e^{-2x}$$

これより，増減表は次のようになる。

| | | | | | |
|---------|------------|---|------------|-----------------|------------|
| x | ... | 0 | ... | 1 | ... |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | \searrow | 0 | \nearrow | $\frac{1}{e^2}$ | \searrow |

よって

$$x=1 \text{ のとき} \quad \text{極大値} \quad \frac{1}{e^2}$$

$$x=0 \text{ のとき} \quad \text{極小値} \quad 0$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{1 + \log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \log x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2}$$

これより，増減表は下のようになる。

| | | | | |
|---------|---|-----|---|-----|
| x | 0 | ... | 1 | ... |
| $f'(x)$ | / | + | 0 | - |
| $f(x)$ | / | ↗ | 1 | ↘ |

よって $x = 1$ のとき 極大値 1

$$(6) \quad f(x) = x^3 \log x$$

$$f'(x) = 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \left(\log x + \frac{1}{3} \right)$$

これより，増減表は下のようになる。

| | | | | |
|---------|---|-----|--------------------|-----|
| x | 0 | ... | $e^{-\frac{1}{3}}$ | ... |
| $f'(x)$ | / | - | 0 | + |
| $f(x)$ | / | ↘ | $-\frac{1}{3e}$ | ↗ |

よって $x = e^{-\frac{1}{3}}$ のとき 極小値 $-\frac{1}{3e}$

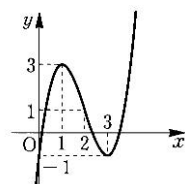
50

$$(1) \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$y'' = 6x - 12 = 6(x-2)$$

| | | | | | | | |
|-------|-----|---|-----|---|-----|----|-----|
| x | ... | 1 | ... | 2 | ... | 3 | ... |
| y' | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| y'' | - | - | - | 0 | + | + | + |
| y | ↖ | 3 | ↘ | 1 | ↖ | -1 | ↗ |

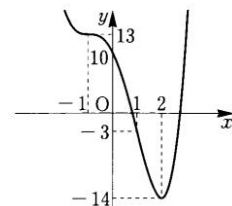


$$(2) \quad y = x^4 - 6x^2 - 8x + 10$$

$$y' = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$$

$$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$$

| | | | | | | | |
|-------|-----|----|-----|----|-----|-----|-----|
| x | ... | -1 | ... | 1 | ... | 2 | ... |
| y' | - | 0 | - | - | - | 0 | + |
| y'' | + | 0 | - | 0 | + | + | + |
| y | ↖ | 13 | ↘ | -3 | ↖ | -14 | ↗ |

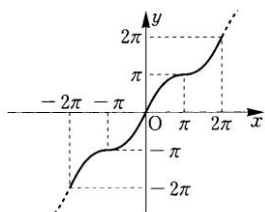


(3) $y = x + \sin x$

$$y' = 1 + \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

| | | | | | | | | | |
|-------|---------|--------------------|--------|-------------------|-----|--------------------|-------|-------------------|--------|
| x | -2π | \cdots | $-\pi$ | \cdots | 0 | \cdots | π | \cdots | 2π |
| y' | $+$ | $+$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $+$ | $+$ |
| y'' | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 |
| y | -2π | \curvearrowright | $-\pi$ | \curvearrowleft | 0 | \curvearrowright | π | \curvearrowleft | 2π |

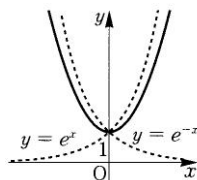


(4) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y'' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

| | | | |
|-------|-------------------|-----|--------------------|
| x | \cdots | 0 | \cdots |
| y' | $-$ | 0 | $+$ |
| y'' | $+$ | $+$ | $+$ |
| y | \curvearrowleft | 1 | \curvearrowright |



(5) $y = \frac{2}{x^2 - 1}$ の定義域は $x \neq \pm 1$

を除く実数全体である。

$$y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

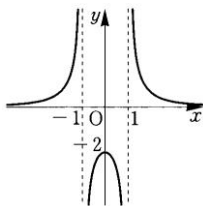
| | | | | | | | |
|-------|--------------------|-----------|-------------------|------|--------------------|-------------|-------------------|
| x | \cdots | -1 | \cdots | 0 | \cdots | 1 | \cdots |
| y' | $+$ | \diagup | $+$ | 0 | $-$ | \diagdown | $-$ |
| y'' | $+$ | \diagup | $-$ | $-$ | $-$ | \diagup | $+$ |
| y | \curvearrowright | \diagup | \curvearrowleft | -2 | \curvearrowright | \diagdown | \curvearrowleft |

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{x^2 - 1} = \infty$$

以上のことから、グラフは次の図のようになる。



(6) $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$

$$y' = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x + 1)^3}$$

| | | | | | | | |
|-------|--------------------|------|-------------------|-------------|--------------------|-----|-------------------|
| x | \cdots | -2 | \cdots | -1 | \cdots | 0 | \cdots |
| y' | $+$ | 0 | $-$ | \diagdown | $-$ | 0 | $+$ |
| y'' | $-$ | $-$ | $-$ | \diagdown | $+$ | $+$ | $+$ |
| y | \curvearrowright | -1 | \curvearrowleft | \diagdown | \curvearrowright | 3 | \curvearrowleft |

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} y = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1} \right) = \infty$$

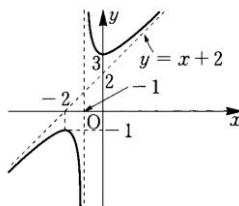
$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \lim_{x \rightarrow -1-0} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1} \right) = -\infty$$

より、直線 $x = -1$ は漸近線である。

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{ y - (x + 2) \} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$$

より、直線 $y = x + 2$ も漸近線である。

以上のことから、グラフは下図のようになる。

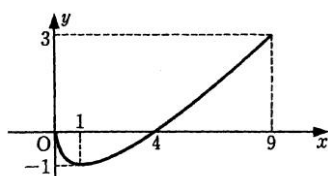


(1) $y = x - 2\sqrt{x}$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

増減表をつくると

| | | | | | |
|------|---|-----|----|-----|---|
| x | 0 | ... | 1 | ... | 9 |
| y' | | - | 0 | + | + |
| y | 0 | ↘ | -1 | ↗ | 3 |

よって $x = 9$ のとき最大値 3 $x = 1$ のとき最小値 -1

(2) $y = \cos x (1 + \sin x)$

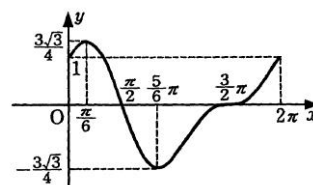
$$y' = -\sin x (1 + \sin x) + \cos^2 x$$

$$= -\sin x - \sin^2 x + (1 - \sin^2 x)$$

$$= -2\sin^2 x - \sin x + 1 = -(2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

増減表をつくると

| | | | | | | | | | |
|------|---|-----|-----------------------|-----|------------------------|-----|------------------|-----|--------|
| x | 0 | ... | $\frac{\pi}{6}$ | ... | $\frac{5}{6}\pi$ | ... | $\frac{3}{2}\pi$ | ... | 2π |
| y' | + | + | 0 | - | 0 | + | 0 | + | + |
| y | 1 | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↘ | $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 |

よって $x = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ $x = \frac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(3) $y = x\sqrt{2x - x^2}$ の定義域は

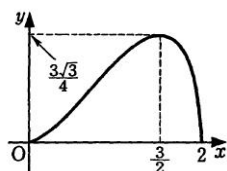
$$2x - x^2 \geq 0 \quad \text{より} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$y' = \sqrt{2x - x^2} + x \cdot \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}$$

$$= -\frac{x(2x - 3)}{\sqrt{2x - x^2}}$$

増減表をつくると

| | | | | | |
|------|---|-----|-----------------------|-----|---|
| x | 0 | ... | $\frac{3}{2}$ | ... | 2 |
| y' | | + | 0 | - | |
| y | 0 | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↘ | 0 |

よって $x = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ $x = 0, 2$ のとき最小値 0

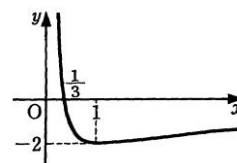
(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}}$ の定義域は

$$x^3 > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0 \quad \text{より} \quad x > 0$$

$$y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}} = \frac{3(x-1)}{2x^2\sqrt{x}}$$

増減表をつくると

| | | | | |
|------|---|-----|----|-----|
| x | 0 | ... | 1 | ... |
| y' | | - | 0 | + |
| y | | ↘ | -2 | ↗ |



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1-3x}{x\sqrt{x}} = \infty$$

よって $x = 1$ のとき最小値 -2, 最大値なし

52

$y' = -\frac{2}{x^3}$ より, 点 $A\left(t, \frac{1}{t^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{2}{t^3}x + \frac{3}{t^2}$$

よって, P, Qの座標は $P\left(\frac{3}{2}t, 0\right), Q\left(0, \frac{3}{t^2}\right)$

ここで, $PQ^2 = f(t)$ とすると ($t > 0$)

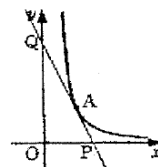
$$f(t) = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{t^2}\right)^2 = \frac{9}{4}\left(t^2 + \frac{4}{t^4}\right)$$

$$f'(t) = \frac{9}{4}\left(2t - \frac{16}{t^5}\right) = \frac{9(t^6 - 8)}{2t^5}$$

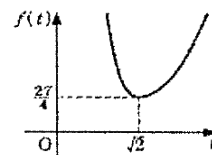
$f'(t) = 0$ を解くと $t^6 = 8 = 2^3$ より $t^2 = 2$

$t > 0$ から $t = \sqrt{2}$

よって, 増減表より $t = \sqrt{2}$ のとき 最小値 $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



| | | | | |
|---------|---|-----|----------------|-----|
| t | 0 | ... | $\sqrt{2}$ | ... |
| $f'(t)$ | | - | 0 | + |
| $f(t)$ | | ↘ | $\frac{27}{4}$ | ↗ |



53

$f(x) = \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}\right)$$

$x > 0$ のとき $\sqrt{(1+x)^3} > 1$ より $f''(x) > 0$ だから $f'(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

したがって, $x > 0$ のとき $f'(x) > f'(0)$

$f'(0) = 0$ より $f'(x) > 0$ だから $f(x)$ も $x \geq 0$ で増加する。

したがって, $x > 0$ のとき $f(x) > f(0)$

$f(0) = 0$ より $f(x) > 0$ よって, $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ (証明終)

方程式より $-2\log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x = a$

$y = -2\log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x$ と $y = a$ のグラフで考える。

$$y' = -\frac{2}{x} - x + 3 = -\frac{(x-2)(x-1)}{x}$$

これより，増減表は

| x | 0 | ... | 1 | ... | 2 | ... |
|------|---|------------|---------------|------------|-------------|------------|
| y' | | - | 0 | + | 0 | - |
| y | | \searrow | $\frac{5}{2}$ | \nearrow | $4-2\log 2$ | \searrow |

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(-2\log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-2\log x - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) = -\infty$$

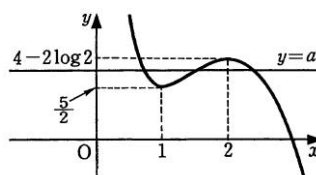
以上より，グラフは右図のようになる。

右のグラフから，異なる実数解の個数は

$a < \frac{5}{2}$ ， $4-2\log 2 < a$ のとき 1 個

$a = \frac{5}{2}$ ， $4-2\log 2$ のとき 2 個

$\frac{5}{2} < a < 4-2\log 2$ のとき 3 個



(1) $f(x) = x^3$ とおくと $f'(x) = 3x^2$
 $f(2+0.05) \doteq f(2) + f'(2) \times 0.05$ より
 $2.05^3 \doteq 2^3 + 3 \times 2^2 \times 0.05 = 8.6$

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ とおくと $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$
 $f(8+0.3) \doteq f(8) + f'(8) \times 0.3$ より
 $\frac{1}{\sqrt[3]{8.3}} \doteq \frac{1}{\sqrt[3]{8}} - \frac{1}{3 \cdot 8\sqrt[3]{8}} \times 0.3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{160} \doteq 0.494$

(3) $f(x) = \sin x$ とおくと $f'(x) = \cos x$
 $58^\circ = 60^\circ - 2^\circ = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{90}$ だから
 $f\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{90}\right) \doteq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \left(-\frac{\pi}{90}\right)$ より
 $\sin 58^\circ \doteq \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \times \left(-\frac{\pi}{90}\right)$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3.1416}{90} \doteq 0.849$

(4) $f(x) = \sqrt{x}$ とおくと $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $6+e = 6 + 2.7182 = 8.7182 = 9 - 0.2818$
 $f(9-0.2818) \doteq f(9) + f'(9) \times (-0.2818)$ より
 $\sqrt{6+e} \doteq 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} \times (-0.2818) \doteq 2.953$

(1) $x = t^3 - 3t^2 - 9t$ より

速度 v は $v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9$

加速度 α は $\alpha = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t - 6$

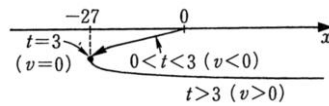
(2) $v = 3(t+1)(t-3)$ ($t > 0$) より

$t = 3$ のとき $v = 0$

$3 < t$ のとき $v > 0$

$0 < t < 3$ のとき $v < 0$

よって、P が運動の向きを変える t の値は $t = 3$



B 問題

$f(x) = x^2 + ax + b + 6 \log(1+x)$ より

$f'(x) = 2x + a + \frac{6}{1+x}$

$f(0) = 3$ より $b = 3$

$f'(0) = 0$ より $a + 6 = 0$ だから $a = -6$

このとき $f(x) = x^2 - 6x + 3 + 6 \log(1+x)$

$f'(x) = 2x - 6 + \frac{6}{1+x} = \frac{2x(x-2)}{1+x}$

| | | | | | | |
|---------|----|-----|---|-----|---|-----|
| x | -1 | ... | 0 | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | / | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | / | ↗ | 3 | ↘ | | ↗ |

上の増減表より、 $x = 0$ で極大値 3 をとり、条件をみtas。

よって $a = -6$, $b = 3$

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-x+1} \quad \text{より}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2-x+1) - (ax+b)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-ax^2-2bx+a+b}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f(2) = 1 \quad \text{より} \quad 2a+b=3$$

$$f'(2) = 0 \quad \text{より} \quad a+b=0$$

これを解いて $a=3, b=-3$

$$\text{このとき, } f(x) = \frac{3x-3}{x^2-x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2+6x}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{3x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$$

| | | | | | |
|---------|-----|----|-----|---|-----|
| x | ... | 0 | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↘ | -3 | ↗ | 1 | ↘ |

上の増減表より, $x=2$ で極大値 1 をとり, 条件をみtas.

よって $a=3, b=-3$

また, 極小値は -3 ($x=0$ のとき)

$$y = x \sin x \quad \text{より} \quad y' = \sin x + x \cos x$$

接点の座標を $(a, a \sin a)$ とすると, 接線の方程式は

$$y - a \sin a = (\sin a + a \cos a)(x - a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 $(0, 0)$ を通るから

$$-a \sin a = (\sin a + a \cos a)(-a)$$

$$a^2 \cos a = 0 \quad 0 < a \leq \pi \quad \text{より} \quad a = \frac{\pi}{2}$$

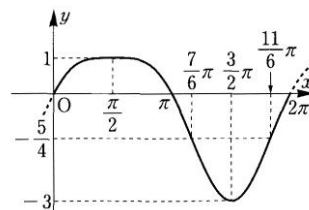
これを①に代入して $y = x$

$$(1) \quad y' = 2 \cos x - 2 \sin x \cos x = 2 \cos x (1 - \sin x)$$

$$y'' = -2 \sin x - 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)$$

これより, $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で増減表は下記のようなになる。

| | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|-----|-----------------|-----|-------|-----|------------------|-----|------------------|-----|-------------------|-----|--------|
| x | 0 | ... | $\frac{\pi}{2}$ | ... | π | ... | $\frac{7\pi}{6}$ | ... | $\frac{3\pi}{2}$ | ... | $\frac{11\pi}{6}$ | ... | 2π |
| y' | + | + | 0 | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + | + |
| y'' | - | - | 0 | - | - | - | 0 | + | + | + | 0 | - | - |
| y | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↘ | $-\frac{5}{4}$ | ↗ | -3 | ↗ | $-\frac{5}{4}$ | ↗ | 0 |



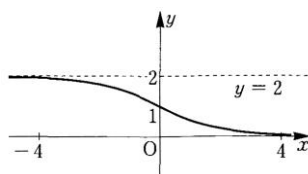
$$(2) \quad y = \frac{2}{1+e^x}$$

$$y' = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

$$y'' = -2 \cdot \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{2e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}$$

| | | | |
|-------|-----|---|-----|
| x | ... | 0 | ... |
| y' | - | - | - |
| y'' | - | 0 | + |
| y | ↘ | 1 | ↗ |



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1+e^x} = 2$$

61

$$y = |x|e^x$$

(i) $x \geq 0$ のとき $y = xe^x$

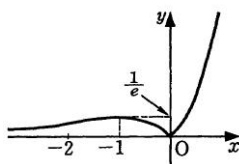
$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

(ii) $x < 0$ のとき $y = -xe^x$

$$y' = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

増減表をつくると

| | | | | | |
|------|-----|---------------|-----|---|-----|
| x | ... | -1 | ... | 0 | ... |
| y' | + | 0 | - | / | + |
| y | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | 0 | ↗ |



$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^x) = 0$$

よって $x = 0$ のとき最小値 0, 最大値なし

62

(1) 台形 PABQ は $AP=BQ$ の等脚台形であり,

上底 $PQ = 2a \cos \theta$, 下底 $AB = 2a$, 高さは $a \sin \theta$ であるから, 面積 S は

$$S = \frac{1}{2} (2a \cos \theta + 2a) \cdot a \sin \theta = a^2 (\cos \theta + 1) \sin \theta$$

(別解) $S = 2 \triangle OAP + \triangle OPQ$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \theta + \frac{1}{2} a^2 \sin (\pi - 2\theta) = a^2 \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

$$(2) \quad S' = a^2 \{ -\sin^2 \theta + (\cos \theta + 1) \cos \theta \}$$

$$= a^2 (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) = a^2 (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

ここで $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より増減表をつくると

| θ | 0 | ... | $\frac{\pi}{3}$ | ... | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|---|------------|--------------------------|------------|-----------------|
| S' | | + | 0 | - | |
| S | | \nearrow | $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ | \searrow | |

よって、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

63

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \sqrt{x+k} \quad \text{とすると}$$

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}}$$

点 P の x 座標を α とすると

$$f(\alpha) = g(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha) = g'(\alpha) \quad \text{であるから}$$

$$e^\alpha = \sqrt{\alpha+k} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad e^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\alpha+k}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } e^\alpha = \frac{1}{2e^\alpha} \quad \text{すなわち } e^{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$e^\alpha > 0 \text{ より } e^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって } \alpha = \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \log 2$$

$$\textcircled{1} \text{ より } k = e^{2\alpha} - \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2$$

このとき、求める接線の方程式は

$$y - e^\alpha = e^\alpha (x - \alpha) \quad \text{であるから} \quad y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{2} \log 2 \right)$$

$$\text{すなわち } y = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{4} \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i) $f(x) = x - \sin x$ とおくと $f'(x) = 1 - \cos x$

$x > 0$ のとき $f'(x) \geq 0$ より $x \geq 0$ で $f(x)$ は増加する。

よって $f(x) > f(0)$

$f(0) = 0$ より $f(x) > 0$ すなわち $\sin x < x$

(ii) $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ とおくと

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$g''(x) = -\sin x + x = f(x)$$

$x > 0$ のとき $g''(x) \geq 0$ より $x \geq 0$ で $g'(x)$ は増加する。

よって $g'(x) > g'(0)$

$g'(0) = 0$ より $g'(x) > 0$ すなわち $g(x)$ も $x \geq 0$ で増加する。

したがって $g(x) > g(0)$, $g(0) = 0$ より $g(x) > 0$ すなわち $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$

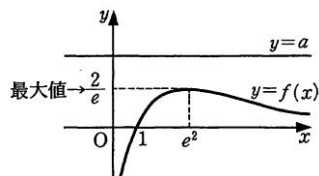
(i), (ii) より $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ (証明終)

$$a\sqrt{x} > \log x \text{ より } a > \frac{\log x}{\sqrt{x}} \dots \textcircled{1}$$

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$$

$x > 0$ における増減表は

| x | 0 | ... | e^2 | ... |
|---------|---|-----|---------------|-----|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{2}{e}$ | ↘ |



これから, $f(x)$ の最大値は $f(e^2) = \frac{2}{e}$

よって, $x > 0$ について①が成り立つ条件は $a > \frac{2}{e}$

$$(1) \quad y = x^2 + \frac{2}{x}$$

$$y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$$

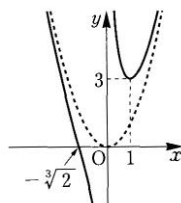
増減表は

| | | | | | |
|------|-----|---|-----|---|-----|
| x | ... | 0 | ... | 1 | ... |
| y' | - | | - | 0 | + |
| y | ↘ | | ↘ | 3 | ↗ |

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty$$

以上のことより，グラフは右図のようになる。



(2) $x = 0$ は， $x^3 - ax + 2 = 0$ の解ではないから

$$x^2 + \frac{2}{x} = a \quad \text{と変形し，} \quad y = x^2 + \frac{2}{x} \quad \text{と} \quad y = a$$

のグラフの共有点の個数を調べる。(1) のグラフを利用して

$a < 3$ のとき 1 個

$a = 3$ のとき 2 個

$a > 3$ のとき 3 個

t 秒後の半径を r cm，表面積を S cm²，体積を V cm³ とすると

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{時間 } t \text{ で微分すると}$$

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \text{より} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{r}{2} \times \frac{dS}{dt}$$

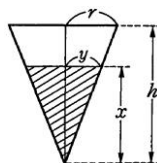
$$\frac{dS}{dt} = 4\pi \quad \text{で} \quad r = 10 \quad \text{のときであるから} \quad \frac{dV}{dt} = 20\pi \quad \text{よって} \quad 20\pi \text{ [cm}^3/\text{秒]}$$

t 秒後の水面の高さを x cm, 水面の面積を S cm², 水の量を V cm³ とすると,

このときの水面の半径は $\frac{r}{h}x$ cm であるから

$$S = \pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \dots \textcircled{1}$$

$$V = \frac{1}{3} Sx = \frac{\pi r^2}{3h^2} x^3 \dots \textcircled{2}$$



②の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi r^2}{3h^2} \cdot 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad \textcircled{2} \text{より} \quad \frac{\pi r^2}{3h^2} = \frac{V}{x^3} \text{ を代入すると} \\ &= \frac{V}{x^3} \cdot 3x^2 \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{3V}{x} \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

ここで, $V = wt$ より $\frac{dV}{dt} = w$ であるから

$$w = \frac{3V}{x} \frac{dx}{dt} \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{w}{3V} x \dots \textcircled{3}$$

水の量が v cm³ になったときの水面の高さを x_0 cm とすると

$$v = \frac{\pi r^2}{3h^2} x_0^3 \quad \text{より} \quad x_0 = \left(\frac{3h^2 v}{\pi r^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

よって, このときの水面の上昇する速度は, ③より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{3v} x_0 = \frac{w}{3v} \left(\frac{3h^2 v}{\pi r^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{3h^2}{\pi r^2 v^2} \right)^{\frac{1}{3}} w$$

また, ①の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot 2x \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{3V}{x^3} \cdot 2x \frac{w}{3V} x = \frac{2w}{x} \end{aligned}$$

よって, 水の量が v cm³ になったときの水面の広がる速度は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2w}{x_0} = 2 \left(\frac{\pi r^2}{3h^2 v} \right)^{\frac{1}{3}} w$$

1 章の問題

1

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ であればよい。

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

$$\therefore a = 3$$

2

①は誤り。正しくは $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

②は誤り。正しくは $(c)' = 0$

③は誤り。正しくは $\{f(x)^3\}' = 3f(x)^2 f'(x)$

④は正しい。

⑤は正しい。

⑥は誤り。正しくは $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

よって、正しいものは④と⑤

3

$$(1) \quad y' = e^{x^2+2x} \cdot (2x+2) = 2(x+1)e^{x^2+2x}$$

$$(2) \quad y' = \frac{\cos x \cdot (x+1) - \sin x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)\cos x - \sin x}{(x+1)^2}$$

$$(3) \quad y' = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{2x\sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}}$$

$$(4) \quad y' = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}$$

$$(5) \quad y' = 2x \sin(3x+5) + 3x^2 \cos(3x+5)$$

$$(6) \quad y' = \cos x \cdot 2^{\sin x} \log 2$$

4

$$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin 3x + e^{2x} \cdot 3 \cos 3x = e^{2x} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x)$$

$$\therefore f'(0) = e^0 (2 \sin 0 + 3 \cos 0) = 3$$

5

$f'(x) = \log x$ とおく。

$$f'(1) \text{ を定義にしたがって求めると } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h}$$

一方、 $f(x)$ を微分すると $f'(x) = \frac{1}{x}$ だから、 $f'(1) = 1$

よって、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$ を得る。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{3x} \log(1+2x) = \frac{10}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{2x} = \frac{10}{3}$$

6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)}{x^2} = \alpha \quad \text{とすると}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)}{x^2} \cdot x^2 \right\} = \alpha \cdot 0 = 0$$

$$\text{一方 } \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx) \right\} = \sqrt{9-0+7} - (a+0) = 4-a$$

$$\therefore 4-a=0 \quad \therefore a=4$$

同様にして

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (4+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (4+bx)}{x^2} \cdot x \right\} = \alpha \cdot 0 = 0$$

$$\text{一方 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (4+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9-8x+7\cos 2x) - (16+8bx+b^2x^2)}{x \left\{ \sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4+bx) \right\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7(1-\cos 2x) - 8(b+1)x - b^2x^2}{x \left\{ \sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4+bx) \right\}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7 \cdot 2\sin^2 x - 8(b+1)x - b^2x^2}{x \left\{ \sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4+bx) \right\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-14 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x - 8(b+1) - b^2x}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4+bx)} = \frac{-14 \cdot 1 \cdot 0 - 8(b+1) - 0}{\sqrt{9+7} + 4} = b+1$$

$$\therefore b+1=0 \quad \therefore b=-1$$

したがって、求める極限值は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (4-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-14 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} - 1}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + (4-x)} = -\frac{15}{8}$$

$$a=4, b=-1 \text{ のとき極限值は } -\frac{15}{8}$$

7

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad \text{とおくと} \quad f'(x) = 2ax + b, \quad f''(x) = 2a$$

$$f''(x) + xf'(x) - 2f(x) = x \quad \text{より} \quad 2a + x(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x$$

$$\therefore (b+1)x + 2(c-a) = 0 \quad x \text{ についての恒等式となるためには, } \begin{cases} b+1=0 & \dots \textcircled{1} \\ c-a=0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{また, } f(1) = a + b + c = 5 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } a=3, b=-1, c=3 \quad \therefore f(x) = 3x^2 - x + 3$$

8

$$(1) \quad y' = ae^{ax} \sin bx + e^{ax} \cdot b \cos bx = e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx)$$

$$\begin{aligned} y'' &= ae^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) + e^{ax} (ab \cos bx - b^2 \sin bx) \\ &= e^{ax} \{ (a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx \} \end{aligned}$$

$$(2) \quad y' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx = ay + be^{ax} \cos bx \quad \therefore e^{ax} \cos bx = \frac{y' - ay}{b}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (a^2 - b^2) e^{ax} \sin bx + 2abe^{ax} \cos bx = (a^2 - b^2) y + 2ab \cdot \frac{y' - ay}{b} \\ &= 2ay' - (a^2 + b^2) y \end{aligned}$$

$$(1) \quad y = \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{より} \quad y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

接線の方程式は

$$y - \sqrt{a^2 + 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}(x - a)$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}x + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

点 $\left(-\frac{1}{7}, 0\right)$ を通るから

$$0 = -\frac{a}{7\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad \text{よって} \quad a = 7$$

$$(2) \quad y = a^x \quad \text{より} \quad y' = a^x \log a$$

点 (t, a^t) における接線の方程式は

$$y - a^t = (a^t \log a)(x - t) \quad \therefore y = (a^t \log a)x + a^t(1 - t \log a) \Leftrightarrow y = x$$

$$a^t \log a = 1 \quad \dots \textcircled{1} \quad t \log a = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{より} \quad \log a = \frac{1}{t} \quad \therefore a = e^{\frac{1}{t}}$$

$$\textcircled{1} \text{に代入して} \quad \left(e^{\frac{1}{t}}\right)^t \log e^{\frac{1}{t}} = 1 \quad e \cdot \frac{1}{t} \log e = 1 \quad \therefore t = e$$

よって $a = e^{\frac{1}{e}}$, 接点は (e, e)

$$(1) \quad f(x) = (\log x - 1) \log x \quad \text{まず, 真数条件より} \quad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log x + (\log x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \log x - 1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (2 \log x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{3 - 2 \log x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{は} \quad 2 \log x - 1 = 0 \quad \text{より} \quad \log x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{e}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{は} \quad 3 - 2 \log x = 0 \quad \text{より} \quad \log x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = e^{\frac{3}{2}}$$

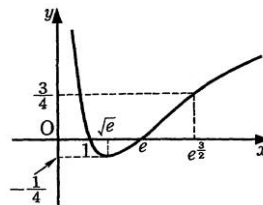
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| x | 0 | ... | \sqrt{e} | ... | $e^{\frac{3}{2}}$ | ... |
|----------|---|-----|------------|-----|-------------------|-----|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | + | + |
| $f''(x)$ | | + | + | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | ↘ | 極小 | ↗ | 変曲点 | ↘ |

$$\text{極小値} \quad f(\sqrt{e}) = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4} \quad \text{より} \quad \text{変曲点} \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}\right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$$

これより, グラフは右図のようになる。



$$(2) \quad f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$$

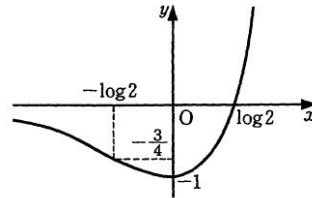
$$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^x = 2e^x(2e^x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ は } e^x - 1 = 0 \text{ より } x = 0$$

$$f''(x) = 0 \text{ は } 2e^x - 1 = 0 \text{ より } e^x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = -\log 2$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| x | ... | $-\log 2$ | ... | 0 | ... |
|----------|------------|-----------|------------|----|------------|
| $f'(x)$ | - | - | - | 0 | + |
| $f''(x)$ | - | 0 | + | + | + |
| $f(x)$ | \searrow | 変曲点 | \swarrow | 極小 | \nearrow |



$$\text{極小値 } f(0) = -1$$

$$f(-\log 2) = -\frac{3}{4} \text{ より, 変曲点 } \left(-\log 2, -\frac{3}{4}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

これより, グラフは右図のようになる。

11

$$(1) \quad f(x) = (x+c)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = e^{-x^2} + (x+c)(-2x)e^{-x^2} = (1-2cx-2x^2)e^{-x^2}$$

$$x=1 \text{ で極値をとるので}$$

$$f'(1) = (1-2c-2)e^{-1} = 0 \quad \therefore c = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \quad c = -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = (1+x-2x^2)e^{-x^2} = -(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| x | ... | $-\frac{1}{2}$ | ... | 1 | ... |
|---------|------------|----------------|------------|----|------------|
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | \searrow | 極小 | \nearrow | 極大 | \searrow |

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0$$

$$\text{極小値 } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

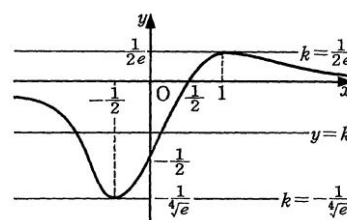
$$\text{極大値 } f(1) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

- (3) $x - \frac{1}{2} = ke^{x^2}$ は $k = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ と同値である。

$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ と $y = k$ との共有点をもつ範囲だから

- (2) をもとに $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ のグラフをかく。

右のグラフより $-\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \leq k \leq \frac{1}{2e}$



12

- (1) $x > 0$ より

$$f(x) = (x+1)\log \frac{x+1}{x}$$

$$= (x+1)\log(x+1) - (x+1)\log x$$

$$f'(x) = \log(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - \log x - \frac{x+1}{x}$$

$$= \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

$$\text{ゆえに, } f'(x) \text{ は増加関数であり } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right\} = 0$$

よって $x > 0$ において $f'(x) < 0$ だから $f(x)$ は単調減少関数である。(証明終)

- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

- (3) $f(x)$ は減少関数であり, $x > 0$ で連続である。

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \left(\frac{1}{e^2} + 1\right)\log(1 + e^2) > \log e^2 = 2$$

$$f(1) = 2\log 2 < 2 \cdot \log e = 2$$

よって, 中間値の定理より $f(x) = 2$ を満たす x が

$\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲にただ1つ存在する。(証明終)