１章　微分法

３節　テイラーの定理とその応用

A

32

⑴　$f(x)=\sqrt[4]{x}$　より

$$\sqrt[4]{x} \fallingdotseq \sqrt[4]{a}+\frac{1}{4\times\sqrt[4]{a^3}}(x-a)$$

⑵　$f(x)=\sin x$　より

$$\sin x \fallingdotseq \sin a+(x-a)\cos a$$

⑶　$f(x)=\cos x$　より

$$\cos x \fallingdotseq \cos a-(x-a)\sin a$$

33

⑴　$f(x)=\sqrt{x}$　とすると　$f(x) \fallingdotseq \sqrt{a}+\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$　より

$$\sqrt{4.1} \fallingdotseq \sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}(4.1-4)$$

$$=2+\frac{1}{4}\times 0.1$$

$$=2.025 \qquad (\sqrt{4.1}=2.024845673\cdots)$$

⑵　$f(x)=\sqrt[4]{x}$　とすると　$f(x) \fallingdotseq \sqrt[4]{a}+\dfrac{1}{4\times\sqrt[4]{a^3}}(x-a)$　より

$$\sqrt[4]{16.1} \fallingdotseq \sqrt[4]{16}+\frac{1}{4\times\sqrt[4]{16^3}}(16.1-16)$$

$$=2+\frac{1}{32}\times 0.1$$

$$=2.003125 \qquad (\sqrt[4]{16.1}=2.00311770\cdots)$$

⑶　$f(x)=\log x$　とすると　$f(x) \fallingdotseq \log a+(x-a)\times\dfrac{1}{a}$　より

$$\log(1.1) \fallingdotseq \log 1+(1.1-1)\times\frac{1}{1}$$

$$=0+0.1$$

$$=0.1 \qquad (\log(1.1)=0.09531\cdots)$$

34

⑴ $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ において

$$f(x)\fallingdotseq \frac{1}{1+a}-\frac{1\times(x-a)}{(1+a)^2}+\frac{1}{2}\times 2\cdot\frac{1}{(1+a)^3}(x-a)^2$$ より

$$f(x)\fallingdotseq 1-1\times x+x^2$$

$$f(x)=1-x+x^2$$

⑵ $$\frac{1}{1.05}\fallingdotseq\frac{1}{1+0}-\frac{1}{(1+0)^2}(0.05-0)+\frac{1}{(1+0)^3}(0.05-0)^2$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{1^2}\times 0.05+\frac{1}{1^3}\times 0.05^2$$

$$=0.9525$$

35

⑴ $x=1$ のまわりなので　$f(x)\fallingdotseq \log a+\dfrac{1}{a}(x-a)-\dfrac{1}{2!a^2}(x-a)^2$　より

$$f(x)\fallingdotseq 0+\frac{1}{1}(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$$

$$\therefore\quad f(x)\fallingdotseq x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2$$

⑵ $f(x)=(1+x)^r\quad(r>0)$ とすると

$$f(x)\fallingdotseq(1+a)^r+r(1+a)^{r-1}\times(x-a)+\frac{1}{2!}\times r(r-1)(1+a)^{r-2}\times(x-a)^2$$ より

$$f(x)\fallingdotseq(1+1)^r+r(1+1)^{r-1}(x-1)+\frac{r(r-1)(1+1)^{r-2}}{2!}\times(x-1)^2$$

$$=2^r+2^{r-1}r(x-1)+\frac{2^{r-2}r(r-1)}{2!}(x-1)^2$$

$$\therefore\quad f(x)\fallingdotseq 2^r+2^{r-1}r(x-1)+2^{r-3}r(r-1)(x-1)^2$$

⑶ $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$

$$f(x)\fallingdotseq\sqrt[3]{1+a}+\frac{1}{3\times\sqrt[3]{(1+a)^2}}(x-a)-\frac{1}{2!}\times\frac{2}{9\times\sqrt[3]{(1+a)^5}}(x-a)^2$$ より

$$f(x)\fallingdotseq\sqrt[3]{1+1}+\frac{1}{3\times\sqrt[3]{(1+1)^2}}(x-1)-\frac{2}{2!\times 9\times\sqrt[3]{(1+1)^5}}(x-1)^2$$

$$=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}(x-1)-\frac{1}{2\times 9\times\sqrt[3]{4}}(x-1)^2$$

$$\therefore\quad f(x)\fallingdotseq\sqrt[3]{2}+\frac{1}{3\times\sqrt[3]{4}}(x-1)-\frac{1}{18\times\sqrt[3]{4}}(x-1)^2$$

36

⑴ $f(x)=x^2+4x-5$

$f'(x)=2x+4$

$f'(x)=0$ のとき $x=-2$

$f''(x)=2$

よって， $x=-2$ のとき $f''(-2)=2>0$, $f(-2)=-9$

$x=-2$ のとき極小値 -9 をとる

⑵ $f(x)=x^3-3x+7$

$f'(x)=3x^2-3$

$f''(x)=6x$

$f'(x)=0$ のとき $x=\pm1$

$x=1$ のとき $f''(1)=6>0$, $f(1)=5$

$x=-1$ のとき $f''(-1)=-6<0$, $f(-1)=9$

よって， $x=1$ のとき極小値 5

$x=-1$ のとき極大値 9 をとる

⑶ $f(x)=e^{x^2}$

$f'(x)=2xe^{x^2}$

$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$

$f'(x)=0$ のとき $x=0$

$x=0$ のとき， $f''(0)=2>0$, $f(0)=1$ なので

$x=0$ のとき極小値 1 をとる

⑷ $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\log x}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{x}\times x^2-(1-\log x)\times 2x}{x^4}=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

$f'(x)=0$ となるのは $x=e$

$x=e$ のとき， $f''(e)=\dfrac{-1}{e^3}<0$, $f(e)=\dfrac{1}{e}$ なので

$x=e$ のとき極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる

⑸　$f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x^3+1)^2}\times 3x^2$

$f'(x)=0$ となるのは　$x=0$

$f''(x)=\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$

$x=0$ のとき，$f''(0)=0$，$f'''(0)\fallingdotseq 0$　より極値をもたない

⑹　$f(x)=x+2\cos x$

$f'(x)=1-2\sin x$

$f''(x)=-2\cos x$

$f'(x)=0$ となるのは　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$　$(0\leqq x<2\pi)$

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0,\quad f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$,

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき　$f''\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=-2\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}>0,\quad f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき極大値　$\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき極小値　$\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$ をとる

37

⑴　$f(x)=e^{-2x}$

$f'(x)=-2e^{-2x}$

$f''(x)=4e^{-2x}$

$f''(1)=4e^{-2}>0$

よって　$f(x)$ は $x=1$　において下に凸

⑵　$f(x)=x\sqrt{x+3}$

$f'(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+3}}$

$f''(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}+\dfrac{x+6}{4(x+3)\sqrt{x+3}}$

$f''(1)=\dfrac{15}{32}>0$

よって $f(x)$ は $x=1$ において下に凸

38

(1) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 5$

$f'(x) = 6x^2 + 18x$

$f''(x) = 12x + 18$

$f''(x) < 0$ すなわち $x < -\dfrac{3}{2}$ のとき $f(x)$ は上に凸

$f''(x) > 0$ すなわち $x > -\dfrac{3}{2}$ のとき $f(x)$ は下に凸

(2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(x) < 0$ すなわち $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(x)$は上に凸

$f''(x) > 0$ すなわち $x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x$ のとき $f(x)$は下に凸

39

(1) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, $f^{(4)}(x) = e^x$

$$e^x = e^1 + (x-1)e^1 + \frac{(x-1)^2}{2!}e^1 + \cdots\cdots + \frac{(x-1)^n}{n!}e^1$$

$$= e + (x-1)e + \frac{(x-1)^2 e}{2!} + \cdots\cdots + \frac{(x-1)^n}{n!}e$$

(2) $f(x) = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$f'''(x) = -6x^{-4}$

$f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$

$$f(x) = \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{1^2}\right)(x-1) + \left(\frac{2}{1^3}\right)\frac{(x-1)^2}{2!} + \left(-\frac{6}{1^4}\right)\frac{(x-1)^3}{3!}$$

$$+ \frac{24}{1^5}\frac{(x-1)^4}{4!} + \cdots + \frac{n!}{1^{n+1}} \times \frac{(x-1)^n}{n!}$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}(x-1)^n$$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},\quad f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}$$

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{5}{81}(x-1)^3-\frac{10}{243}(x-1)^4+\cdots\cdots$$

40

(1) $f(x)=\log(1+x)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

よって $\log(1+x)=\log 1+\frac{1}{1}\times x+\frac{-1}{1^2}\times\frac{x^2}{2!}+\frac{2}{1^3}\times\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

(2) $f(x)=\tan x$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\quad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},\quad f'''(x)=\frac{2(2\sin^2 x+1)}{\cos^4 x}$$

よって $\tan x=\tan 0+\frac{1}{\cos^2 0}x+\frac{2\sin 0}{\cos^3 0}\times\frac{x^2}{2!}+\frac{2(2\sin^2 0+1)}{\cos^4 0}\times\frac{x^3}{3!}+\cdots$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots$$

(3) $f(x)=e^{x^2}$

$$f'(x)=2xe^{x^2},\quad f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2},\quad f'''(x)=12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2},$$

$$f^{(4)}(x)=12e^{x^2}+48x^2e^{x^2}+16x^4e^{x^2}$$

$$e^{x^2}=e^{0^2}+2\times 0\times e^{0^2}\times x+\left(2e^{0^2}+4\times 0^2\times e^{0^2}\right)\times\frac{x^2}{2!}$$

$$+\left(12\times 0\times e^{0^2}+8\times 0^3\times e^{0^2}\right)\times\frac{x^3}{3!}$$

$$+\left(12e^{0^2}+48\times 0^2\times e^{0^2}+16\times 0^4\times e^{0^2}\right)\times\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$=1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots$$

(4) $y = \sin^{-1} x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \frac{-x}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}, \quad y''' = \frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}^{-1}x &= \mathrm{Sin}^{-1}0 + \frac{1}{\sqrt{1-0^2}}x + \frac{-0}{(0^2-1)\sqrt{1-0^2}} \times \frac{x^2}{2!} + \frac{2\times 0^2+1}{(0^2-1)^2\sqrt{1-0^2}} \times \frac{x^3}{3!} \\ &\quad + \frac{-3\times 0\times(2\times 0^2+3)}{(0^2-1)^3\sqrt{1-0^2}} \times \frac{x^4}{4!} + \frac{24\times 0^4+72\times 0^2+9}{(0^2-1)^4\sqrt{1-0^2}} \times \frac{x^5}{5!} + \cdots \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{9}{5!}x^5 + \cdots\end{aligned}$$