

新課程での GRAPES の活用

—複素数平面とデータの活用—

大阪教育大学附属高等学校 友田勝久

・はじめに

GRAPES といえば、ブドウですね。でも、いまはちょっと季節が違います。今日は皆さんに関数グラフソフト「GRAPES」の話をしたいと思います。正式名「Graph Presentation & Experiment System」、略して「GRAPES」です。名前の通り、関数のグラフを表示していろいろな角度から調べるためのソフトですが、三角形や円などの図形を描いて幾何学的な性質を調べることもできますし、エクセルのような表を用いて統計分野での利用もできます。

それでは、GRAPES の機能を紹介していきましょう。まずは、基本的な機能を、それから、新課程で新しく加わった「複素数平面」と「データの活用」での利用法を述べていきます。

・正確なグラフを描く

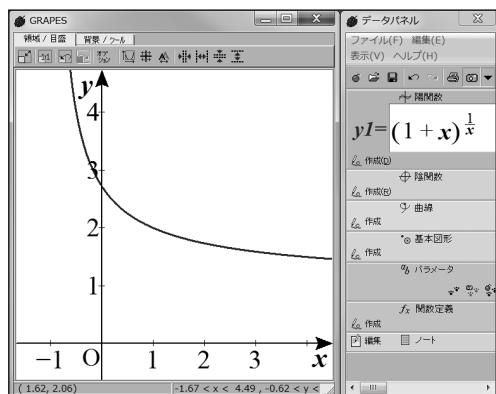
正確なグラフを描くことができるのがコンピュータの強みです。ここでは、対数関数の導関数を求める際に出てくる極限值、

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

を取り上げてみましょう。

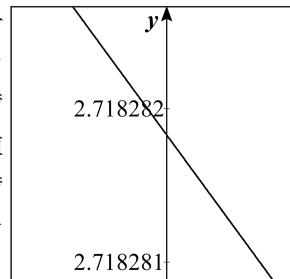
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ として GRAPES でグラフを描いたものが次の図です。

この極限は式の計算から調べていくことも、グラ



フを描くことも難しいことから、高校の教科書で扱われることはまれになりました。しかし、

GRAPES を使えば一瞬で解決します。グラフを拡大することができますから、正確な値をグラフ上の目盛りで求めていくことができます（右図）。



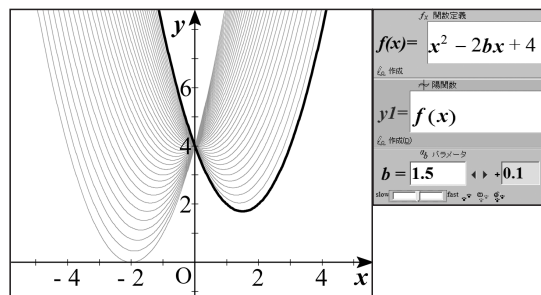
・グラフを動かす

GRAPES は「正確に」に加えて「素早く」描くことができます。このことは、条件の変化によるグラフの変化をリアルタイムで観察できることを意味します。つまり、グラフの「動き」を見ることができるのです。ここでは、2次関数のグラフを取り上げてみましょう。 x^2 の係数を増減するとグラフの凹凸が変化し、定数項の増減で y 切片が変化します。では、 x の係数を増減するとグラフの変化はどうなるでしょうか。

例として $y = x^2 - 2bx + 4$ で調べてみましょう。

$$f(x) = x^2 - 2bx + 4, y1 = f(x)$$

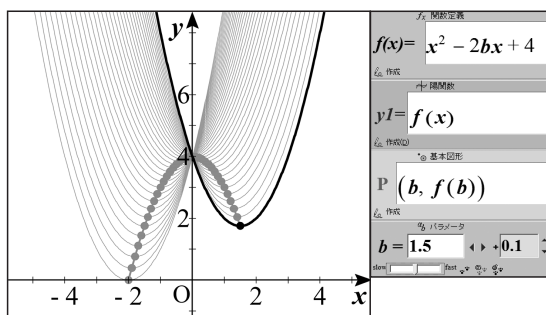
とします。「残像」を残す設定にして、パラメータ b を増減したのが次の図です。



次に、放物線の動きを見やすくするために、頂点 $(b, f(b))$ の軌跡を描いてみましょう。頂点を P として残像を残します。

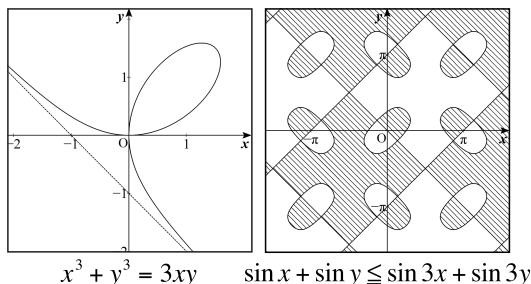
頂点 P も放物線を描くことがわかります。ぜひ

GRAPES で試してみてください。放物線のレールに乗って放物線が動いていく様子がわかります。



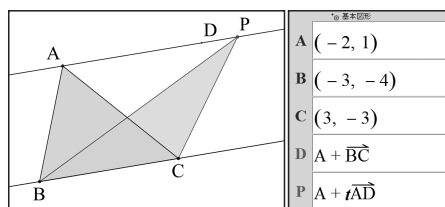
・陰関数の表示

ここまでは、 $y = f(x)$ の形の関数でしたが、GRAPES は、 $f(x, y) = 0$ の形の関数のグラフや、不等式の領域を描くこともできます。 $f(x, y)$ が満たすべき条件は連続であること、それだけです。方程式を解くことができないような関数でもグラフを表示することができます。関数式によっては思いもよらないような不思議な形が現れます。関数グラフの世界を探検してみませんか。



・平面幾何やベクトルへの利用

当初は関数のためのグラフツールとして出発した GRAPES ですが、その後の拡張でベクトル (⇒ 位置ベクトル ⇒ 点) をサポートし、平面図形での利用も可能になりました。ここでは、等積変形のシミュレーションを紹介しましょう。



点 A, B, C をマウスの右クリックを用いて、任意の位置にとり、三角形 ABC をつくります。ついで、底辺 BC の平行線をつくるために、平行四辺

形の頂点 D を、

$$D = A + \overline{BC}$$

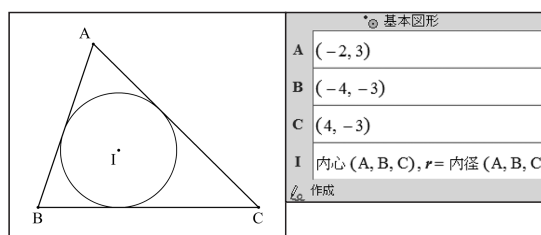
と定めます。これは、 $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC}$ と同義です。

2 点 A, D を直線で結び、

$$P = A + t\overline{AD}$$

とすれば、底辺 BC の平行線 AD 上を動く点 P ができます。少し工夫すれば、マウスのドラッグで直線上を動くようにもできます。この応用で、ベクトル方程式のシミュレーションもできます。

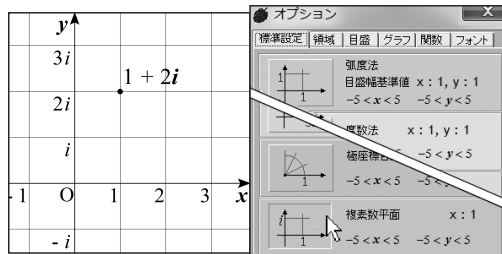
また、GRAPES には、点の座標 (位置ベクトル) を用いた関数がたくさんあり、三角形の五心や回転なども簡単に描くことができます。



・複素数平面への利用

新課程では複素数平面が 10 年ぶりに復活しました。実は、GRAPES は 10 年前から複素数を扱うことができたのですが、表舞台で使う場面がありませんでした。今回の指導要領の改訂でようやく日の目を見たわけです。

GRAPES で複素数平面を扱うためには、オプションウィンドウを表示し、[複素数平面] をクリックします。これによって、ベクトル (点) (a, b) は複素数 $a + bi$ として扱われます。



積・商・冪 (べき) 計算についても、複素数の計算に従います。例えば、 $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ のとき、

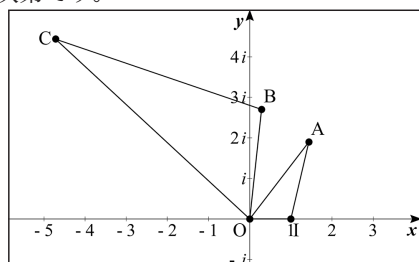
$$A \cdot B = (1 + 2i)(3 + 4i) = -5 + 10i = (-5, 10)$$

となります。また、オイラーの公式に基づいて、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ という計算もできます。

・複素数の積と相似

A, B は任意の点 (複素数), $I=(1, 0)$, $C = A \cdot B$ として, $\triangle OIA$ と $\triangle OBC$ を描いてみたのが次の図です。A, B はドラッグすることができます。生徒の前で自由に動かしてみましょう。

どのように動かしても 2 つの三角形は相似であることに気がつきます。不思議ですね。理屈よりも先に結果を見ることができるのが GRAPES のよいところです。これを授業のどこで使うかは先生次第です。

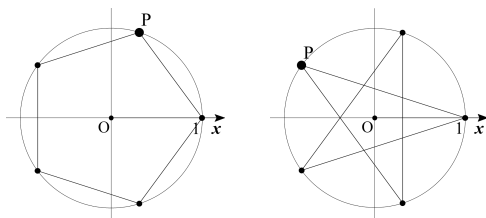


・ド・モアブルの定理

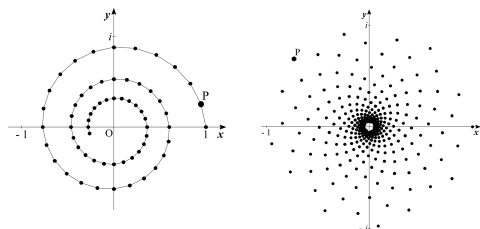
複素数の冪計算の不思議さと美しさを見せてくれるのが、ド・モアブルの定理です。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$P = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ として, P^n の点列を描いたのが下の左図です。正 5 角形ができます。ここで偏角を $\frac{4\pi}{5}$ とすれば, 下の右図の星形ができます。ちょっと楽しいですね。



では, 偏角や動径 (OP の長さ) をいろいろ変えるとどうなるのでしょうか。ここにも楽しい図形がたくさんありますが, 2 例だけ結果を示します。



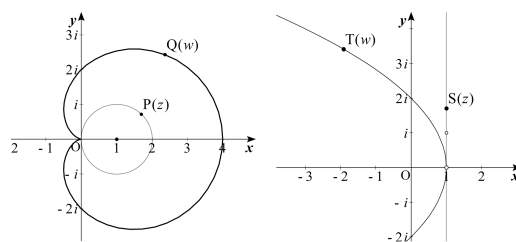
(サンプル「複素数平面 \mathbf{z}^n の点列」より)

他にもいろいろありますから, ぜひ試してみてください。

・複素数平面の変換と曲線

変換 $w = z^2$ によって与えられた図形がどのように変化するかを調べてみましょう。

円はカージオイドに, 直線は放物線に移ります。これらはいずれも複素数平面と同じ数学Ⅲの教科書の中にある素材です。



(サンプル「複素数平面 \mathbf{w}=\mathbf{z}^2」より)

・統計分野への利用

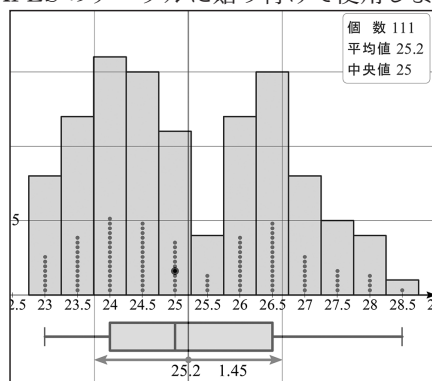
最後に統計分野への利用を紹介しましょう。数学Ⅰにデータの分析が入ってきました。ここでは, 高度な理論を教えるのではなく, データから様々な性質を読み取ることに重きが置かれています。しかしながら, 標準偏差や相関係数といった値の意味を理解し, データとそれらの量の関係を把握することも求められています。そこで, データの分布とこれらの量の関係を視覚化して, 直観的に捉えることができるようにいくつかのサンプルをつくってみました。

GRAPES を統計分野で利用するというのは, やや特異な使い方になります。今回作成したサンプルは (GRAPES の利用法としては高度な) スクリプトを用いたものです。が, 完成度は高いのでそのまま使っていただけたらと考えています。では, 代表的なものを紹介していきましょう。なお, 以下のサンプルファイルは, 「確率統計」フォルダに入っています。

・「データ to 度数分布」

生のデータをたくさん用意しても, 実施しようとしている授業にふさわしいものかどうかは, 調べてみないとわかりません。このソフトを使うと, データからヒストグラム, 箱ひげ図, 平均値, 標準偏差を素早く表示することができます。また,

分布表の階級幅を自由に変えることができます。
データの最大個数は 200 個で、Excel 等から GRAPES のテーブルに貼り付けて使用します。



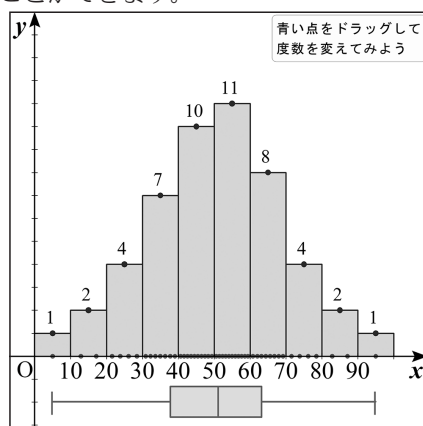
画面には、元のデータの分布、ヒストグラム、箱ひげ図、平均と標準偏差が表示され、パラメータ d の値を変更することで、階級幅を変えることができます。このほか、小さい方から何番目のデータがどんな値をとっているかを図で示すように工夫しています。中央値や四分位数の位置を確認するときに役立つでしょう。

・「度数分布と箱ひげ図」

ヒストグラムをもとに箱ひげ図を描きます。

マウスのドラッグで度数分布を変更することができ、箱ひげ図や平均値の変化をリアルタイムで確認することができます。

授業でよく使うような代表的な分布を例として用意していて、ワンタッチでこれらの分布を呼び出すことができます。



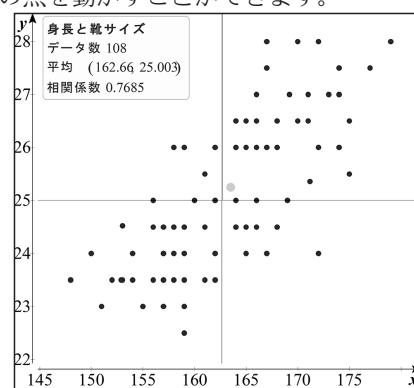
・「データ to 散布図」

データから散布図を描き、相関係数を表示します。また、散布図の個々の点をドラッグ操作で移

動し、データの移動による相関係数の変化をその場で確認することもできます。

データの最大個数は 200 個で、Excel 等から GRAPES のテーブルに貼り付けて、[データの処理] を実行すると、最適化された範囲に散布図が表示されます。画面中央の十字の直線は、平均の位置を示しています。

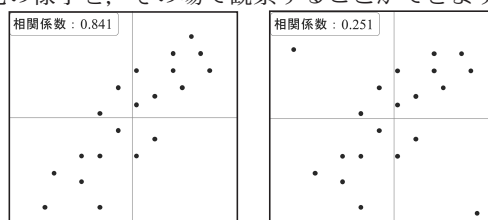
画面上には、マウスのドラッグで自由に動かすことができるキャリア（運び手）と呼ばれる点があります。これを用いて散布図のデータである個々の点を動かすことができます。



・散布図と相関係数

「データ to 散布図」のデータ数を 20 個以下に絞り、シミュレーション機能を強化したものです。

個々の点は、そのままドラッグして動かすことができるので、散布図の変化による相関係数の変化の様子を、その場で観察することができます。



上図は、2 個の点（データ）をドラッグした様子

・おわりに

GRAPES は、数学に携わる人たちのよき友となるようにと考えて開発を続けてきました。みなさまからの反響が開発の意欲へとつながります。
<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/>