

## 7 章 微分方程式

### 1 節 微分方程式と解

A

259

$$(1) \quad y' = -\frac{2}{y'}$$

$$(2) \quad \text{法線の方程式は} \quad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

$$X = a, Y = b \text{ を代入して } b - y = -\frac{1}{y'}(a - x) \quad \therefore \quad y' = -\frac{a - x}{b - y}$$

$$(3) \quad \text{接線の方程式は} \quad Y - y = y'(X - x)$$

$Q$  の  $Y$  座標は  $X = 0$  を代入して

$$Y = y - xy'$$

$$\text{条件より} \quad y = -y + xy' \quad \therefore \quad xy' - 2y = 0$$

260

$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = kx(t) \quad (2) \quad \frac{dP(t)}{dt} = k(a - P(t))$$

261

$$(1) \quad y' = c \quad \text{より,} \quad y = xy' - \log y' = cx - \log c \text{ と微分方程式を満たす。}$$

また, 1 個の任意定数を含むので一般解である。

$$(2) \quad y' = \frac{1}{x} \quad \text{より}$$

$$y = xy' - \log y' = x \cdot \frac{1}{x} - \log \frac{1}{x} = 1 + \log x \text{ と微分方程式を満たす。しかし, 一般解の任意定数にどのよ}$$

うな値を入れても得られないので特異解である。

$$(1) \quad y' = 3c_1x^2 + c_2 \quad y'' = 6c_1x \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} x^2y'' - 3xy' + 3y &= x^2(6c_1x) - 3x(3c_1x^2 + c_2) + 3(c_1x^3 + c_2x) \\ &= 6c_1x^3 - 9c_1x^3 - 3c_2x + 3c_1x^3 + 3c_2x = 0 \end{aligned}$$

と微分方程式を満たす。また、2個の任意定数を含むので一般解である。

$$(2) \quad \begin{cases} y = c_1x^3 + c_2x \\ y' = 3c_1x^2 + c_2 \end{cases} \quad \text{に } x=1, \quad y=0 \quad x=1, \quad y'=2 \quad \text{を代入すると} \quad \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = 3c_1 + c_2 \end{cases}$$

$$\text{これより} \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -1$$

$$\text{したがって} \quad y = x^3 - x$$

$$(3) \quad y = c_1x^3 + c_2x \quad \text{に } x=1, \quad y=1, \quad x=2, \quad y=1 \text{を代入すると}$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 1 = 8c_1 + 2c_2 \end{cases} \quad \text{これより} \quad c_1 = -\frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{7}{6}$$

$$\text{したがって} \quad y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{6}x$$

## B

$$(1) \quad y' = c \quad \text{より} \quad y = y'x \quad \therefore \quad xy' - y = 0$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y' &= ce^x + 1 \quad \text{より} \quad c = e^{-x}(y' - 1) \\ y &= e^{-x}(y' - 1)e^x + x = y' - 1 + x \quad \therefore \quad y' - y = x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad y &= c_1 \sin x + c_2 \cos x \\ y' &= c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ y'' &= -c_1 \sin x - c_2 \cos x \quad \text{より} \quad y'' + y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad y &= c_1x + \frac{c_2}{x}, \quad y' = c_1 - \frac{c_2}{x^2}, \quad y'' = \frac{2c_2}{x^3} \quad \text{より} \quad c_2 = \frac{x^3}{2}y'', \quad c_1 = y' + \frac{c_2}{x^2} \\ &= y' + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{2}y'' \\ &= y' + \frac{x}{2}y'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad y &= \left( y' + \frac{x}{2}y'' \right)x + \frac{1}{x} \left( \frac{x^3}{2}y'' \right) \\ &= xy' + \frac{x^2}{2}y'' + \frac{x^2}{2}y'' = xy' + x^2y'' \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x^2y'' + xy' - y = 0$$

264

$$(1) \quad y' = e^{ax} \{ (aA + bB) \cos bx + (aB - bA) \sin bx \} \quad \dots\dots ①$$

$$y'' = e^{ax} \{ (a^2 A - b^2 A + 2abB) \cos bx + (a^2 B - b^2 B - 2abA) \sin bx \} \quad \dots\dots ②$$

$$① \times 2a \quad 2ay' = e^{ax} \{ (2a^2 A + 2abB) \cos bx + (2a^2 B - 2abA) \sin bx \} \quad \dots\dots ①'$$

$$② - ①' \quad \text{より} \quad y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$$

$$(2) \quad x = 0 \quad \text{のとき} \quad y = A, \quad y' = aA + bB$$

265

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -g$$

$$(2) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - k \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$