

5 章の問題

1 c は任意定数

$$(1) \quad x^3 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = - \int \frac{1}{x^3} dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} + c = \frac{1+2cx^2}{2x^2}$$

$$y = -\frac{2x^2}{1+cx^2}$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$$

$$u = \frac{y}{x} \text{ とおくと } y = ux, \quad y' = u'x + u \quad \text{より}$$

$$u'x + u = 1 + u$$

$$u'x = 1$$

$$\int du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$u = \log|x| + c$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \log|x| + c$$

$$\therefore y = x(\log|x| + c)$$

$$(3) \quad x \frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\log|y| = -\log|x| + c$$

$$|yx| = e^c = c$$

$$y = \frac{c}{x}$$

c を x の関数 u として

$$y = \frac{u}{x}, \quad y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \quad \text{より}$$

$$x \left(\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \right) + \frac{u}{x} = \sin x$$

$$u' = \sin x$$

$$u = -\cos x + c$$

$$\text{したがって } y = -\frac{1}{x} \cos x + \frac{c}{x}$$

$$(4) \quad (1+x^2) \frac{dy}{dx} = xy + 1$$

$$(1+x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\log|y| = \frac{1}{2} \log|1+x^2| + c$$

$$y = c\sqrt{1+x^2}$$

c を x の関数 u として

$$y = u\sqrt{1+x^2}, \quad y' = u'\sqrt{1+x^2} + \frac{ux}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{より}$$

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} u' + \sqrt{1+x^2} ux - xu\sqrt{1+x^2} = 1$$

$$u' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

$$\text{したがって } y = x + c\sqrt{1+x^2}$$

2

$$(1) \quad y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x} \quad (y(0)=1)$$

$$y' + y \tan x = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \tan x dx$$

$$\log|y| = \log|\cos x| + c$$

$$y = c \cos x$$

c を x の関数 u として

$$y = u \cos x, \quad y' = u' \cos x - u \sin x \text{ より}$$

$$u' \cos x - u \sin x + u \sin x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore u = \tan x + c$$

$$\therefore y = (\tan x + c) \cos x = \sin x + c \cos x$$

$$y(0)=1 \text{ より } 1=c \quad \therefore y = \sin x + \cos x$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + 2y = x \quad (y(0)=1)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -2 \int dx$$

$$\log|y| = -2x + c$$

$$y = \pm e^{c-2x} = ce^{-2x}$$

c を x の関数 u として

$$y = ue^{-2x}$$

$$y' = u'e^{-2x} - 2ue^{-2x}$$

$$u'e^{-2x} - 2ue^{-2x} + 2ue^{-2x} = x$$

$$u' = xe^{2x}$$

$$u = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + ce^{-2x}$$

$$y(0)=1 \text{ より } 1 = -\frac{1}{4} + c \quad \therefore c = \frac{5}{4}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

3

$$(1) \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$$

$$\therefore y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

(c_1, c_2 は任意定数)

$$(2) \quad y'' + 4y' + 4y = x^2$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0 \quad \lambda = -2$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

1つの解を $y = Ax^2 + Bx + C$ と予想する

$$y' = 2Ax + B, \quad y'' = 2A \text{ より}$$

$$2A + 8Ax + 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2$$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 8A + 4B = 0 \\ 2A + 4B + 4C = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \\ B &= -\frac{1}{2} \\ C &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8}$$

$$\text{したがって } y = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} + (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

(c_1, c_2 は任意定数)

$$(3) \quad y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \quad \lambda = -3, 1$$

$$\therefore y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$$

1つの解を $y = Ae^{2x}$ と予想

$$y' = 2Ae^{2x}, \quad y'' = 4Ae^{2x} \quad \text{より}$$

$$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$5A = 1 \quad \therefore A = \frac{1}{5} \quad y = \frac{1}{5} e^{2x}$$

$$\text{したがって} \quad y = \frac{1}{5} e^{2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$$

(c_1, c_2 は任意定数)

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos x$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda = \pm i$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

1つの解を $y = x(A \cos x + B \sin x)$ と予想

$$y' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$y'' = -2A \sin x + 2B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x)$$

$$-2A \sin x + 2B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x)$$

$$+ x(A \cos x + B \sin x) = \cos x$$

$$\begin{cases} 2B = 1 \\ -2A = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad A = 0 \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} x \sin x$$

$$\text{したがって} \quad y = \frac{1}{2} x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

(c_1, c_2 は任意定数)

$$(1) \quad y'' - y' - 2y = 0 \quad (y(0) = 2, \quad y'(0) = 1)$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \lambda = 2, -1$$

$$\therefore y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \quad \text{より} \quad y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$$

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 1 = 2c_1 - c_2 \end{cases} \quad \text{これより} \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{したがって} \quad y = e^{2x} + e^{-x}$$

$$(2) \quad y'' - 4y = \sin x \quad (y(0) = 0, \quad y'(0) = 3)$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 - 4 = 0 \quad \lambda = \pm 2$$

$$\therefore y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$1 \text{ つの解を } y = A \sin x + B \cos x \text{ と予想}$$

$$y' = A \cos x - B \sin x$$

$$y'' = -A \sin x - B \cos x \quad \text{より}$$

$$-A \sin x - B \cos x - 4A \sin x - 4B \cos x = \sin x$$

$$\begin{cases} -5A = 1 \\ -5B = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad A = -\frac{1}{5}, \quad B = 0$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5} \sin x$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5} \sin x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y' = -\frac{1}{5} \cos x + 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 3 = -\frac{1}{5} + 2c_1 - 2c_2 \end{cases} \quad \text{これより} \quad c_1 = \frac{4}{5}, \quad c_2 = -\frac{4}{5}$$

$$\text{したがって} \quad y = -\frac{1}{5} \sin x + \frac{4}{5} e^{2x} - \frac{4}{5} e^{-2x}$$

$$(3) \quad y'' + 3y' + 2y = 1$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \quad \lambda = -1, -2$$

$$\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

1つの解を $y = A$ とおくと

$$y' = y'' = 0 \quad \text{より}$$

$$2A = 1 \quad \therefore A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$x = 0 \quad y = 0 \quad y' = 0$ を代入して

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2} + c_1 + c_2 \\ 0 = -c_1 - 2c_2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} - e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$$

5

$$(1) \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= -\frac{1}{y^2} (y + xy^2) = -\frac{1}{y} - x = -z - x$$

したがって $z' + z = -x$

$$(2) \quad z' + z = 0$$

$$z' = -z$$

$$\int \frac{1}{z} dz = -\int dx$$

$$\log |z| = -x + c$$

$$z = \pm e^{c-x} = ce^{-x}$$

c を x の関数 u とすると $z = ue^{-x}$, $z' = u'e^{-x} - ue^{-x}$ より

$$u'e^{-x} - ue^{-x} + ue^{-x} = -x$$

$$u' = -e^x x$$

$$u = -xe^x + e^x + c$$

$$\therefore z = -x + 1 + ce^{-x}$$

$$y = \frac{1}{z} \quad \text{より} \quad y = \frac{1}{-x + 1 + ce^{-x}} \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$(1) \quad y = e^{-2x} \sin 3x$$

$$y' = -2e^{-2x} \sin 3x + e^{-2x} \cdot 3 \cdot \cos 3x$$

$$= e^{-2x}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x)$$

$$y'' = -2e^{-2x}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x) + e^{-2x}(-9 \sin 3x - 6 \cos 3x)$$

$$= e^{-2x}(-12 \cos 3x - 5 \sin 3x)$$

$$\text{したがって} \quad y' = e^{-2x}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x)$$

$$y'' = e^{-2x}(-12 \cos 3x - 5 \sin 3x)$$

$$(2) \quad e^{-2x}(-12 \cos 3x - 5 \sin 3x) + ae^{-2x}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x)$$

$$+ be^{-2x} \sin 3x = 0$$

$$\begin{cases} -12 + 3a = 0 \\ -5 - 2a + b = 0 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = 13 \end{cases}$$

$$\text{一般解は} \quad y'' + 4y' + 13 = 0$$

$$\text{特性方程式} \quad \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{36i}}{2} = -2 \pm 3i$$

$$\therefore y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

$$\text{したがって} \quad a = 4, \quad b = 13$$

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

$$(c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

5 章の問題 B

1

$$(1) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -4y^{-5} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = -4y^{-5} \frac{dy}{dx}$$

$$(2) \quad (1) \text{より} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4} y^5 \frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{1}{4} y^5 \frac{dz}{dx} + yP(x) = y^5 Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} - 4y^{-4} P(x) = -4Q(x)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - 4P(x)z = -4Q(x)$$

$$(3) \quad z = y^{-4} \text{とおくと} \quad (2) \text{より}$$

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = -2x$$

$$\frac{dz}{dx} = 4xz$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \int 4x dx$$

$$\log |z| = 2x^2 + c$$

$$z = \pm e^{c+2x^2} = ce^{2x^2}$$

$$c \text{ を } x \text{ の関数 } u \text{ とすると } z = ue^{2x^2}, \quad z' = u'e^{2x^2} + 4uxe^{2x^2}$$

$$u'e^{2x^2} + 4uxe^{2x^2} - 4xue^{2x^2} = -2x$$

$$u' = -2xe^{2x^2}$$

$$u = -\frac{1}{2} e^{2x^2} + c$$

$$\therefore z = -\frac{1}{2} + ce^{2x^2} = \frac{-1 + ce^{2x^2}}{2}$$

$$\text{したがって} \quad y^4 = \frac{2}{ce^{2x^2} - 1} \quad (c \text{ は任意定数})$$

2

$$(1) \quad x' = \frac{u''u - (u')^2}{u^2}$$

微分方程式に代入して

$$\frac{u''u - (u')^2}{u^2} + \frac{(u')^2}{u^2} + a(t) \frac{u'}{u} + b(t) = 0$$

$$\frac{u''}{u} + a(t) \frac{u'}{u} + b(t) = 0$$

$$\therefore u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

$$(2) \quad x' = x(1-x)$$

$$x' + x^2 - x = 0$$

$$x = \frac{u'}{u} \text{ とおくと } (1) \text{ より } u'' - u' = 0$$

$$u' = p \text{ とおくと } u'' = p'$$

$$p' - p = 0$$

$$\int \frac{1}{p} dp = \int dx$$

$$\log |p| = t + c_1$$

$$p = c_1 e^t$$

$$u' = c_1 e^t$$

$$u = c_1 e^t + c_2$$

$$\therefore x = \frac{c_1 e^t}{c_1 e^t + c_2} = \frac{e^t}{e^t + c} \quad (c \text{ は任意定数})$$

3

$$(1) \quad \text{特性方程式} \quad \lambda^2 + 20\lambda + 64 = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda + 16) = 0 \quad \therefore \lambda = -4, -16$$

$$\therefore x = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}$$

$$x' = -4c_1 e^{-4t} - 16c_2 e^{-16t}$$

$t = 0, x = 1, x' = 8$ を代入して

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 8 = -4c_1 - 16c_2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

したがって $y = 2e^{-4t} - e^{-16t}$

(2) 特性方程式 $\lambda^2 + 20\lambda + \alpha = 0$

$$\lambda = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4\alpha}}{2} = -10 \pm \sqrt{100 - \alpha}$$

(i) $\alpha > 100$ のとき

$$x = e^{-10t} (c_1 \cos \sqrt{\alpha - 100} t + (2 \sin \sqrt{\alpha - 100} t))$$

$$t = 0, \quad x = 1, \quad x' = -15 \quad \text{より} \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{5}{\sqrt{\alpha - 100}}$$

$$\therefore x = e^{-10t} \left(\cos \sqrt{\alpha - 100} t - \frac{5}{\sqrt{\alpha - 100}} \sin \sqrt{\alpha - 100} t \right)$$

() 内の式が正または負になる。したがって $x(t) > 0$ とは言えないので不適当

(ii) $\alpha = 100$ のとき

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-10t}$$

$$t = 0, \quad x = 1, \quad x' = -15 \quad \text{より} \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -5$$

$$\therefore x = (1 - 5t) e^{-10t}$$

$$t > \frac{1}{5} \quad \text{のとき} \quad x(t) < 0 \quad \text{となるので不適当}$$

(iii) $0 < \alpha < 100$ のとき

$$\beta = \sqrt{100 - \alpha} \quad \text{とおくと}$$

$$x(t) = c_1 e^{(\beta-10)t} + c_2 e^{-(\beta+10)t}$$

$$t = 0, \quad x = 1, \quad x' = -15 \quad \text{より} \quad c_1 = \frac{\beta - 5}{2\beta}, \quad c_2 = \frac{\beta + 5}{2\beta}$$

$$\begin{aligned} \therefore x(t) &= \frac{\beta - 5}{2\beta} e^{(\beta-10)t} + \frac{\beta + 5}{2\beta} e^{-(\beta+10)t} \\ &= \frac{\beta + 5}{2\beta} \left\{ \frac{(\beta - 5)^2}{75 - \alpha} e^{2\beta t} + 1 \right\} e^{-(\beta+10)t} \end{aligned}$$

したがって $0 < \alpha < 75$ のときは常に $x(t) > 0$

$75 < \alpha < 100$ のときは $x(t) > 0$ とは限らない。

(i), (ii), (iii) より $0 < \alpha < 75$

(1) 特性方程式 $\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0$

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

したがって

$$\begin{cases} b^2 - \omega^2 = 0 \text{ のとき} & x = (c_1 + c_2 t) e^{-bt} \\ b^2 - \omega^2 > 0 \text{ のとき} & x = e^{-bt} (c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + c_2 \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t) \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

(2) $\bullet b^2 - \omega^2 = 0$ のとき

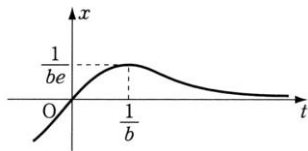
$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-bt}$$

$$x' = t e^{-bt} - b(c_1 + c_2 t) e^{-bt}$$

$$t = 0, \quad x = 0, \quad x' = 1 \quad \text{より} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1$$

$$\therefore x(t) = t e^{-bt}$$

グラフは



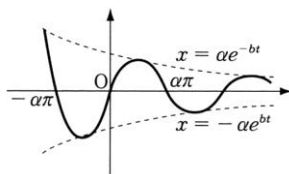
$\bullet b^2 - \omega^2 > 0$ のとき

$$x = e^{-bt} \left(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + c_2 \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t \right)$$

$$t = 0, \quad x = 0, \quad x' = 1 \quad \text{より} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$$

$$\therefore x(t) = \frac{e^{-bt}}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t$$

グラフは



$$\left(\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \text{ とおく} \right)$$