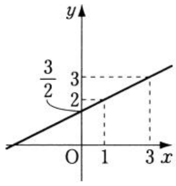
３章　微分法Ⅱ

１節　いろいろな関数表示の微分法

A

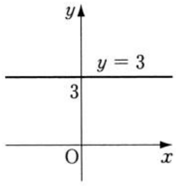
134

⑴ $\begin{cases} x = 2t + 1 & \cdots① \\ y = t + 2 & \cdots② \end{cases}$



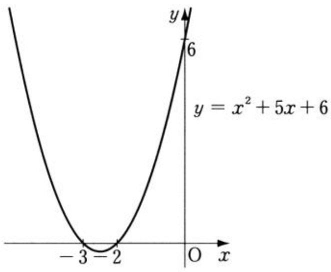
①−2×②より　$x - 2y = -3$　　∴　$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

⑵ $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3 \end{cases}$



任意の t について　y は常に 3 となる　　∴　$y = 3$

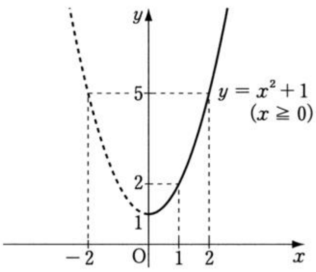
⑶ $\begin{cases} x = t - 2 & \cdots① \\ y = t^2 + t & \cdots② \end{cases}$



①より　$t = x + 2$

②に代入し，整理すると　$y = x^2 + 5x + 6$

⑷ $\begin{cases} x = \sqrt{t} & \cdots① \\ y = t + 1 & \cdots② \end{cases}$



①の両辺を 2 乗して②に代入すると　$y = x^2 + 1$

ただし，①より　$x \geqq 0$

135

⑴ $y = -2x + 5$ に $x = t + 1$ を代入

∴ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$

⑵ $y = -2x + 5$ に $x = -\dfrac{1}{2}t$ を代入

∴ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}t \\ y = t + 5 \end{cases}$

136

$$\begin{cases} x = t^2 + \dfrac{1}{t^2} & \cdots① \\ y = t - \dfrac{1}{t} & \cdots② \end{cases}$$

②の両辺を 2 乗すると　$y^2 = \left(t - \dfrac{1}{t}\right)^2$

$$y^2 = t^2 - 2 \times t \times \frac{1}{t} + \left(\frac{1}{t}\right)^2$$

$$y^2 = t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}$$

$$y^2 = x - 2 \qquad (①を代入)$$

$$y = \pm\sqrt{x-2}$$

137

(1)　$\dfrac{dx}{dt} = (2t^2)' = 4t$, $\dfrac{dy}{dt} = (t^2 - 1)' = 2t$　より　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{4t} = \dfrac{1}{2}$

(2)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3'}{(2t-1)'} = \dfrac{0}{2} = 0$

(3)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right)'}{\left(t - \dfrac{1}{t}\right)'} = \dfrac{2t - \dfrac{2}{t^3}}{1 + \dfrac{1}{t^2}} = \dfrac{2t^4 - 2}{t^3 + t} = 2\,\dfrac{t^2 - 1}{t} = 2\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$

(4)　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2\sin t - 1)'}{(2\cos t + 4)'} = \dfrac{2\cos t}{-2\sin t} = -\dfrac{1}{\tan t} = -\cot t$

138

(1)　$\dfrac{dx}{dt} = 3 > 0$　より　t の範囲はすべての実数

(2)　$\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$　において　$\dfrac{dx}{dt} = 0$　となるのは

$$1 - \cos t = 0$$

$$\cos t = 1$$

$$t = 0,\ 2\pi$$

よって，$\dfrac{dy}{dx}$ の値が定まるのは　$0 < t < 2\pi$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=2t-3$

$\dfrac{dx}{dt}=0$ となるのは　$2t-3=0$　より　$t=\dfrac{3}{2}$

よって，$\dfrac{dy}{dx}$ の値が定まるのは　$t\neq\dfrac{3}{2}$，$t>0$

139

(1) $\dfrac{dx}{dt}=14t=0$ のとき，すなわち $t=0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ の値は定まらない。

よって，$t\neq 0$ とすると　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2-12}{14t}$

$\dfrac{dy}{dx}=0$ より $3t^2-12=0$　　$\therefore\ t=\pm 2$

求める x は

$t=2$　のとき　$x_1=7\times 2^2+2=30$

$t=-2$　のとき　$x_2=7\times(-2)^2+2=30$　　$\therefore\ x=30$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t=0$ のとき，すなわち　$t=0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ の値は定まらない。

よって，$t\neq 0,\ \pi,\ 2\pi$　とすると　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}=-\cot t$

このとき，$\dfrac{dy}{dx}=0$　となるのは　$-\cot t=0$　　$\therefore\ t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

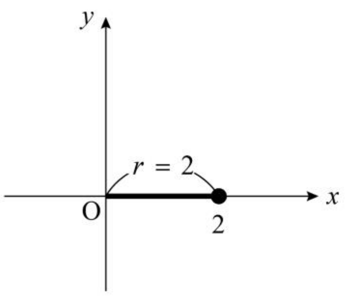
$t=\dfrac{\pi}{2}$　の時　$x_1=0$

$t=\dfrac{3}{2}\pi$　の時　$x_2=0$

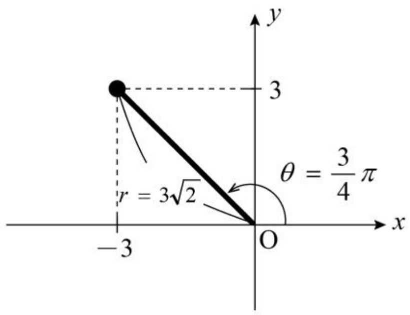
$\therefore\ x=0$

140

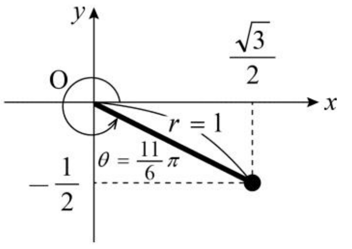
(1) （2，0）　⟶　（2，0）



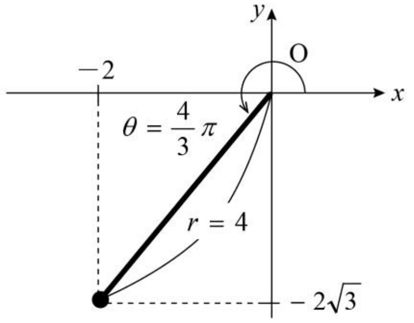
(2) （−3，3）　⟶　$\left(3\sqrt{2},\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$



(3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right) \longrightarrow \left(1,\ \dfrac{11}{6}\pi\right)$

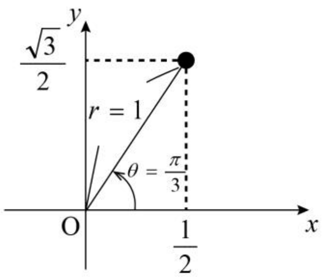


(4) $\left(-2,\ -2\sqrt{3}\right) \longrightarrow \left(4,\ \dfrac{4}{3}\pi\right)$

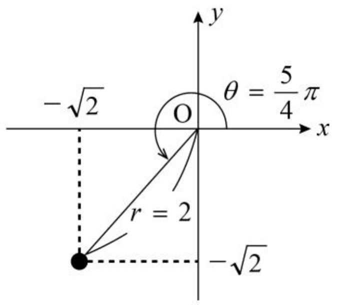


141

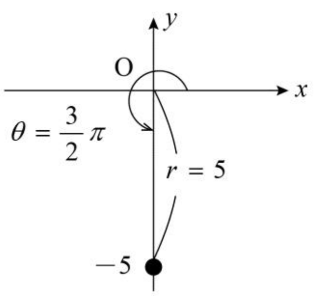
(1) $\left(1,\ \dfrac{\pi}{3}\right) \longrightarrow \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$



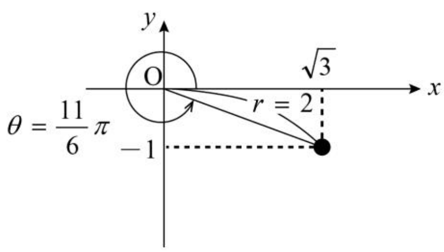
(2) $\left(2,\ \dfrac{5}{4}\pi\right) \longrightarrow \left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$



(3) $\left(5,\ \dfrac{3}{2}\pi\right) \longrightarrow \left(0,\ -5\right)$



(4) $\left(2,\ \dfrac{11}{6}\pi\right) \longrightarrow \left(\sqrt{3},\ -1\right)$



142

(1) 極座標$(r,\ \theta)$と直交座標$(x,\ y)$の間には次のような関係が成り立つ。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$r\sin\theta = 3$ より $y = 3$

⑵　$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$　より　$\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{y}{x}$

$$1 = \frac{y}{x}$$

$$y = x$$

⑶　$r = \sqrt{x^2 + y^2}$　より　$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$

$$x^2 + y^2 = 4$$

⑷　$r = 6\cos\theta$ の両辺に r を掛けると　$r^2 = 6r\cos\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，$x = r\cos\theta$　より　$x^2 + y^2 = 6x$

$$(x-3)^2 + y^2 = 3^2$$

143

⑴　$r = f(\theta)$ が与えられたとき，直交座標 $(x,\ y)$ と極座標 $(r,\ \theta)$ の関係より

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$r = 2$ より　$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$

このとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)} = \dfrac{(2\sin\theta)'}{(2\cos\theta)'} = \dfrac{2\cos\theta}{-2\sin\theta} = -\cot\theta$

⑵　$r = 2a\cos\theta$ より　$\begin{cases} x = 2a\cos\theta\cdot\cos\theta = 2a\cos^2\theta \\ y = 2a\cos\theta\cdot\sin\theta = a\sin 2\theta \end{cases}$

このとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(a\sin 2\theta)'}{(2a\cos^2\theta)'} = \dfrac{2a\cos 2\theta}{4a\cos\theta\cdot(-\sin\theta)}$

$$= \frac{2a\cos 2\theta}{-2a\sin 2\theta} = -\cot 2\theta$$

⑶　$r = \sin 2\theta$ より　$\begin{cases} x = \sin 2\theta\cdot\cos\theta \\ y = \sin 2\theta\cdot\sin\theta \end{cases}$

このとき　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\sin 2\theta - \sin\theta)'}{(\sin 2\theta\cos\theta)'} = \dfrac{2\cos 2\theta\cdot\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta}{2\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta}$

$$= \frac{\left(\dfrac{2\cos 2\theta\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta}{\cos 2\theta\cos\theta}\right)}{\left(\dfrac{2\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta}{\cos 2\theta\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{2\tan\theta + \tan 2\theta}{2 - \tan 2\theta\tan\theta}$$

144

⑴ $x^2+y^2-5=0$

$$y^2=-x^2+5$$

$$y=\pm\sqrt{5-x^2}$$

$y \geqq 0$ より $y=\sqrt{5-x^2}$

⑵ 問題を変更します

「$x^2+y^2+8x-6y+21=0$」

$$x^2+y^2+8x-6y+21=0$$

$$(x+4)^2+(y-3)^2=4$$

$$(y-3)^2=4-(x+4)^2$$

$$y-3=\pm\sqrt{4-(x+4)^2}$$

$y \geqq 0$ より $y=3+\sqrt{4-(x+4)^2}$

⑶ $4x-y^2=0$

$$y^2=4x$$

$$y=\pm 2\sqrt{x}$$

$y \geqq 0$ より $y=2\sqrt{x}$

⑷ $4x^2+5y^2=20$

$$5y^2=-4x^2+20$$

$$y^2=-\frac{4}{5}x^2+4$$

$$y=\pm\sqrt{4-\frac{4}{5}x^2}$$

$y \geqq 0$ より $y=\sqrt{4-\frac{4}{5}x^2}$

145

(1) $y^2 = 4x$

$y = 2\sqrt{x}$ （$y \geqq 0$ より）

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

別解 $y^2 = 4x$

$$2y\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(2) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$4x^2 + y^2 = 4$

$y^2 = 4 - 4x^2$

$y = 2\sqrt{1 - x^2}$ （$y \geqq 0$ より）

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times (-2x)$$

$$= -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

別解 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$$2x + \frac{1}{2}y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $x^2 + y^2 + 2x = 0$

$(x+1)^2 + y^2 - 1 = 0$

$y^2 = 1 - (x+1)^2$

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ （$y \geqq 0$ より）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-(x+1)^2}} \times (-2x-2)$$

$$= -\frac{x+1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$$

別解 $x^2 + y^2 + 2x = 0$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-x}{y}$$

$$= \frac{-x-1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$$

⑷ $x^2-4y^2-8y=0$

$x^2-4(y+1)^2+4=0$

$$(y+1)^2=\frac{1}{4}x^2+1$$

$$y+1=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+1}\quad (y \geqq 0 \text{ より } y+1>0)$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+1}-1$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}-1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\times 2x$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}$$

別解 $x^2-4y^2-8y=0$

$$2x-8y\frac{dy}{dx}-8\frac{dy}{dx}=0$$

$$(8y+8)\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{4(y+1)}$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}$$

146

⑴ $x^2+4y^2-16=0$

$2x+8y\dfrac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{4y}$

⑵ $x^3+y^3=1$

$3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2}{y^2}$

⑶ $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

$2(x-3)+2(y-2)\dfrac{dy}{dx}=0$

$(y-2)\dfrac{dy}{dx}=3-x \qquad \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3-x}{y-2}$

⑷ $xe^x+ye^y=1$

$(e^x+xe^x)+(e^y+ye^y)\dfrac{dy}{dx}=0$

$(1+y)e^y\dfrac{dy}{dx}=-(1+x)e^x \qquad \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1+x}{1+y}e^{x-y}$

147

⑴ $\sin x+\cos y=1$

$\cos x-\sin y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{\sin y}$

⑵ $xy=4$

$y+x\dfrac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

⑶ $x^2+3xy+y^2=1$

$$2x+\left(3y+3x\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2x+3y)+(3x+2y)\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y}{3x+2y}$$

⑷ $x+y=\log\frac{1}{xy}$

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{1}{xy}\right)}\times\frac{-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)}{(xy)^2}$$

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$xy+xy\frac{dy}{dx}=-y-x\frac{dy}{dx}$$

$$(xy+x)\frac{dy}{dx}=-xy-y$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(x+1)}{x(y+1)}$$

148

⑴ $r^2=9\sin 2\theta$

$$2r\frac{dr}{d\theta}=9\cdot 2\cos 2\theta \qquad \therefore\ \frac{dr}{d\theta}=\frac{9\cos 2\theta}{r}$$

⑵ $r=\sqrt{4\cos 2\theta}$

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\cos 2\theta}}\cdot 4\cdot 2(-\sin 2\theta) \qquad \therefore\ \frac{dr}{d\theta}=-\frac{2\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

⑶ $r^2=\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta$

$r^2=\cos 4\theta$

$$2r\frac{dr}{d\theta}=-4\sin 4\theta \qquad \therefore\ \frac{dr}{d\theta}=-\frac{2\sin 4\theta}{r}$$

B

149

⑴ $t=1$のとき $x=2,\ y=0$ より

求める接線の接点は　(2, 0)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(t^2-t)'}{(t+1)'}=\frac{2t-1}{1}=2t-1$$

$t=1$のとき $\frac{dy}{dx}=1$ より 接線の傾きは　1

$y-y'=m(x-x')$ より　$y-0=1\cdot(x-2)$　　$\therefore$　$y=x-2$

⑵　$t=2$ のとき $x=\dfrac{2}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$　より

求める接線の接点は　$\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)'}{\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)'}=\frac{\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$t=2$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$

よって接線の傾きは　$-\dfrac{4}{3}$

以上より接線の方程式は　$y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{2}{5}\right)$

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$$

150

$y^2=8x$

$2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=8$　　$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y}$

$y-4=1\cdot(x-2)$

$\therefore\ \ y=x+2$

151

$x^2-xy+y^2=1$

$2x-y-x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$　　$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x-2y}$

$y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)$　　$\therefore\ \ y=\dfrac{1}{2}x+1$

152

⑴　$x^3+xy+y^2=a^2$

$3x^2+y+x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$　　$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+y}{x+2y}$　　$\therefore\ f'(x)=-\dfrac{3x^2+y}{x+2y}$

⑵　$\sin x+\sin y-\sin(x+y)=0$

$\cos x+\cos y\dfrac{dy}{dx}-\cos(x+y)\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\cos x+\cos(x+y)}{\cos y-\cos(x+y)}$　　$\therefore\ f'(x)=\dfrac{-\cos x+\cos(x+y)}{\cos y-\cos(x+y)}$

(3) $e^{x} + e^{y} = e^{x+y}$

$$e^{x} + e^{y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$(e^{y} - e^{x+y})\frac{dy}{dx} = e^{x+y} - e^{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x+y} - e^{x}}{e^{x+y} - e^{y}} \qquad \therefore \quad f'(x) = -\frac{e^{x+y} - e^{x}}{e^{x+y} - e^{y}}$$