7章の問題

1　c は任意定数

(1)　$x^3 \dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\int \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} + c = \frac{1+2cx^2}{2x^2}$$

$$y = -\frac{2x^2}{1+cx^2}$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$

$u = \dfrac{y}{x}$ とおくと $y = ux$,　$y' = u'x + u$　より

$$u'x + u = 1 + u$$

$$u'x = 1$$

$$\int du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$u = \log|x| + c$$

$$\therefore\ \frac{y}{x} = \log|x| + c$$

$$\therefore\ y = x(\log|x| + c)$$

(3)　$x\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\log|y| = -\log|x| + c$$

$$|yx| = e^c = c$$

$$y = \frac{c}{x}$$

c を x の関数 u として

$y = \dfrac{u}{x}$,　$y' = \dfrac{u'}{x} - \dfrac{u}{x^2}$　より

$$x\left(\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}\right) + \frac{u}{x} = \sin x$$

$$u' = \sin x$$

$$u = -\cos x + c$$

したがって　$y = -\dfrac{1}{x}\cos x + \dfrac{c}{x}$

(4)　$(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = xy + 1$

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\log|y| = \frac{1}{2}\log\left|1+x^2\right| + c$$

$$y = c\sqrt{1+x^2}$$

c を x の関数 u として

$y = u\sqrt{1+x^2}$,　$y' = u'\sqrt{1+x^2} + \dfrac{ux}{\sqrt{1+x^2}}$　より

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}}u' + \sqrt{1+x^2}\,ux - xu\sqrt{1+x^2} = 1$$

$$u' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\ u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

したがって　$y = x + c\sqrt{1+x^2}$

2

(1) $y' + y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad (y(0)=1)$

$y' + y\tan x = 0$

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \tan x\,dx$

$\log|y| = \log|\cos x| + c$

$y = c\cos x$

c を x の関数 u として

$y = u\cos x,\ \ y' = u'\cos x - u\sin x$ より

$u'\cos x - u\sin x + u\sin x = \dfrac{1}{\cos x}$

$u' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\therefore\ u = \tan x + c$

$\therefore\ y = (\tan x + c)\cos x = \sin x + c\cos x$

$y(0)=1$ より $1 = c$ $\quad\therefore\ y = \sin x + \cos x$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x$ $\quad (y(0)=1)$

$\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = -2\int dx$

$\log|y| = -2x + c$

$y = \pm e^{c-2x} = ce^{-2x}$

c を x の関数 u として

$y = ue^{-2x}$

$y' = u'e^{-2x} - 2ue^{-2x}$

$u'e^{-2x} - 2ue^{-2x} + 2ue^{-2x} = x$

$u' = xe^{2x}$

$u = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + c$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + ce^{-2x}$

$y(0)=1$ より $1 = -\dfrac{1}{4} + c$ $\quad\therefore\ c = \dfrac{5}{4}$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}e^{-2x}$

3

(1) $y'' - 2y' + 5y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$

$\therefore\ y = e^{x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

（c_1，c_2 は任意定数）

(2) $y'' + 4y' + 4y = x^2$

特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda+2)^2 = 0 \quad \lambda = -2$

$\therefore\ y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$

1 つの解を $y = Ax^2 + Bx + C$ と予想する

$y' = 2Ax + B,\ \ y'' = 2A$ より

$2A + 8Ax + 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4c = x^2$

$\begin{cases} 4A = 1 \\ 8A + 4B = 0 \\ 2A + 4B + 4C = 0 \end{cases}$ より $A = \dfrac{1}{4}$

$B = -\dfrac{1}{2} \quad C = \dfrac{3}{8}$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}$

したがって $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8} + (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$

（c_1，c_2 は任意定数）

⑶　$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$

特性方程式　$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \quad \lambda = -3,\ 1$

$\therefore\ y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$

1 つの解を　$y = Ae^{2x}$　と予想

$y' = 2Ae^{2x},\quad y'' = 4Ae^{2x}$　より

$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x}$

$5A = 1 \quad \therefore\ A = \dfrac{1}{5} \quad y = \dfrac{1}{5}e^{2x}$

したがって　$y = \dfrac{1}{5}e^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$

（c_1，c_2 は任意定数）

⑷　$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

特性方程式　$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda = \pm i$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

1 つの解を　$y = x(A\cos x + B\sin x)$　と予想

$y' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$

$y'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$

$-2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$

$+ x(A\cos x + B\sin x) = \cos x$

$\begin{cases} 2B = 1 \\ -2A = 0 \end{cases}$　より　$A = 0 \quad B = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2}x\sin x$

したがって　$y = \dfrac{1}{2}x\sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$

（c_1，c_2 は任意定数）

4

⑴　$y'' - y' - 2y = 0 \quad (y(0) = 2,\ y'(0) = 1)$

特性方程式　$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \lambda = 2,\ -1$

$\therefore\ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

$y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$

$y(0) = 2,\ y'(0) = 1$ より

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 1 = 2c_1 - c_2 \end{cases} \quad \text{これより} \quad \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{array}$$

したがって　$y = e^{2x} + e^{-x}$

⑵　$y'' - 4y = \sin x \quad (y(0) = 0,\ y'(0) = 3)$

特性方程式　$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \lambda = \pm 2$

$\therefore\ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

1 つの解を　$y = A\sin x + B\cos x$　と予想

$y' = A\cos x - B\sin x$

$y'' = -A\sin x - B\cos x$　より

$-A\sin x - B\cos x - 4A\sin x - 4B\cos x = \sin x$

$$\begin{cases} -5A = 1 \\ -5B = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad A = -\frac{1}{5},\ B = 0$$

$\therefore\ y = -\frac{1}{5}\sin x$

$\therefore\ y = -\frac{1}{5}\sin x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y' = -\frac{1}{5}\cos x + 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 3$ より

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 3 = -\frac{1}{5} + 2c_1 - 2c_2 \end{cases} \quad \text{これより} \quad c_1 = \frac{4}{5},\ c_2 - \frac{4}{5}$$

したがって　$y = -\frac{1}{5}\sin x + \frac{4}{5}e^{2x} - \frac{4}{5}e^{-2x}$

⑶　$y'' + 3y' + 2y = 1$

特性方程式　$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \qquad \lambda = -1,\ -2$

$\therefore\ y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

1 つの解を　$y = A$　とおくと

$y' = y'' = 0$　より

$2A = 1\ \therefore\ A = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$

$x = 0 \quad y = 0 \quad y' = 0$　を代入して

$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2} + c_1 + c_2 \\ 0 = -c_1 - 2c_2 \end{cases}$　より　$c_1 = -1$, $c_2 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2} - e^{-x} + \dfrac{1}{2} e^{-2x}$

5

⑴　$\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{y^2} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$= -\dfrac{1}{y^2}(y + xy^2) = -\dfrac{1}{y} - x = -z - x$

したがって　$z' + z = -x$

⑵　$z' + z = 0$

$z' = -z$

$\displaystyle\int \frac{1}{z}\,dz = -\int dx$

$\log|z| = -x + c$

$z = \pm e^{c-x} = ce^{-x}$

c を x の関数 u とすると　$z = ue^{-x}$, $z' = u'e^{-x} - ue^{-x}$　より

$u'e^{-x} - ue^{-x} + ue^{-x} = -x$

$u' = -e^x x$

$u = -xe^x + e^x + c$

$\therefore\ z = -x + 1 + ce^{-x}$

$y = \dfrac{1}{z}$　より　$y = \dfrac{1}{-x + 1 + ce^{-x}}$　（c は任意定数）

6

(1) $y = e^{-2x}\sin 3x$

$y' = -2e^{-2x}\sin 3x + e^{-2x}\cdot 3\cdot\cos 3x$

$= e^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$

$y'' = -2e^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x) + e^{-2x}(-9\sin 3x - 6\cos 3x)$

$= e^{-2x}(-12\cos 3x - 5\sin 3x)$

したがって　$y' = e^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$

$y'' = e^{-2x}(-12\cos 3x - 5\sin 3x)$

(2) $e^{-2x}(-12\cos 3x - 5\sin 3x) + ae^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$

$+ be^{-2x}\sin 3x = 0$

$\begin{cases} -12 + 3a = 0 \\ -5 - 2a + b = 0 \end{cases}$ より　$a = 4$, $b = 13$

一般解は　$y'' + 4y' + 13 = 0$

特性方程式　$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{36}i}{2} = -2 \pm 3i$$

$\therefore\ y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$

したがって　$a = 4,\ b = 13$

$y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$

（c_1，c_2は任意定数）

7章の問題　B

1

⑴ $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -4y^{-5} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore\ \frac{dz}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

⑵ ⑴より $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{4}y^5\dfrac{dz}{dx}$

$$-\frac{1}{4}y^5\frac{dz}{dx} + yP(x) = y^5Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} - 4y^{-4}P(x) = -4Q(x)$$

$$\therefore\ \frac{dz}{dx} - 4P(x)z = -4Q(x)$$

⑶ $z = y^{-4}$ とおくと　⑵より

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = -2x$$

$$\frac{dz}{dx} = 4xz$$

$$\int \frac{1}{z}\,dz = \int 4x\,dx$$

$$\log|z| = 2x^2 + c$$

$$z = \pm e^{c+2x^2} = ce^{2x^2}$$

c を x の関数 u とすると　$z = ue^{2x^2}$, $z' = u'e^{2x^2} + 4uxe^{2x^2}$

$$u'e^{2x^2} + 4uxe^{2x^2} - 4xue^{2x^2} = -2x$$

$$u' = -2xe^{2x^2}$$

$$u = -\frac{1}{2}e^{2x^2} + c$$

$$\therefore\ z = -\frac{1}{2} + ce^{2x^2} = \frac{-1+ce^{2x^2}}{2}$$

したがって　$y^4 = \dfrac{2}{ce^{2x^2} - 1}$　（c は任意定数）

2

(1) $x' = \dfrac{u''u - (u')^2}{u^2}$

微分方程式に代入して

$$\frac{u''u - (u')^2}{u^2} + \frac{(u')^2}{u^2} + a(t)\frac{u'}{u} + b(t) = 0$$

$$\frac{u''}{u} + a(t)\frac{u'}{u} + b(t) = 0$$

$$\therefore\ u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

(2) $x' = x(1-x)$

$x' + x^2 - x = 0$

$x = \dfrac{u'}{u}$ とおくと (1)より $u'' - u' = 0$

$u' = p$ とおくと $u'' = p'$

$p' - p = 0$

$$\int \frac{1}{p}\,dp = \int dx$$

$$\log|p| = t + c_1$$

$$p = c_1 e^t$$

$$u' = c_1 e^t$$

$$u = c_1 e^t + c_2$$

$\therefore\ x = \dfrac{c_1 e^t}{c_1 e^t + c_2} = \dfrac{e^t}{e^t + c}$ （c は任意定数）

3

(1) 特性方程式 $\lambda^2 + 20\lambda + 64 = 0$

$(\lambda + 4)(\lambda + 16) = 0 \quad \therefore \lambda = -4,\ -16$

$\therefore\ x = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}$

$x' = -4c_1 e^{-4t} - 16c_2 e^{-16t}$

$t = 0,\ x = 1,\ x' = 8$ を代入して

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 8 = -4c_1 - 16c_2 \end{cases} \text{より} \quad \begin{matrix} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{matrix}$$

したがって $y = 2e^{-4t} - e^{-16t}$

⑵　特性方程式　$\lambda^2 + 20\lambda + \alpha = 0$

$$\lambda = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4\alpha}}{2} = -10 \pm \sqrt{100 - \alpha}$$

（i）　$\alpha > 100$ のとき

$$x = e^{-10t}(c_1 \cos\sqrt{\alpha - 100}\, t) + (2 \sin\sqrt{\alpha - 100}\, t)$$

$t = 0,\ \ x = 1,\ \ x' = -15$ より $c_1 = 1,\ \ c_2 = -\dfrac{5}{\sqrt{\alpha - 100}}$

$$\therefore\ \ x = e^{-10t}\left(\cos\sqrt{\alpha - 100}\, t - \frac{5}{\sqrt{\alpha - 100}} \sin\sqrt{\alpha - 100}\, t\right)$$

（　）内の式が正または負になる。したがって $x(t) > 0$ とは言えないので不適当

(ii)　$\alpha = 100$ のとき

$$x = (c_1 + c_2 t) + e^{-10t}$$

$t = 0,\ \ x = 1,\ \ x' = -15$ より $c_1 = 1,\ \ c_2 = -5$

$$\therefore\ \ x = (1 - 5t)\, e^{-10t}$$

$t > \dfrac{1}{5}$ のとき $x(t) < 0$ となるので不適当

(iii)　$0 < \alpha < 100$ のとき

$\beta = \sqrt{100 - \alpha}$ とおくと

$$x(t) = c_1 e^{(\beta - 10)t} + c_2 e^{-(\beta - 10)t}$$

$t = 0,\ \ x = 1,\ \ x' = -15$ より $c_1 = \dfrac{\beta - 5}{2\beta},\ \ c_2 = \dfrac{\beta + 5}{2\beta}$

$$\therefore\ \ x(t) = \frac{\beta - 5}{2\beta} e^{(\beta - 10)t} + \frac{\beta + 5}{2\beta} e^{(\beta - 10)t}$$

$$= \frac{\beta + 5}{2\beta}\left\{\frac{(\beta - 5)^2}{75 - \alpha} e^{2\beta t} + 1\right\} e^{-(\beta - 10)t}$$

したがって　$0 < \alpha < 75$ のときは常に $x(t) > 0$

$75 < \alpha < 100$ のときは $x(t) > 0$ とは限らない。

（i），(ii)，(iii)　より　$0 < \alpha < 75$

4

⑴　特性方程式　$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0$

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

したがって

$$\begin{cases} b^2 - \omega^2 = 0 \quad \text{のとき} \quad x = (c_1 + c_2 t)e^{-bt} \\ b^2 - \omega^2 > 0 \quad \text{のとき} \quad x = e^{-bt}(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - b^2}\, t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\, t) \end{cases}$$

（c_1，c_2は任意定数）

⑵　・$b^2 - \omega^2 = 0$のとき

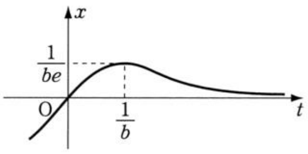
$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-bt}$$

$$x' = te^{-bt} - b(c_1 + c_2 t)e^{-bt}$$

$t = 0$，$x = 0$，$x' = 1$　より　$c_1 = 0$，$c_2 = 1$

$$\therefore \quad x(t) = te^{-bt}$$

グラフは



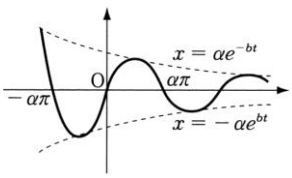
・$b^2 - \omega^2 > 0$のとき

$$x = e^{-bt}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - b^2}\, t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\, t\right)$$

$t = 0$，$x = 0$，$x' = 1$　より　$c_1 = 0$，$c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$

$$\therefore \quad x(t) = \frac{e^{-bt}}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\, t$$

グラフは



$\left(\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \text{とおく}\right)$