５章　微分方程式

３節　２階微分方程式

A

148　c_1，c_2 は任意定数

⑴　$y'' = 2x$

$$y' = x^2 + c_1 \qquad y = \frac{1}{3}x^3 + c_1 x + c_2$$

⑵　$y'' = \dfrac{1}{x}$

$$y' = \log|x| + c_1$$

$$y = x\log|x| - x + c_1 x + c_2$$

⑶　$y'' = x\sin x$

$$y' = -x\cos x + \sin x + c_1$$

$$y = -x\sin x - \cos x - \cos x + c_1 x + c_2$$

$$y = -x\sin x - 2\cos x + c_1 x + c_2$$

149　c_1，c_2 は任意定数

⑴　$y'y'' - 1 = 0$

$y' = p$　とおくと　$y'' = p'$

$$pp' = 1$$

$$\int p\,dp = \int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}p^2 = x + c_1$$

$$p^2 = 2x + c_1$$

$$p = \pm\sqrt{2x + c_1}$$

$$\therefore \quad y = \pm\sqrt{2x + c_1}$$

したがって　$y = \pm\dfrac{1}{3}(2x + c_1)^{\frac{3}{2}} + c_2$

⑵　$y'' - (y')^2 = 1$

$y' = p$　とおくと　$y'' = p'$

$$p' - p^2 = 1$$

$$p' = 1 + p^2$$

$$\int \frac{1}{1 + p^2}\,dp = \int dx$$

$$\mathrm{Tan}^{-1}p = x + c_1$$

$$\therefore \quad p = \tan(x + c_1)$$

$$y' = \tan(x + c_1)$$

したがって

$$y = -\log|\cos(x + c_1)| + c_2$$

150　c_1，c_2 は任意定数

⑴　$(1-y)y''+(y')^2=0$

$y'=p$ とおくと $y''=\dfrac{dp}{dy}p$

$(1-y)\dfrac{dp}{dy}p+p^2=0$

$(1-y)\dfrac{dp}{dy}=-p$

$\displaystyle\int\frac{1}{p}\,dp=\int\frac{1}{y-1}\,dy$

$\log|p|=\log|y-1|+c_1$

$\dfrac{p}{y-1}=\pm e^{c_1}=c_1$

$p=c_1(y-1)$

$y'=c_1(y-1)$

$\displaystyle\int\frac{1}{y-1}\,dy=\int c_1\,dx$

$\log|y-1|=c_1x+c_2$

$y-1=\pm e^{c_1x+c_2}=c_2e^{c_1x}$

$\therefore\quad y=c_2e^{c_1x}+1$

⑵　$yy''+(y')^2=1$

$y'=p$ とおくと $y''=\dfrac{dp}{dy}p$

$y\dfrac{dp}{dy}p-p^2=1$

$y\dfrac{dp}{dy}=1+p$

$\displaystyle\int\frac{1}{1+p}\,dp=\int\frac{1}{y}\,dy$

$\log|1+p|=\log|y|+c_1$

$\dfrac{1+p}{y}=\pm e^{c_1}=c_1$

$p=c_1y-1$

$y'=c_1y-1$

$\displaystyle\int\frac{1}{c_1y-1}\,dy=\int dx$

$\dfrac{1}{c_1}\log|c_1y-1|=x+c_2$

$\therefore\quad c_1y-1=\pm e^{c_1x+c_1c_2}=c_2e^{c_1x}$

したがって　$y=\dfrac{c_2e^{c_1x}+1}{c_1}$

151

⑴ $W(x,\ x^3)=\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}=3x^3-x^3=2x^3\neq 0$　　∴　1 次独立である。

⑵ $W(e^x,\ 2e^x)=\begin{vmatrix} e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix}=2e^{2x}-2e^{2x}=0$　　∴　1 次独立ではない。

⑶ $W(e^x\cos x,\ e^x\cos 2x)=\begin{vmatrix} e^x\cos x & e^x\cos 2x \\ e^x\cos x-e^x\sin x & e^x\cos 2x-2e^x\sin 2x \end{vmatrix}$

$=e^{2x}\{\cos x(\cos 2x-2\sin 2x)-\cos 2x(\cos x-\sin x)\}\neq 0$　　∴　1 次独立である。

152

⑴ $(e^x)''=e^x$　より　$y''-y=e^x-e^x=0$

$(e^{-x})''=e^{-x}$　より　$y''-y=e^{-x}-e^{-x}=0$

また　$W(e^x,\ e^{-x})=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-e^0-e^0=-2\neq 0$

したがって，これらは $y''-y=0$ の 1 次独立な解である。

⑵ $y=-1,\ y''=0$　より　$y''-y=0-(-1)=1$　より

$y=-1$ は $y''-y'=1$ の解である。

⑶ ⑴，⑵より　$y=c_1e^x+c_2e^{-x}-1$　（c_1，c_2 は任意定数）

153

⑴ $y''+3y'+2y=0$

特性方程式

$\lambda^2+3\lambda+2=0$　より

$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

∴　$\lambda=-1,\ -2$

∴　$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$　（c_1，c_2 は任意定数）

⑵ $y''+4y'+4y=0$

特性方程式

$\lambda^2+4\lambda+4=0$　より

$(\lambda+2)^2=0$

∴　$\lambda=-2$

∴　$y=(c_1+c_2x)e^{-2x}$　（c_1，c_2 は任意定数）

⑶ $y''+9y=0$

特性方程式

$\lambda^2+9=0$　より

$\lambda=\pm 3i$

∴　$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$

（c_1，c_2 は任意定数）

⑷ $y''+y'+2y=0$

特性方程式

$\lambda^2+\lambda+2=0$　より

$\lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

∴　$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}x+c_2\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

（c_1，c_2 は任意定数）

154

⑴　$y'' + y' - 6y = 0$

特性方程式

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \therefore \lambda = -2,\ 3$$

$$\therefore\ y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$$

$x = 0,\ y = 2,\ y' = 1$ を代入して

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 1 = -2c_1 + 3c_2 \end{cases}$$ これより $c_1 = 1,\ c_2 = 1$

$$\therefore\ y = e^{-2x} + e^{3x}$$

⑵　$y'' - 2y' + y = 0$

特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \therefore\ \lambda = 1$$

$$\therefore\ y = (c_1 + c_2 x)e^x$$

$$y' = c_2 e^x + (c_1 + c_2 x)e^x$$

$x = 0,\ y = 1,\ y' = 2$ を代入して

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 2 = c_2 + c_1 \end{cases}$$ これより $c_1 = 1,\ c_2 = 1$

$$\therefore\ y = (1 + x)e^x$$

⑶　$2y'' + y' + 3y = 0$

特性方程式

$2\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$ より

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{4}$$

$$\therefore\ y = e^{-\frac{1}{4}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{23}}{4}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{23}}{4}x\right)$$

$$y' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{23}}{4}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{23}}{4}x\right) + e^{-\frac{1}{4}x}\left(-\frac{\sqrt{23}}{4}c_1 \sin\frac{\sqrt{23}}{4}x + \frac{\sqrt{23}}{4}c_2 \cos\frac{\sqrt{23}}{4}x\right)$$

$x = 0$ のとき $y = 0,\ y' = -2$ を代入

$$\begin{cases} 0 = c_1 \\ -2 = -\frac{1}{4}c_1 + \frac{\sqrt{23}}{4}c_2 \end{cases}$$ これより $c_1 = 0,\ c_2 = -\frac{8}{\sqrt{23}}$

$$\therefore\ y = -\frac{8}{\sqrt{23}}e^{-\frac{1}{4}x}\sin\frac{\sqrt{23}}{4}x$$

155　c_1，c_2 は任意定数

⑴　$y'' - 7y' + 12y = 2x$

特性方程式　$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0 \quad \lambda = 3, \ 4$

$\therefore \ y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$

1 つの解を　$y = Ax + B$ と予想　　$y' = A, \ y'' = 0$ を代入して

$-7A + 12Ax + 12B = 2x$

$\therefore \ 12A = 2, \quad -7A + 12B = 0$

$A = \dfrac{1}{6}$,　　$12B = 7A$

$B = \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{7}{72}$

$\therefore \ y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{72}$

したがって，$y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{72} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$

⑵　$y'' - 6y' + 10y = x^2 + 1$

特性方程式

$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$

$\therefore \ y = e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

1 つの解を　$y = Ax^2 + Bx + C$ と予想　　$y' = 2Ax + B, \ y'' = 2A$ を代入して

$2A - 12Ax - 6B + 10Ax^2 + 10Bx + 10C = x^2 + 1$

$10Ax^2 + (-12A + 10B)x + 2A - 6B + 10C = x^2 + 1$

$\begin{cases} 10A = 1 \\ -12A + 10B = 0 \\ 2A - 6B + 10C = 1 \end{cases}$ より　$A = \dfrac{1}{10}$，$B = \dfrac{3}{25}$，$C = \dfrac{13}{250}$

$\therefore \ y = \dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{3}{25}x + \dfrac{13}{250}$

したがって，$y = \dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{3}{25}x + \dfrac{13}{250} + e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

⑶　$y'' + 2y' - 8y = e^{x}$

特性方程式

$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0 \quad \therefore \ \lambda = 2, \ -4$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$

1 つの解を　$y = Ae^{x}$ と予想　　$y' = Ae^{x}$, $y'' = Ae^{x}$ を代入して

$Ae^{x} + 2Ae^{x} - 8Ae^{x} = e^{x}$

$-5A = 1 \quad A = -\dfrac{1}{5} \quad \therefore \ y = -\dfrac{1}{5}e^{x}$

したがって，　$y = -\dfrac{1}{5}e^{x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$

⑷　$y'' + 2y' + y = e^{-x}$

特性方程式

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \therefore \ \lambda = -1$

$\therefore \quad y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$

1 つの解を　$y = Ax^2 e^{-x}$ と予想

$y' = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}$

$y'' = 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}$

$\quad = 2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}$　を代入して

$2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x} + 4Axe^{-x} - 2Ax^2 e^{-x} + Ax^2 e^{-x} = e^{-x}$

$2A = 1 \quad \therefore \ A = \dfrac{1}{2}$

$\therefore y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-x}$

したがって，　$y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-x} + (c_1 + c_2 x)e^{-x}$

⑸ $y'' - 3y' - 4y = 2\cos x$

特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$(\lambda+1)(\lambda-4) = 0 \quad \therefore \quad \lambda = -1,\ 4$

$\therefore \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$

1 つの解を $y = A\cos x + B\sin x$ と予想

$y' = -A\sin x + B\cos x$

$y'' = -A\cos x - B\sin x$ を代入して

$-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x - 4A\cos x - 4B\sin x = 2\cos x$

$\begin{cases} -5A - 3B = 2 \\ -5B + 3A = 0 \end{cases}$ より $\begin{aligned} A &= -\dfrac{10}{34} = -\dfrac{5}{17} \\ B &= -\dfrac{6}{34} = -\dfrac{3}{17} \end{aligned}$

$y = -\dfrac{5}{17}\cos x - \dfrac{3}{17}\sin x$

したがって， $y = -\dfrac{5}{17}\cos x - \dfrac{3}{17}\sin x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$

⑹ $y'' + 4y = \sin 2x$

特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda = \pm 2i \qquad \therefore \quad y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

1 つの解を $y = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ と予想

$y' = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x)$

$y'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x)$ を代入して

$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$

$+ 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x$

$\begin{cases} -4A = 1 \\ 4B = 0 \end{cases} \qquad A = -\dfrac{1}{4},\ B = 0$

$\therefore \quad y = -\dfrac{1}{4}x\cos 2x$

したがって， $y = -\dfrac{1}{4}x\cos 2x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

156　c_1，c_2 は任意定数

(1)　$y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

特性方程式　$\lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm i \quad \therefore \quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$y_1 = \cos x$，$y_2 = \sin x$　とする

$$W(\cos x,\ \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

したがって　1 つの解は

$$y = -\cos x \int \frac{\sin x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{1}\, dx + \sin x \int \frac{\cos x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{1}\, dx$$

$$= -\cos x \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx + \sin x \int \frac{1}{\cos x}\, dx = -\cos x \left(\frac{1}{\cos x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|$$

$$= -1 + \sin x \cdot \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|$$

したがって

$$y = -1 + \frac{1}{2} \sin x \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

(2)　$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \log x$

特性方程式　$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda = 2 \quad \therefore \quad y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

$y_1 = e^{2x}$，$y_2 = xe^{2x}$　とすると

$$W(e^{2x},\ xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{x} = e^{4x}$$

したがって　1 つの解は

$$y = -e^{2x} \int \frac{xe^{2x} e^{2x} \log x}{e^{4x}}\, dx + xe^{2x} \int \frac{e^{2x} e^{2x} \log x}{e^{4x}}\, dx$$

$$= -e^{2x} \int x \cdot \log x\, dx + xe^{2x} \int \log x\, dx$$

$$= -e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x\, dx \right) + xe^{2x} (x \log x - x)$$

$$= -e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 \right) + xe^{2x} (x \log x - x)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} \log x - \frac{3}{4} x^2 e^{2x}$$

したがって　$y = \dfrac{1}{2} x^2 e^{2x} \log x - \dfrac{3}{4} x^2 e^{2x} + (c_1 + c_2 x) e^{2x}$

157

(1)　$xy'' - y' + (1 - x)y = 0$

$y = e^x$　　$y' = e^x$，$y'' = e^x$　より

$xy'' - y' + (1 - x)\,y = xe^x - e^x + (1 - x)\,e^x = 0$

したがって，$y = e^x$　は微分方程式を満たすので 1 つの解である。

(2)　(1)より

$y = ce^x$ も解である。

c と x の関数 u として　$y = ue^x$　とおく

$y' = u'e^x + ue^x$，$y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$

これらを代入して

$xu''e^x + 2xu'e^x + xue^x - u'e^x - ue^x + ue^x - xue^x = 0$

$xu'' + 2xu' - u' = 0$

$xu'' + (2x - 1)\,u' = 0$

$u' = p$　とおくと　$u'' = p'$

$xp' + (2x - 1)\,p = 0$

$$\int \frac{1}{p}\,dp = \int \frac{1 - 2x}{x}\,dx$$

$$\log|\,p\,| = \log|\,x\,| - 2x + c_1$$

$$p = c_1 xe^{-2x}$$

$$u' = c_1 xe^{-2x}$$

$$\therefore\ \ u = c_1\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) + c_2$$

したがって　$y = -\dfrac{c_1}{4}(2x + 1)\,e^{-x} + c_2 e^x$　　（c_1，c_2 は任意定数）

158　c_1，c_2は任意定数

⑴　$x^2y'' + xy' - y = 0$

$y = x^\lambda$　の形の解を予想

$y' = \lambda x^{\lambda-1}$　$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + \lambda x^\lambda - x^\lambda = 0$

$\lambda^2 - \lambda + \lambda - 1 = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$　$(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$

$\therefore$　$\lambda = -1,\ 1$

したがって　$y = x$と$y = x^{-1}$は解，これらは1次独立なので　$y = c_1x + c_2x^{-1}$

⑵　$x^2y'' + 3xy' + y = 0$

$y = x^\lambda$　の形の解を予想

$y' = \lambda x^{\lambda-1}$，$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 3\lambda x^\lambda + x^\lambda = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0$　$\lambda = -1$

したがって　$y = x^{-1}$は解である。また$y = cx^{-1}$も解である。

cをxの関数uとして　$y = ux^{-1}$　とおく。

$y' = u'x^{-1} - ux^{-2}$

$y'' = u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-3}$　を代入して

$u''x - 2u' + 2u^{x-1} + 3u' - 3ux^{-1} + ux^{-1} = 0$

$u''x + u' = 0$　より　$(u'x)' = 0$

$\therefore$　$u'x = c_1$　$u' = \dfrac{c_1}{x}$　$\therefore$　$u = c_1\log|x| + c_2$

よって，$y = x^{-1}(c_1\log|x| + c_2)$

159　c_1，c_2 は任意定数

(1)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t & \cdots① \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t & \cdots② \end{cases}$$

①の両辺を t で微分すると　$x'' = y' + 1$

②をこれに代入して　$x'' = x + t + 1$

$x'' - x = t + 1$

特性方程式　$\lambda^2 - 1 = 0$　　$\lambda = \pm 1$

$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}$

1 つの解を　$x = At + B$ と予想　　$x' = A$，$x'' = 0$ より

$-At - B = t + 1$

$A = -1$，$B = -1$

$\therefore\ x = -t - 1$

$\therefore\ x = -t - 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}$

①より　$y = x' - t$

$= -1 - c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} - t$

したがって
$$\begin{cases} x = -t - 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \\ y = -t - 1 - c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + e^t & \cdots① \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - e^t & \cdots② \end{cases}$

①の両辺を t で微分　$x'' = 3x' + y' + e^t$

②を代入して　$x'' = 3x' - x + y - e^t + e^t$

$= 3x' - x + y$

①より　$y = x' - 3x - e'$　なので

$x'' = 3x' - x + x' - 3x - e^t$　より　$x'' - 4x' + 4x = -e^t$

特性方程式

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$　$\lambda = 2$　$\therefore$　$x = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$

1 つの解を　$x = Ae^t$ と予想　$x' = Ae^t$，$x'' = Ae^t$

$Ae^t - 4Ae^t + 4Ae^t = -e^t$

$A = -1$　$\therefore$　$x = -e^t$

$\therefore$　$x = -e^t + (c_1 + c_2 t)e^{2t}$

$y = x' - 3x - e^t$

$= -e^t + c_2 e^{2t} + 2(c_1 + c_2 t)e^{2t} + 3e^t - 3(c_1 + c_2 t)e^{2t} - e^t$

$= e^t + c_2 e^{2t} - (c_1 + c_2 t)e^{2t} = e^t - (c_1 - c_2 + c_2 t)e^{2t}$

したがって　$\begin{cases} x = -e^t + (c_1 + c_2 t)e^{2t} \\ y = e^t - (c_1 - c_2 + c_2 t)e^{2t} \end{cases}$

B

160　c_1，c_2 は任意定数

⑴　$y'' - 2y' - 3y = e^x \cos x$

特性方程式，　$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 3,\ -1$

$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

1 つの解を　$y = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$ と予想する

$y' = Ae^x \cos x - Ae^x \sin x + Be^x \sin x + Be^x \cos x$

$y'' = Ae^x \cos x - 2Ae^x \sin x - Ae^x \cos x$

$\quad + Be^x \sin x + 2Be^x \cos x - Be^x \sin x$

$= -2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x$

これらを微分方程式に代入して

$-2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x - 2Ae^x \cos x + 2Ae^x \sin x$

$\quad - 2Be^x \sin x - 2Be^x \cos x - 3Ae^x \cos x - 3Be^x \sin x$

$= e^x \cos x$

$\begin{cases} -2A + 2A - 2B - 3B = 0 \\ 2B - 2A - 2B - 3A = 1 \end{cases}$ より　$A = -\dfrac{1}{5}$　$B = 0$

$\therefore \quad y = -\dfrac{1}{5} e^x \cos x$

したがって　$y = -\dfrac{1}{5} e^x \cos x + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

⑵　$y'' - 2y' + y = x \sin x$

特性方程式

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda = 1 \quad \therefore \quad y = (c_1 + c_2 x) e^x$

1 つの解を　$y = x(A\sin x + B\cos x) + C\sin x + D\cos x$ と予想する。

$y' = A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x) + C\cos x - D\sin x$

$y'' = 2A\cos x - 2B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x) - C\sin x - D\cos x$

これらを微分方程式に代入して

$2A\cos x - 2B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x) - C\sin x - D\cos x$

$- 2A\sin x - 2B\cos x - 2x(A\cos x - B\sin x) - 2C\cos x + 2D\sin x$

$+ x(A\sin x + B\cos x) + C\sin x + D\cos x = x\sin x$

$\begin{cases} 2A - 2B - 2C = 0 \\ -2B - 2A + 2D = 0 \\ -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$ より　$A = 0,\ B\dfrac{1}{2}$　$C = -\dfrac{1}{2},\ D = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad y = \dfrac{1}{2} x\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$

したがって　$y = \dfrac{1}{2} x\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x + (c_1 + c_2 x) e^x$

⑶　$y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}\cos x$

特性方程式

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 1,\ 2 \qquad y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

1つの解を　$y = Ax + B + Ce^{2x}\cos x + De^{2x}\sin x$ と予想する。

$$y' = A + 2Ce^{2x}\cos x - Ce^{2x}\sin x + 2De^{2x}\sin x + De^{2x}\cos x$$

$$y'' = 4Ce^{2x}\cos x - 2Ce^{2x}\sin x - 2Ce^{2x}\sin x - Ce^{2x}\cos x$$
$$+ 4De^{2x}\sin x + 2De^{2x}\cos x + 2De^{2x}\cos x - De^{2x}\sin x$$

これらを微分方程式に代入すると

$$3Ce^{2x}\cos x - 4Ce^{2x}\sin x + 3De^{2x}\sin x + 4De^{2x}\cos x$$
$$- 3A - 6Ce^{2x}\cos x + 3Ce^{2x}\sin x - 6De^{2x}\sin x - 3De^{2x}\cos x$$
$$+ 2Ax + 2B + 2Ce^{2x}\cos x + 2De^{2x}\sin x = x + e^{2x}\cos x$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -3A + 2B = 0 \\ 3C + 4D - 6C - 3D + 2C = 1 \\ -4C + 3D + 3C - 6D + 2D = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \\ B &= \frac{3}{4} \\ C &= -\frac{1}{2} \\ D &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}e^{2x}\sin x$$

したがって　$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}e^{2x}\sin x + c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

161

(1) $y'' - 2y' + 2y = x^2$

特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4}i}{2} = 1 \pm i$$

$$\therefore \quad y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

1 つの解を $y = Ax^2 + Bx + C$ と予想

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

これらを微分方程式に代入して

$$2A - 4Ax - 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -4A + 2B = 0 \\ 2A - 2B + 2C = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \\ B &= 1 \\ C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} + e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

$$y' = x + 1 + e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^x(-c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

$x = 0 \quad y = \frac{1}{2} \quad y' = \frac{1}{2}$ を代入して

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_1 \\ \frac{1}{2} = 1 + c_1 + c_2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^x \sin x$$

⑵　$y'' - 5y' + 6y = e^{x} + e^{2x}$

特性方程式　$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \therefore \ \lambda = 2, \ 3$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

1 つの解を　$y = Ae^{x} + Bxe^{2x}$ と予想する

$y' = Ae^{x} + Be^{2x} + 2Bxe^{2x}$

$y'' = Ae^{x} + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$

これらを微分方程式に代入して

$Ae^{x} + 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} - 5Ae^{x} - 5Be^{2x} - 10Bxe^{2x}$

$+ 6Ae^{x} + 6Bxe^{2x} = e^{x} + e^{2x}$

$\begin{cases} 2A = 1 \\ -B = 1 \end{cases}$ より　$A = \dfrac{1}{2}$，$B = -1$

$\therefore \quad y = \dfrac{1}{2}e^{x} - xe^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

$y' = \dfrac{1}{2}e^{x} - e^{2x} - 2xe^{2x} + 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$

$x = 0 \quad y = -1 \quad y' = 1$ を代入して

$\begin{cases} -1 = \dfrac{1}{2} + c_1 + c_2 \\ 1 = \dfrac{1}{2} - 1 + 2c_1 + 3c_2 \end{cases}$ より　$c_1 = -6$，$c_2 = \dfrac{9}{2}$

したがって　$y = \dfrac{1}{2}e^{x} - xe^{2x} - 6e^{2x} + \dfrac{9}{2}e^{3x}$

(3)　$y'' + y' - 6y = x + \sin x$

特性方程式　$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \quad \therefore \ \lambda = 2, \ -3$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$

1 つの解を　$y = Ax + B + C\sin x + D\cos x$

$y' = A + C\cos x - D\sin x$

$y'' = -C\sin x - D\cos x$

微分方程式に代入して

$-C\sin x - D\cos x + A + C\cos x - D\sin x$

$\quad - 6Ax - 6B - 6C\sin x - 6D\cos x = x + \sin x$

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ A - 6B = 0 \\ -C - D - 6C = 1 \\ -D + C - 6D = 0 \end{cases} \text{より} \quad A = -\frac{1}{6} \quad B = -\frac{1}{36} \quad C = -\frac{7}{50} \quad D = -\frac{1}{50}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{36} - \frac{7}{50}\sin x - \frac{1}{50}\cos x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

$$y' = -\frac{1}{6} - \frac{7}{50}\cos x + \frac{1}{50}\sin x + 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$x = 0 \quad y = 0 \quad y' = 0$ を代入して

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{36} - \dfrac{1}{50} + c_1 + c_2 \\ 1 = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{7}{50} + 2c_1 - 3c_2 \end{cases} \text{より} \quad c_1 = \frac{29}{100} \quad c_2 = -\frac{109}{450}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{36} - \frac{7}{50}\sin x - \frac{1}{50}\cos x + \frac{29}{100}e^{2x} - \frac{109}{450}e^{-3x}$$

162　$y'' + 2y' + ay = 0$　　（$a > 1$）

⑴　特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda + a = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{a-1}\, i$$

$$\therefore \quad y = e^{-x}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{a-1}\, x\right) + c_2\left(\sin\sqrt{a-1}\, x\right)\right)$$　（c_1，c_2 は任意定数）

⑵　$y' = -e^{-x}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{a-1}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{a-1}\, x\right)\right)$

$+\, e^{-x}\left(-\sqrt{a-1}\, c_1 \sin\left(\sqrt{a-1}\, x\right) + \sqrt{a-1}\, c_2 \cos\left(\sqrt{a-1}\, x\right)\right)$

$y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$　より

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ -1 = -c_1 + \sqrt{a-1}\, c_2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{array}$$

したがって　$y = e^{-x}\cos\left(\sqrt{a-1}\, x\right)$

⑶　$y(\pi) = 0$ より

$$0 = \cos\left(\sqrt{a-1}\, \pi\right)$$

したがって　$\sqrt{a-1}\, \pi = \dfrac{\pi}{2} + n\pi = \dfrac{2n+1}{2}\pi$　（n は整数）

よって　$a = \dfrac{(2n+1)^2}{4} + 1$　（n は整数）

163

(1)　$\alpha = 0$ より

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y & ① \\ \dfrac{dy}{dt} = x & ② \end{cases}$$

①の両辺を t で微分すると　$x'' = -y'$

②を代入して　$x'' = -x$

特性方程式　$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$

$\therefore\ x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

①より　$y = -x'$

$= -(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$

$= c_1 \sin t - c_2 \cos t$

$x(0) = 1,\ \ y(0) = 1$ より

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 1 = -c_2 \end{cases}$$

したがって　$\begin{cases} x(t) = \cos t - \sin t \\ y(t) = \sin t + \cos t \end{cases}$

(2)　$\alpha \neq 0$ より

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y & \cdots ① \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \alpha y & \cdots ② \end{cases}$$

①の両辺を t で微分すると　$x'' = \alpha x' - y'$

①，②を代入して　$x'' = \alpha(\alpha x - y) - (x + \alpha y)$

$$= \alpha^2 x - \alpha y - x - \alpha y$$

$$= (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha y$$

①より　$y = \alpha x - x'$ であるので

$$x'' = (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha(\alpha x - x')$$

$$= (\alpha^2 - 1)x - 2\alpha^2 x + 2\alpha x'$$

$$x'' - 2\alpha x' + (1 + \alpha^2)x = 0$$

特性方程式　$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (1 + \alpha^2) = 0$

$$\lambda = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(1 + \alpha^2)}}{2} = \alpha \pm i$$

$$\therefore \quad x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

$$y = \alpha\{e^{\alpha t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)\} - \{\alpha e^{\alpha t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$
$$+ e^{\alpha}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)\}$$

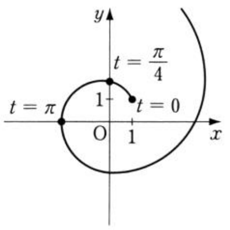
$$= -e^{\alpha t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

$x(0) = 1,\ \ y(0) = 1$ より

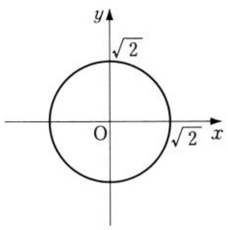
$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 1 = -c_2 \end{cases}$$

したがって　$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(\cos t - \sin t) \\ y(t) = e^{\alpha t}(\sin t + \cos t) \end{cases}$

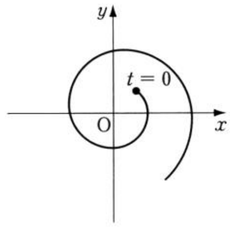
(3)　$\alpha > 0$ のとき



$\alpha = 0$ のとき



$\alpha < 0$ のとき



164

⑴ $x^2y'' + 2xy' + 5y = 0$

$x = e^t$ とすると $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

特性方程式

$\lambda^2 + \lambda + 5 = 0$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-20}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2}$$

$$\therefore \quad y = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{19}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{19}}{2}t\right)$$

$$y = x^{-\frac{1}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\log x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\log x\right)\right)$$ （c_1, c_2 は任意定数）

⑵ $x^2y'' - 4xy' + 4y = \log x$

$x = e^t$ とすると $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = t$

特性方程式

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \quad \lambda = 1,\ 4$

$\therefore \quad y = c_1e^t + c_2e^{4y}$

1 つの解を $y = At + B$ と予想

$\dfrac{dy}{dt} = A$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$ を代入して

$-5A + 4At + 4B = t$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ -5A + 4B = 0 \end{cases} \text{ より } \quad A = \frac{1}{4},\quad B = \frac{5}{16}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}$$

したがって $y = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{5}{16} + c_1e^t + c_2e^{4t}$

$$y = \frac{1}{4}\log x + \frac{5}{16} + c_1x + c_2x^4$$ （c_1, c_2 は任意定数）

165

⑴　$y = e^x$　$y' = e^x$　$y'' = e^x$　より

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = e^x - \frac{x}{x-1}e^x + \frac{1}{x-1}e^x$$

$$= \left(1 - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)e^x = \left(\frac{x-1-x+1}{x-1}\right)e^x = 0$$

となるので，$y = e^x$ は同次方程式の解である。

⑵ $y = ue^x$ とおく

$y' = u'e^x + ue^x$, $y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$ より

$$e^x u'' + \frac{x-2}{x-1} e^x u' = x-1$$

$u' = v$ とおくと $u'' = v'$

$$e^x v' + \frac{x-2}{x-1} e^x v = x-1$$

$$v' + \frac{x-2}{x-1} v = e^{-x}(x-1)$$

同次方程式 $v' + \dfrac{x-2}{x-1} v = 0$

$$v' = -\frac{x-2}{x-1} v$$

$$\int \frac{1}{v} dv = -\int \frac{x-2}{x-1} dx$$

$$\log|v| = -(x-1-\log|x-1|) + c$$

$$= -x + 1 + \log|x-1| + c$$

$$\frac{v}{x-1} = \pm e^{c_1 - x} = ce^{-x}$$

$$v = c(x-1)e^{-x}$$

c を x の関数 $c(x)$ として $v = c(x)(x-1)e^{-x}$

$v' = c'(x)(x-1)e^{-x} + c(x)(2e^{-x} - xe^{-x})$ より

$$c'(x)(x-1)e^{-x} + c(x)(2e^{-x} - xe^{-x})$$

$$+ \frac{x-2}{x-1} c(x)(x-1)e^{-x} = e^{-x}(x-1)$$

$\therefore$ $c'(x)(x-1)e^{-x} = e^{-x}(x-1)$

$$c'(x) = 1$$

したがって $c(x) = x + c_1$

$\therefore$ $v = (x+c_1)(x-1)e^{-x}$

$$u' = (x+c_1)(x-1)e^{-x}$$

$$u = \int (x^2 + (c_1-1)x - c_1)e^{-x} dx + c_2$$

$$= -(x^2 + (c_1-1)x - c_1)e^{-x} + \int (2x + c_1 - 1)e^{-x} dx + c_2$$

$$= -(x^2 + (c_1-1)x - c_1)e^{-x} + \left(-(2x + c_1 - 1)e^{-x} + \int 2e^{-x} dx\right) + c_2$$

$$= -(x^2 + (c_1-1)x - c_1)e^{-x} - (2x + c_1 - 1)e^{-x} - 2e^{-x} + c_2$$

$$= -(x^2 + (c_1+1)x + 1)e^{-x} + c_2$$

したがって $y = -(x^2 + (c_1+1)x + 1) + c_2 e^x$ （c_1, c_2 は任意定数）

166　c_1，c_2は任意定数

(1)　$t = \int e^{-\int dx}\, dx = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$

∴　$t = -e^{-x}$と変換すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)\frac{dy}{dt} + e^{-x} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -e^{-x} \frac{dy}{dt} + e^{-x} \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= -e^{-x} \frac{dy}{dt} + e^{-2x} \frac{d^2y}{dt^2}$$

微分方程式に代入して

$$-e^{-x} \frac{dy}{dt} + e^{-2x} \frac{d^2y}{dt^2} + e^{-x} \frac{dy}{dt} + e^{-2x} y = 0$$

$$e^{-2x} \frac{d^2y}{dt^2} + e^{-2x} y = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

特性方程式　$\lambda^2 + 1 = 0$　∴　$\lambda = \pm i$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

ここに　$t = -e^{-x}$を代入して

$$y = c_1 \cos e^{-x} - c_2 \sin e^{-x}$$

(2)

$$t=\int e^{-\int \frac{1}{\tan x}dx}\,dx$$

$$=\int e^{\log|\sin x|}\,dx=\int \sin x\,dx=-\cos x$$

$\therefore\ t=-\cos x$ を変換すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\sin x\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\sin x)\frac{dy}{dt}+\sin x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\cos x\frac{dy}{dt}+\sin x\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\cos x\frac{dy}{dt}+\sin^2 x\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを微分方程式に代入して

$$\cos x\frac{dy}{dt}+\sin^2 x\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{\tan x}\left(\sin x\frac{dy}{dt}\right)+\sin^2 xy=x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=-t$$

特性方程式　$\lambda^2+1=0$　$\therefore\ \lambda=\pm i$

$$y=c_1\cos t+c_2\sin t$$

1つの解を　$y=At+B$ と予想

$$\frac{dy}{dt}=A,\ \frac{d^2y}{dt^2}=0$$　より　$At+B=-t$　　$\therefore$　$A=-1,\ B=0$

$$y=-t$$

したがって　$y=-t+c_1\cos t+c_2\sin t$

$$=\cos x+c_1\cos(-\cos x)+c_2\sin(-\cos x)$$

ゆえに　$y=\cos x+c_1\cos(\cos x)-c_2\sin(\cos x)$

167

(1) $y'' - 6y' + 5y = e^{-x}$ $\quad (D^2 - 6D + 5)y = e^{-x}$

$$y = \frac{1}{D^2 - 6D + 5} e^{-x} = \frac{1}{(-1)^2 - 6(-1) + 5} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{1 + 6 + 5} e^{-x} = \frac{1}{12} e^{-x}$$

(2) $y'' - 2y' + y = xe^x$ $\quad (D^2 - 2D + 1)y = xe^x$

$$y = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} xe^x = \frac{1}{(D-1)^2} xe^x$$

$$= e^x \frac{1}{((D-1)-1)^2} (e^{-x} xe^x)$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} x = e^x \frac{1}{D}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = e^x \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{6} x^3 e^x$$

(3) $y'' - 4y = \sin 2x$

$(D^2 - 4)y = \sin 2x$

$$\frac{1}{D^2 - 4} e^{2ix} = \frac{1}{(2i)^2 - 4} e^{2ix} = \frac{1}{-8}(\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{i}{8}\sin 2x$$

したがって $\quad y = \dfrac{1}{D^2 - 4}\sin 2x = -\dfrac{1}{8}\sin 2x$

(4) $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 1$

$(D^2 - 2D - 3)y = x^2 + 1$

$$y = \frac{1}{D^2 - 2D - 3}(x^2 + 1) = \frac{1}{(D-3)(D+1)}(x^2 + 1)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{D+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}D}(x^2 + 1) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+D}\left(1 + \frac{1}{3}D + \frac{1}{9}D^2 + \cdots\right)(x^2 + 1)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+D}\left(x^2 + 1 + \frac{1}{3}D(x^2 + 1) + \frac{1}{9}D^2(x^2 + 1)\right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+D}\left(x^2 + 1 + \frac{1}{3}(2x) + \frac{1}{9} \cdot 2\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(1 - D + D^2 + \cdots)\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9} - D\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right) + D^2\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9} - \left(2x + \frac{2}{3}\right) + 2\right) = -\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{23}{27}$$