

## 7 章 微分方程式

### 3 節 2 階微分方程式

A

281  $c_1, c_2$  は任意定数

(1)  $y'' = 2x$

$$y' = x^2 + c_1 \quad y = \frac{1}{3}x^3 + c_1x + c_2$$

(2)  $y'' = \frac{1}{x}$

$$y' = \log|x| + c_1$$

$$y = x \log|x| - x + c_1x + c_2$$

(3)  $y'' = x \sin x$

$$y' = -x \cos x + \sin x + c_1$$

$$y = -x \sin x - \cos x - \cos x + c_1x + c_2$$

$$y = -x \sin x - 2 \cos x + c_1x + c_2$$

282  $c_1, c_2$  は任意定数

(1)  $y'y'' - 1 = 0$

$$y' = p \text{ とおくと } y'' = p'$$

$$pp' = 1$$

$$\int p dp = \int 1 dx$$

$$\frac{1}{2} p^2 = x + c_1$$

$$p^2 = 2x + c_1$$

$$p = \pm \sqrt{2x + c_1}$$

$$\therefore y = \pm \sqrt{2x + c_1}$$

$$\text{したがって } y = \pm \frac{1}{3} (2x + c_1)^{\frac{3}{2}} + c_2$$

(2)  $y'' - (y')^2 = 1$

$$y' = p \text{ とおくと } y'' = p'$$

$$p' - p^2 = 1$$

$$p' = 1 + p^2$$

$$\int \frac{1}{1 + p^2} dp = \int dx$$

$$\text{Tan}^{-1} p = x + c_1$$

$$\therefore p = \tan(x + c_1)$$

$$y' = \tan(x + c_1)$$

したがって

$$y = -\log|\cos(x + c_1)| + c_2$$

283  $c_1, c_2$  は任意定数

$$(1) \quad (1-y)y'' + (y')^2 = 0$$

$$y' = p \quad \text{とおくと} \quad y'' = \frac{dp}{dy} p$$

$$(1-y) \frac{dp}{dy} p + p^2 = 0$$

$$(1-y) \frac{dp}{dy} = -p$$

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{y-1} dy$$

$$\log|p| = \log|y-1| + c_1$$

$$\frac{p}{y-1} = \pm e^{c_1} = c_1$$

$$p = c_1(y-1)$$

$$y' = c_1(y-1)$$

$$\int \frac{1}{y-1} dy = \int c_1 dx$$

$$\log|y-1| = c_1 x + c_2$$

$$y-1 = \pm e^{c_1 x + c_2} = c_2 e^{c_1 x}$$

$$\therefore y = c_2 e^{c_1 x} + 1$$

$$(2) \quad yy'' + (y')^2 = 1$$

$$y' = p \quad \text{とおくと} \quad y'' = \frac{dp}{dy} p$$

$$y \frac{dp}{dy} p - p^2 = 1$$

$$y \frac{dp}{dy} = 1 + p$$

$$\int \frac{1}{1+p} dp = \int \frac{1}{y} dy$$

$$\log|1+p| = \log|y| + c_1$$

$$\frac{1+p}{y} = \pm e^{c_1} = c_1$$

$$p = c_1 y - 1$$

$$y' = c_1 y - 1$$

$$\int \frac{1}{c_1 y - 1} dy = \int dx$$

$$\frac{1}{c_1} \log|c_1 y - 1| = x + c_2$$

$$\therefore c_1 y - 1 = \pm e^{c_1 x + c_1 c_2} = c_2 e^{c_1 x}$$

$$\text{したがって} \quad y = \frac{c_2 e^{c_1 x} + 1}{c_1}$$

$$(1) \quad W(x, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^3 - x^3 = 2x^3 \neq 0 \quad \therefore \quad 1 \text{ 次独立である。}$$

$$(2) \quad W(e^x, 2e^x) = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0 \quad \therefore \quad 1 \text{ 次独立ではない。}$$

$$(3) \quad W(e^x \cos x, e^x \cos 2x) = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \cos 2x \\ e^x \cos x - e^x \sin x & e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x \end{vmatrix} \\ = e^{2x} \{ \cos x (\cos 2x - 2 \sin 2x) - \cos 2x (\cos x - \sin x) \} \neq 0 \quad \therefore \quad 1 \text{ 次独立である。}$$

$$(1) \quad (e^x)'' = e^x \quad \text{より} \quad y'' - y = e^x - e^x = 0$$

$$(e^{-x})'' = e^{-x} \quad \text{より} \quad y'' - y = e^{-x} - e^{-x} = 0$$

$$\text{また} \quad W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -2 \neq 0$$

したがって、これらは  $y'' - y = 0$  の 1 次独立な解である。

$$(2) \quad y = -1, \quad y'' = 0 \quad \text{より} \quad y'' - y = 0 - (-1) = 1 \quad \text{より} \\ y = -1 \text{ は } y'' - y' = 1 \text{ の解である。}$$

$$(3) \quad (1), (2) \text{ より} \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1 \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(1) \quad y'' + 3y' + 2y = 0$$

特性方程式

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{より}$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\therefore \lambda = -1, -2$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(2) \quad y'' + 4y' + 4y = 0$$

特性方程式

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \text{より}$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\therefore \lambda = -2$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(3) \quad y'' + 9y = 0$$

特性方程式

$$\lambda^2 + 9 = 0 \quad \text{より}$$

$$\lambda = \pm 3i$$

$$\therefore y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

$$(c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(4) \quad y'' + y' + 2y = 0$$

特性方程式

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \quad \text{より}$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$\therefore y = e^{-\frac{1}{2}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right)$$

$$(c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(1) \quad y'' + y' - 6y = 0$$

特性方程式

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \therefore \lambda = -2, 3$$

$$\therefore y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$$

$x = 0, y = 2, y' = 1$  を代入して

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 1 = -2c_1 + 3c_2 \end{cases} \quad \text{これより } c_1 = 1, c_2 = 1$$

$$\therefore y = e^{-2x} + e^{3x}$$

$$(2) \quad y'' - 2y' + y = 0$$

特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \therefore \lambda = 1$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2 x) e^x$$

$$y' = c_2 e^x + (c_1 + c_2 x) e^x$$

$x = 0, y = 1, y' = 2$  を代入して

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 2 = c_2 + c_1 \end{cases} \quad \text{これより } c_1 = 1, c_2 = 1$$

$$\therefore y = (1 + x) e^x$$

$$(3) \quad 2y'' + y' + 3y = 0$$

特性方程式

$$2\lambda^2 + \lambda + 3 = 0 \quad \text{より}$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{4}$$

$$\therefore y = e^{-\frac{1}{4}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{23}}{4} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{23}}{4} x \right)$$

$$y' = -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{23}}{4} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{23}}{4} x \right) + e^{-\frac{1}{4}x} \left( -\frac{\sqrt{23}}{4} c_1 \sin \frac{\sqrt{23}}{4} x + \frac{\sqrt{23}}{4} c_2 \cos \frac{\sqrt{23}}{4} x \right)$$

$x = 0$  のとき  $y = 0, y' = -2$  を代入

$$\begin{cases} 0 = c_1 \\ -2 = -\frac{1}{4} c_1 + \frac{\sqrt{23}}{4} c_2 \end{cases} \quad \text{これより } c_1 = 0, c_2 = -\frac{8}{\sqrt{23}}$$

$$\therefore y = -\frac{8}{\sqrt{23}} e^{-\frac{1}{4}x} \sin \frac{\sqrt{23}}{4} x$$

288  $c_1, c_2$  は任意定数

$$(1) \quad y'' - 7y' + 12y = 2x$$

特性方程式  $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0 \quad \lambda = 3, 4$$

$$\therefore y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

1 つの解を  $y = Ax + B$  と予想  $y' = A, y'' = 0$  を代入して

$$-7A + 12Ax + 12B = 2x$$

$$\therefore 12A = 2, \quad -7A + 12B = 0$$

$$A = \frac{1}{6}, \quad 12B = 7A$$

$$B = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{6} + \frac{7}{72}$$

$$\therefore y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{72}$$

したがって,  $y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{72} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$

$$(2) \quad y'' - 6y' + 10y = x^2 + 1$$

特性方程式

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

$$\therefore y = e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

1 つの解を  $y = Ax^2 + Bx + C$  と予想  $y' = 2Ax + B, y'' = 2A$  を代入して

$$2A - 12Ax - 6B + 10Ax^2 + 10Bx + 10C = x^2 + 1$$

$$10Ax^2 + (-12A + 10B)x + 2A - 6B + 10C = x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ -12A + 10B = 0 \\ 2A - 6B + 10C = 1 \end{cases} \quad \text{より } A = \frac{1}{10}, B = \frac{3}{25}, C = \frac{13}{250}$$

$$\therefore y = \frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{25}x + \frac{13}{250}$$

したがって,  $y = \frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{25}x + \frac{13}{250} + e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$$(3) \quad y'' + 2y' - 8y = e^x$$

特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0 \quad \therefore \lambda = 2, -4$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$$

1 つの解を  $y = Ae^x$  と予想  $y' = Ae^x$ ,  $y'' = Ae^x$  を代入して

$$Ae^x + 2Ae^x - 8Ae^x = e^x$$

$$-5A = 1 \quad A = -\frac{1}{5} \quad \therefore y = -\frac{1}{5} e^x$$

$$\text{したがって, } y = -\frac{1}{5} e^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$$

$$(4) \quad y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \therefore \lambda = -1$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

1 つの解を  $y = Ax^2 e^{-x}$  と予想

$$y' = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}$$

$$y'' = 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}$$

$$= 2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x} \quad \text{を代入して}$$

$$2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x} + 4Axe^{-x} - 2Ax^2 e^{-x} + Ax^2 e^{-x} = e^{-x}$$

$$2A = 1 \quad \therefore A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

$$\text{したがって, } y = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

$$(5) \quad y'' - 3y' - 4y = 2 \cos x$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0 \quad \therefore \lambda = -1, 4$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$$

1 つの解を  $y = A \cos x + B \sin x$  と予想

$$y' = -A \sin x + B \cos x$$

$$y'' = -A \cos x - B \sin x \quad \text{を代入して}$$

$$-A \cos x - B \sin x + 3A \sin x - 3B \cos x - 4A \cos x - 4B \sin x = 2 \cos x$$

$$\begin{cases} -5A - 3B = 2 \\ -5B + 3A = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{aligned} A &= -\frac{10}{34} = -\frac{5}{17} \\ B &= -\frac{6}{34} = -\frac{3}{17} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{5}{17} \cos x - \frac{3}{17} \sin x$$

$$\text{したがって, } y = -\frac{5}{17} \cos x - \frac{3}{17} \sin x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$$

$$(6) \quad y'' + 4y = \sin 2x$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2i \quad \therefore y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

1 つの解を  $y = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$  と予想

$$y' = A \cos 2x + B \sin 2x + 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x)$$

$$y'' = -4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 4Ax \cos 2x - 4Bx \sin 2x \quad \text{を代入して}$$

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 4Ax \cos 2x - 4Bx \sin 2x$$

$$+ 4x(A \cos 2x + B \sin 2x) = \sin 2x$$

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 4B = 0 \end{cases} \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = 0$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4} x \cos 2x$$

$$\text{したがって, } y = -\frac{1}{4} x \cos 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

289  $c_1, c_2$  は任意定数

$$(1) \quad y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

特性方程式  $\lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm i \quad \therefore y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x \quad \text{とする}$$

$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

したがって 1 つの解は

$$\begin{aligned} y &= -\cos x \int \frac{\sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{1} dx + \sin x \int \frac{\cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{1} dx \\ &= -\cos x \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \sin x \int \frac{1}{\cos x} dx = -\cos x \left( \frac{1}{\cos x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \\ &= -1 + \sin x \cdot \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \end{aligned}$$

したがって

$$y = -1 + \frac{1}{2} \sin x \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$(2) \quad y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \log x$$

特性方程式  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda = 2 \quad \therefore y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = x e^{2x} \quad \text{とすると}$$

$$W(e^{2x}, x e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2x e^{4x} - 2x e^{4x} = e^{4x}$$

したがって 1 つの解は

$$\begin{aligned} y &= -e^{2x} \int \frac{x e^{2x} e^{2x} \log x}{e^{4x}} dx + x e^{2x} \int \frac{e^{2x} e^{2x} \log x}{e^{4x}} dx \\ &= -e^{2x} \int x \cdot \log x dx + x e^{2x} \int \log x dx \\ &= -e^{2x} \left( \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x dx \right) + x e^{2x} (x \log x - x) \\ &= -e^{2x} \left( \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 \right) + x e^{2x} (x \log x - x) \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} \log x - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} \end{aligned}$$

したがって  $y = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} \log x - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + (c_1 + c_2 x) e^{2x}$



$$(1) \quad xy'' - y' + (1-x)y = 0$$

$$y = e^x \quad y' = e^x, \quad y'' = e^x \quad \text{より}$$

$$xy'' - y' + (1-x)y = xe^x - e^x + (1-x)e^x = 0$$

したがって、 $y = e^x$  は微分方程式を満たすので1つの解である。

$$(2) \quad (1) \text{より}$$

$y = ce^x$  も解である。

$c$  と  $x$  の関数  $u$  として  $y = ue^x$  とおく

$$y' = u'e^x + ue^x, \quad y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$$

これらを代入して

$$xu''e^x + 2xu'e^x + xue^x - u'e^x - ue^x + ue^x - xue^x = 0$$

$$xu'' + 2xu' - u' = 0$$

$$xu'' + (2x-1)u' = 0$$

$$u' = p \quad \text{とおくと} \quad u'' = p'$$

$$xp' + (2x-1)p = 0$$

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1-2x}{x} dx$$

$$\log |p| = \log |x| - 2x + c_1$$

$$p = c_1 x e^{-2x}$$

$$u' = c_1 x e^{-2x}$$

$$\therefore u = c_1 \left( -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) + c_2$$

$$\text{したがって} \quad y = -\frac{c_1}{4} (2x+1) e^{-x} + c_2 e^x \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

291  $c_1, c_2$  は任意定数

$$(1) \quad x^2 y'' + xy' - y = 0$$

$y = x^\lambda$  の形の解を予想

$$y' = \lambda x^{\lambda-1} \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + \lambda x^\lambda - x^\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

$$\therefore \lambda = -1, 1$$

したがって  $y = x$  と  $y = x^{-1}$  は解, これらは 1 次独立なので  $y = c_1 x + c_2 x^{-1}$

$$(2) \quad x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

$y = x^\lambda$  の形の解を予想

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 3\lambda x^\lambda + x^\lambda = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda+1)^2 = 0 \quad \lambda = -1$$

したがって  $y = x^{-1}$  は解である。また  $y = cx^{-1}$  も解である。

$c$  を  $x$  の関数  $u$  として  $y = ux^{-1}$  とおく。

$$y' = u'x^{-1} - ux^{-2}$$

$$y'' = u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-3} \quad \text{を代入して}$$

$$u''x - 2u' + 2u^{x-1} + 3u' - 3ux^{-1} + ux^{-1} = 0$$

$$u''x + u' = 0 \quad \text{より} \quad (u'x)' = 0$$

$$\therefore u'x = c_1 \quad u' = \frac{c_1}{x} \quad \therefore u = c_1 \log|x| + c_2$$

$$\text{よって, } y = x^{-1}(c_1 \log|x| + c_2)$$

292  $c_1, c_2$  は任意定数

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t & \dots \textcircled{1} \\ \frac{dy}{dt} = x + t & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①の両辺を  $t$  で微分すると  $x'' = y' + 1$

②をこれに代入して  $x'' = x + t + 1$

$$x'' - x = t + 1$$

特性方程式  $\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \pm 1$

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

1 つの解を  $x = At + B$  と予想  $x' = A, x'' = 0$  より

$$-At - B = t + 1$$

$$A = -1, B = -1$$

$$\therefore x = -t - 1$$

$$\therefore x = -t - 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^t$$

①より  $y = x' - t$

$$= -1 - c_1 e^{-t} + c_2 e^t - t$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} x = -t - 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ y = -t - 1 - c_1 e^{-t} + c_2 e^t \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y + e^t & \dots ① \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - e^t & \dots ② \end{cases}$$

①の両辺を  $t$  で微分  $x'' = 3x' + y' + e^t$

②を代入して  $x'' = 3x' - x + y - e^t + e^t$   
 $= 3x' - x + y$

①より  $y = x' - 3x - e'$  なので

$$x'' = 3x' - x + x' - 3x - e' \quad \text{より} \quad x'' - 4x' + 4x = -e'$$

特性方程式

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \lambda = 2 \quad \therefore \quad x = (c_1 + c_2 t) e^{2t}$$

1 つの解を  $x = Ae^t$  と予想  $x' = Ae^t, \quad x'' = Ae^t$

$$Ae^t - 4Ae^t + 4Ae^t = -e^t$$

$$A = -1 \quad \therefore \quad x = -e^t$$

$$\therefore \quad x = -e^t + (c_1 + c_2 t) e^{2t}$$

$$y = x' - 3x - e^t$$

$$= -e^t + c_2 e^{2t} + 2(c_1 + c_2 t) e^{2t} + 3e^t - 3(c_1 + c_2 t) e^{2t} - e^t$$

$$= e^t + c_2 e^{2t} - (c_1 + c_2 t) e^{2t} = e^t - (c_1 - c_2 + c_2 t) e^{2t}$$

したがって 
$$\begin{cases} x = -e^t + (c_1 + c_2 t) e^{2t} \\ y = e^t - (c_1 - c_2 + c_2 t) e^{2t} \end{cases}$$

## B

293  $c_1, c_2$  は任意定数

$$(1) \quad y'' - 2y' - 3y = e^x \cos x$$

特性方程式,  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ 

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \quad \therefore \lambda = 3, -1$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

1 つの解を  $y = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$  と予想する

$$y' = Ae^x \cos x - Ae^x \sin x + Be^x \sin x + Be^x \cos x$$

$$y'' = Ae^x \cos x - 2Ae^x \sin x - Ae^x \cos x$$

$$+ Be^x \sin x + 2Be^x \cos x - Be^x \sin x$$

$$= -2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x$$

これらを微分方程式に代入して

$$-2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x - 2Ae^x \cos x + 2Ae^x \sin x$$

$$-2Be^x \sin x - 2Be^x \cos x - 3Ae^x \cos x - 3Be^x \sin x$$

$$= e^x \cos x$$

$$\begin{cases} -2A + 2A - 2B - 3B = 0 \\ 2B - 2A - 2B - 3A = 1 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5} e^x \cos x$$

$$\text{したがって} \quad y = -\frac{1}{5} e^x \cos x + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

$$(2) \quad y'' - 2y' + y = x \sin x$$

特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda = 1 \quad \therefore y = (c_1 + c_2 x) e^x$$

1 つの解を  $y = x(A \sin x + B \cos x) + C \sin x + D \cos x$  と予想する。

$$y' = A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x) + C \cos x - D \sin x$$

$$y'' = 2A \cos x - 2B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x) - C \sin x - D \cos x$$

これらを微分方程式に代入して

$$2A \cos x - 2B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x) - C \sin x - D \cos x$$

$$-2A \sin x - 2B \cos x - 2x(A \cos x - B \sin x) - 2C \cos x + 2D \sin x$$

$$+ x(A \sin x + B \cos x) + C \sin x + D \cos x = x \sin x$$

$$\begin{cases} 2A - 2B - 2C = 0 \\ -2B - 2A + 2D = 0 \\ -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} A = 0, \quad B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$\text{したがって} \quad y = \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + (c_1 + c_2 x) e^x$$

$$(3) \quad y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x} \cos x$$

特性方程式

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 1, 2 \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

1 つの解を  $y = Ax + B + Ce^{2x} \cos x + De^{2x} \sin x$  と予想する。

$$y' = A + 2Ce^{2x} \cos x - Ce^{2x} \sin x + 2De^{2x} \sin x + De^{2x} \cos x$$

$$y'' = 4Ce^{2x} \cos x - 2Ce^{2x} \sin x - 2Ce^{2x} \sin x - Ce^{2x} \cos x$$

$$+ 4De^{2x} \sin x + 2De^{2x} \cos x + 2De^{2x} \cos x - De^{2x} \sin x$$

これらを微分方程式に代入すると

$$3Ce^{2x} \cos x - 4Ce^{2x} \sin x + 3De^{2x} \sin x + 4De^{2x} \cos x$$

$$- 3A - 6Ce^{2x} \cos x + 3Ce^{2x} \sin x - 6De^{2x} \sin x - 3De^{2x} \cos x$$

$$+ 2Ax + 2B + 2Ce^{2x} \cos x + 2De^{2x} \sin x = x + e^{2x} \cos x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A = 1 \\ -3A + 2B = 0 \\ 3C + 4D - 6C - 3D + 2C = 1 \\ -4C + 3D + 3C - 6D + 2D = 0 \end{array} \right. \quad \text{より} \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{4} \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} \cos x + \frac{1}{2}e^{2x} \sin x$$

$$\text{したがって} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} \cos x + \frac{1}{2}e^{2x} \sin x + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$(1) \quad y'' - 2y' + 2y = x^2$$

特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4}i}{2} = 1 \pm i$$

$$\therefore y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

1 つの解を  $y = Ax^2 + Bx + C$  と予想

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

これらを微分方程式に代入して

$$2A - 4Ax - 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2$$

$$\begin{cases} 2A = 1 & A = \frac{1}{2} \\ -4A + 2B = 0 & \text{より } B = 1 \\ 2A - 2B + 2C = 0 & C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} + e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$y' = x + 1 + e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^x(-c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

$$x = 0 \quad y = \frac{1}{2} \quad y' = \frac{1}{2} \text{ を代入して}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_1 & c_1 = 0 \\ & \text{より} \\ \frac{1}{2} = 1 + c_1 + c_2 & c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^x \sin x$$

$$(2) \quad y'' - 5y' + 6y = e^x + e^{2x}$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \therefore \lambda = 2, 3$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

1つの解を  $y = Ae^x + Bxe^{2x}$  と予想する

$$y' = Ae^x + Be^{2x} + 2Bxe^{2x}$$

$$y'' = Ae^x + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$$

これらを微分方程式に代入して

$$\begin{aligned} Ae^x + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} - 5Ae^x - 5Be^{2x} - 10Bxe^{2x} \\ + 6Ae^x + 6Bxe^{2x} = e^x + e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -B = 1 \end{cases} \quad \text{より} \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -1$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}e^x - xe^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y' = \frac{1}{2}e^x - e^{2x} - 2xe^{2x} + 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$$

$x = 0$   $y = -1$   $y' = 1$  を代入して

$$\begin{cases} -1 = \frac{1}{2} + c_1 + c_2 & c_1 = -6 \\ 1 = \frac{1}{2} - 1 + 2c_1 + 3c_2 & c_2 = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\text{したがって} \quad y = \frac{1}{2}e^x - xe^{2x} - 6e^{2x} + \frac{9}{2}e^{3x}$$



$$(3) \quad y'' + y' - 6y = x + \sin x$$

特性方程式  $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \quad \therefore \lambda = 2, -3$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

1つの解を  $y = Ax + B + C \sin x + D \cos x$

$$y' = A + C \cos x - D \sin x$$

$$y'' = -C \sin x - D \cos x$$

微分方程式に代入して

$$-C \sin x - D \cos x + A + C \cos x - D \sin x$$

$$-6Ax - 6B - 6C \sin x - 6D \cos x = x + \sin x$$

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ A - 6B = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{36} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -C - D - 6C = 1 \\ -D + C - 6D = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} C = -\frac{7}{50} \\ D = -\frac{1}{50} \end{matrix}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{36} - \frac{7}{50}\sin x - \frac{1}{50}\cos x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

$$y' = -\frac{1}{6} - \frac{7}{50}\cos x + \frac{1}{50}\sin x + 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$x = 0 \quad y = 0 \quad y' = 0$  を代入して

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{36} - \frac{1}{50} + c_1 + c_2 \\ 1 = -\frac{1}{6} - \frac{7}{50} + 2c_1 - 3c_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} c_1 = \frac{29}{100} \\ c_2 = -\frac{109}{450} \end{matrix}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{36} - \frac{7}{50}\sin x - \frac{1}{50}\cos x + \frac{29}{100}e^{2x} - \frac{109}{450}e^{-3x}$$

$$295 \quad y'' + 2y' + ay = 0 \quad (a > 1)$$

(1) 特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda + a = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{a-1} i$$

$$\therefore y = e^{-x} (c_1 \cos(\sqrt{a-1} x) + c_2 (\sin \sqrt{a-1} x)) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(2) \quad y' = -e^{-x} (c_1 \cos(\sqrt{a-1} x) + c_2 \sin(\sqrt{a-1} x))$$

$$+ e^{-x} (-\sqrt{a-1} c_1 \sin(\sqrt{a-1} x) + \sqrt{a-1} c_2 \cos(\sqrt{a-1} x))$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ -1 = -c_1 + \sqrt{a-1} c_2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{したがって} \quad y = e^{-x} \cos(\sqrt{a-1} x)$$

$$(3) \quad y(\pi) = 0 \quad \text{より}$$

$$0 = \cos(\sqrt{a-1} \pi)$$

$$\text{したがって} \quad \sqrt{a-1} \pi = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n+1}{2} \pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\text{よって} \quad a = \frac{(2n+1)^2}{4} + 1 \quad (n \text{ は整数})$$

(1)  $\alpha = 0$  より

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y & \text{①} \\ \frac{dy}{dt} = x & \text{②} \end{cases}$$

①の両辺を  $t$  で微分すると  $x'' = -y'$

②を代入して  $x'' = -x$

特性方程式  $\lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda = \pm i$$

$$\therefore x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

①より  $y = -x'$

$$= -(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

$$= c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

$x(0) = 1, y(0) = 1$  より

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 1 = -c_2 \end{cases}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} x(t) = \cos t - \sin t \\ y(t) = \sin t + \cos t \end{cases}$$

(2)  $\alpha \neq 0$  より

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - y & \dots \textcircled{1} \\ \frac{dy}{dt} = x + \alpha y & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①の両辺を  $t$  で微分すると  $x'' = \alpha x' - y'$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{を代入して} \quad x'' &= \alpha(\alpha x - y) - (x + \alpha y) \\ &= \alpha^2 x - \alpha y - x - \alpha y \\ &= (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha y \end{aligned}$$

①より  $y = \alpha x - x'$  であるので

$$\begin{aligned} x'' &= (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha(\alpha x - x') \\ &= (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha^2 x + 2\alpha x' \\ x'' - 2\alpha x' + (1 + \alpha^2)x &= 0 \end{aligned}$$

特性方程式  $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (1 + \alpha^2) = 0$

$$\lambda = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(1 + \alpha^2)}}{2} = \alpha \pm i$$

$$\therefore x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

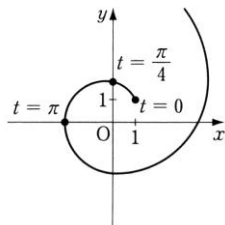
$$\begin{aligned} y &= \alpha\{e^{\alpha t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)\} - \{e^{\alpha t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)\} \\ &\quad + e^{\alpha t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)\} \\ &= -e^{\alpha t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) \end{aligned}$$

$x(0) = 1, y(0) = 1$  より

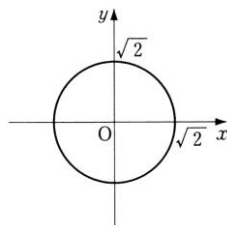
$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 1 = -c_2 \end{cases}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(\cos t - \sin t) \\ y(t) = e^{\alpha t}(\sin t + \cos t) \end{cases}$$

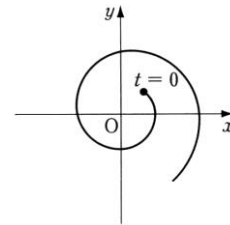
(3)  $\alpha > 0$  のとき



$\alpha = 0$  のとき



$\alpha < 0$  のとき



$$(1) \quad x^2 y'' + 2xy' + 5y = 0$$

$$x = e^t \text{ とすると } \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

特性方程式

$$\lambda^2 + \lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-20}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2}$$

$$\therefore y = e^{-\frac{1}{2}t} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{19}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{19}}{2} t \right)$$

$$y = x^{-\frac{1}{2}} \left( c_1 \cos \left( \frac{\sqrt{19}}{2} \log x \right) + c_2 \sin \left( \frac{\sqrt{19}}{2} \log x \right) \right) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(2) \quad x^2 y'' - 4xy' + 4y = \log x$$

$$x = e^t \text{ とすると } \frac{d^2 y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 4y = t$$

特性方程式

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \quad \lambda = 1, 4$$

$$\therefore y = c_1 e^t + c_2 e^{4t}$$

1つの解を  $y = At + B$  と予想

$$\frac{dy}{dt} = A, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \text{ を代入して}$$

$$-5A + 4At + 4B = t$$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ -5A + 4B = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{matrix} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{5}{16} \end{matrix}$$

$$\therefore y = \frac{1}{4} t + \frac{5}{16}$$

$$\text{したがって } y = \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} + c_1 e^t + c_2 e^{4t}$$

$$y = \frac{1}{4} \log x + \frac{5}{16} + c_1 x + c_2 x^4 \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(1) \quad y = e^x \quad y' = e^x \quad y'' = e^x \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y &= e^x - \frac{x}{x-1} e^x + \frac{1}{x-1} e^x \\ &= \left(1 - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) e^x = \left(\frac{x-1-x+1}{x-1}\right) e^x = 0 \end{aligned}$$

となるので、 $y = e^x$  は同次方程式の解である。

(2)  $y = ue^x$  とおく

$$y' = u'e^x + ue^x, \quad y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x \quad \text{より}$$

$$e^x u'' + \frac{x-2}{x-1} e^x u' = x-1$$

$$u' = v \quad \text{とおくと} \quad u'' = v'$$

$$e^x v' + \frac{x-2}{x-1} e^x v = x-1$$

$$v' + \frac{x-2}{x-1} v = e^{-x}(x-1)$$

$$\text{同次方程式} \quad v' + \frac{x-2}{x-1} v = 0$$

$$v' = -\frac{x-2}{x-1} v$$

$$\int \frac{1}{v} dv = -\int \frac{x-2}{x-1} dx$$

$$\begin{aligned} \log|v| &= -(x-1 - \log|x-1|) + c \\ &= -x+1 + \log|x-1| + c \end{aligned}$$

$$\frac{v}{x-1} = \pm e^{c_1 - x} = ce^{-x}$$

$$v = c(x-1)e^{-x}$$

$$c \text{ を } x \text{ の関数 } c(x) \text{ として} \quad v = c(x)(x-1)e^{-x}$$

$$v' = c'(x)(x-1)e^{-x} + c(x)(2e^{-x} - xe^{-x}) \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} c'(x)(x-1)e^{-x} + c(x)(2e^{-x} - xe^{-x}) \\ + \frac{x-2}{x-1} c(x)(x-1)e^{-x} = e^{-x}(x-1) \end{aligned}$$

$$\therefore c'(x)(x-1)e^{-x} = e^{-x}(x-1)$$

$$c'(x) = 1$$

$$\text{したがって} \quad c(x) = x + c_1$$

$$\therefore v = (x + c_1)(x-1)e^{-x}$$

$$u' = (x + c_1)(x-1)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} u &= \int (x^2 + (c_1 - 1)x - c_1) e^{-x} dx + c_2 \\ &= -(x^2 + (c_1 - 1)x - c_1) e^{-x} + \int (2x + c_1 - 1) e^{-x} dx + c_2 \\ &= -(x^2 + (c_1 - 1)x - c_1) e^{-x} + \left( -(2x + c_1 - 1) e^{-x} + \int 2e^{-x} dx \right) + c_2 \\ &= -(x^2 + (c_1 - 1)x - c_1) e^{-x} - (2x + c_1 - 1) e^{-x} - 2e^{-x} + c_2 \\ &= -(x^2 + (c_1 + 1)x + 1) e^{-x} + c_2 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad y = -(x^2 + (c_1 + 1)x + 1) + c_2 e^x \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

299  $c_1, c_2$  は任意定数

$$(1) \quad t = \int e^{-x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$\therefore t = -e^{-x}$  と変換すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( e^{-x} \right) \frac{dy}{dt} + e^{-x} \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right)$$

$$= -e^{-x} \frac{dy}{dt} + e^{-x} \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= -e^{-x} \frac{dy}{dt} + e^{-2x} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

微分方程式に代入して

$$-e^{-x} \frac{dy}{dt} + e^{-2x} \frac{d^2 y}{dt^2} + e^{-x} \frac{dy}{dt} + e^{-2x} y = 0$$

$$e^{-2x} \frac{d^2 y}{dt^2} + e^{-2x} y = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$$

特性方程式  $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \therefore \lambda = \pm i$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

ここに  $t = -e^{-x}$  を代入して

$$y = c_1 \cos e^{-x} - c_2 \sin e^{-x}$$



(2)

$$\begin{aligned} t &= \int e^{-\int \frac{1}{\tan x} dx} dx \\ &= \int e^{\log|\sin x|} dx = \int \sin x dx = -\cos x \end{aligned}$$

$\therefore t = -\cos x$  を変換すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \sin x \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} (\sin x) \frac{dy}{dt} + \sin x \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \cos x \frac{dy}{dt} + \sin x \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \cos x \frac{dy}{dt} + \sin^2 x \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned}$$

これらを微分方程式に代入して

$$\begin{aligned} \cos x \frac{dy}{dt} + \sin^2 x \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{\tan x} \left( \sin x \frac{dy}{dt} \right) + \sin^2 xy &= x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + y &= -t \end{aligned}$$

特性方程式  $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \therefore \lambda = \pm i$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

1 つの解を  $y = At + B$  と予想

$$\frac{dy}{dt} = A, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \text{より} \quad At + B = -t \quad \therefore A = -1, B = 0$$

$$y = -t$$

したがって  $y = -t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$$= \cos x + c_1 \cos(-\cos x) + c_2 \sin(-\cos x)$$

$$\text{ゆえに} \quad y = \cos x + c_1 \cos(\cos x) - c_2 \sin(\cos x)$$