

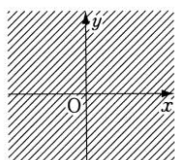
3章 偏微分

1節 2変数関数と偏微分

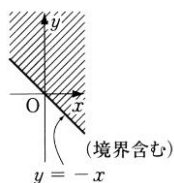
A

67

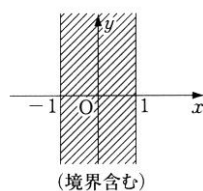
- (1) 任意の x, y を代入できるので定義域は xy 平面の点全体。



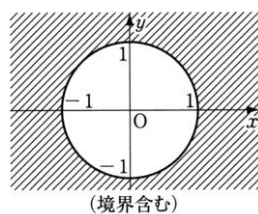
- (2) $y = -x$ より上の領域。



- (3) $0 \leq 1 - x^2$ となる点全体なので $x^2 - 1 \leq 0$ より,
 $-1 \leq x \leq 1$ をみたす点全体。

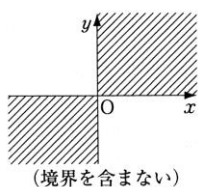


- (4) $0 \leq x^2 + y^2 - 1$ となる点全体なので
 $x^2 + y^2 \geq 1$ より, 原点中心, 半径 1 の円の外部および周。

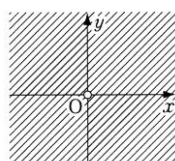


- (5) $0 < xy$ となる点全体なので

$0 < x$ かつ $0 < y$ または $0 > x$ かつ $0 > y$ となる領域。

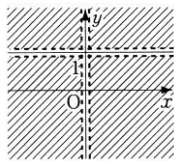


- (6) $0 < x^2 + y^2$ となる点全体なので $(0, 0)$ 以外の点すべて。



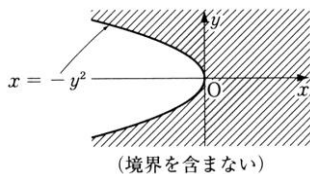
(7) $x(y-1) \neq 0$ となる点全体なので

$x=0$ または $y=1$ となる点を除くすべての点全体。



(8) $0 < x + y^2$ となる点全体なので

$x > -y^2$ より $x = -y^2$ より右の領域。



68

(1) $f(x, y)$ は, $y=0$ にそって近づけると $\frac{0}{x+0} = 0$, $y=x$ にそって近づけると

$\frac{x}{x+x} = \frac{1}{2}$ に近づくので極限值なし。

(2) $x=0$ にそって近づけると $\frac{0}{0+y^2} = 0$, $y=x$ にそって近づけると

$\frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$, に近づくので極限值なし。

(3) $x=0$ にそって近づけると $\frac{0}{0+y^2} = 0$, $y=x$ にそって近づけると

$\frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$, に近づくので極限值なし。

(4) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta \cdot r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0 \quad (-1 \leq \cos^2 \theta \sin \theta \leq 1 \text{ より})$

(5) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cos \frac{x}{y} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \cos \left(\frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} \right) = 0 \quad \left(-1 \leq \cos \theta \cos \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \leq 1 \text{ より} \right)$

(6) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} y \sin \frac{y}{x} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin \theta \sin \left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \right) = 0 \quad \left(-1 \leq \sin \theta \sin \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \leq 1 \text{ より} \right)$

(7) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}}$
 $= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{|r|} = \lim_{r \rightarrow 0} |r| \cos 2\theta = 0$
 $(-1 \leq \cos 2\theta \leq 1 \text{ より})$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \, r \sin \theta}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{|r|} = \lim_{r \rightarrow 0} |r| \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0 \quad (-1 \leq \sin 2\theta \leq 1 \text{ より})
 \end{aligned}$$

69

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \, r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin^2 \theta = 0 \quad (-1 \leq \cos \theta \sin^2 \theta \leq 1 \text{ より})
 \end{aligned}$$

一方、与式より $f(0, 0) = 0$ よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続である。

70

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_x &= 3x^2 - 3y \text{ より } f_x(1, 0) = 3 & (2) \quad f_x &= 1 + 4xy \text{ より } f_x(1, 0) = 1 \\
 f_y &= -3x + 3y^2 \text{ より } f_y(1, 0) = -3 & f_y &= 2x^2 \text{ より } f_y(1, 0) = 2 \\
 (3) \quad f_x &= e^y \text{ より } f_x(1, 0) = 1 & (4) \quad f_x &= e^{xy} + (x+y)ye^{xy} \text{ より } f_x(1, 0) = 1 + 0 = 1 \\
 f_y &= xe^y \text{ より } f_y(1, 0) = 1 & f_y &= e^{xy} + (x+y)xe^{xy} \text{ より } f_y(1, 0) = 1 + 1 = 2 \\
 (5) \quad f_x &= 2y(-x^{-2}) \text{ より } f_x(1, 0) = 0 & (6) \quad f_x &= \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \text{ より } f_x(1, 0) = 0 \\
 f_y &= \frac{2}{x} \text{ より } f_y(1, 0) = 2 & f_y &= \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2} \text{ より } f_y(1, 0) = -2 \\
 (7) \quad f_x &= \frac{2x}{x^2 + y^3} \text{ より } f_x(1, 0) = 2 & (8) \quad f_x &= 2\pi \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{2} y\right) \text{ より} \\
 f_y &= \frac{3y^2}{x^2 + y^3} \text{ より } f_y(1, 0) = 0 & f_x(1, 0) &= 2\pi \cos 2\pi = 2\pi \\
 & & f_y &= \frac{\pi}{2} \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{2} y\right) \text{ より} \\
 & & f_y(1, 0) &= \frac{\pi}{2} \cos 2\pi = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$(1) \quad f_x = y^2 \quad \text{and} \quad f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 2y$$

$$f_y = 2xy \quad \text{and} \quad f_{yx} = 2y, \quad f_{yy} = 2x$$

$$(2) \quad f_x = \frac{1}{xy^2} \times y^2 = x^{-1} \quad \text{and} \quad f_{xx} = -\frac{1}{x^2}, \quad f_{xy} = 0$$

$$f_y = \frac{1}{xy^2} \times 2xy = \frac{2}{y} \quad \text{and} \quad f_{yx} = 0, \quad f_{yy} = 2 \cdot (-y^{-2}) = -\frac{2}{y^2}$$

$$(3) \quad f_x = \frac{-y \cdot 1}{(x+y)^2} = -y(x+y)^{-2} \quad \text{and} \quad f_{xx} = -y \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \frac{2y}{(x+y)^3}$$

$$f_{xy} = -(x+y)^{-2} - y \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \frac{-(x+y) + 2y}{(x+y)^3} = \frac{-x+y}{(x+y)^3}$$

$$f_y = \frac{(x+y) - y}{(x+y)^2} = x(x+y)^{-2} \quad \text{and} \quad f_{yx} = (x+y)^{-2} + x \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \frac{x+y-2x}{(x+y)^3} = \frac{-x+y}{(x+y)^3}$$

$$f_{yy} = x \cdot (-2)(x+y)^{-3} = \frac{-2x}{(x+y)^3}$$

$$(4) \quad f_x = 3(3x+2y)^2 \cdot 3 = 9(3x+2y)^2 \quad \text{and}$$

$$f_{xx} = 9 \cdot 2(3x+2y) \cdot 3 = 54(3x+2y)$$

$$f_{xy} = 9 \cdot 2(3x+2y) \cdot 2 = 36(3x+2y)$$

$$f_y = 3(3x+2y)^2 \cdot 2 = 6(3x+2y)^2 \quad \text{and}$$

$$f_{yx} = 6 \cdot 2(3x+2y) \cdot 3 = 36(3x+2y)$$

$$f_{yy} = 12(3x+2y) \cdot 2 = 24(3x+2y)$$

$$(5) \quad f_x = yx^{y-1} \quad \text{and}$$

$$f_{xx} = y \cdot (y-1)x^{y-2}$$

$$f_{xy} = x^{y-1} + y(\log x) \cdot x^{y-1}$$

$$f_y = (\log x) \cdot x^y \quad \text{and}$$

$$f_{yx} = \frac{1}{x} \cdot x^y + (\log x) \cdot yx^{y-1} = x^{y-1} + y(\log x) \cdot x^{y-1}$$

$$f_{yy} = (\log x)^2 \cdot x^y$$

$$(6) \quad f_x = \frac{1}{(xy)^2 + 1} \cdot y \not\prec \eta$$

$$f_{xx} = \frac{-y \cdot (2xy \cdot y)}{\{(xy)^2 + 1\}^2} = \frac{-2xy^3}{\{(xy)^2 + 1\}^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\{(xy)^2 + 1\} - y(2xy \cdot x)}{\{(xy)^2 + 1\}^2} = \frac{(xy)^2 + 1 - 2x^2y^2}{\{(xy)^2 + 1\}^2} = \frac{-(xy)^2 + 1}{\{(xy)^2 + 1\}^2}$$

$$f_y = \frac{1}{(xy)^2 + 1} \cdot x \not\prec \eta$$

$$f_{yx} = \frac{\{(xy)^2 + 1\} - x \cdot 2xy \cdot y}{\{(xy)^2 + 1\}^2} = \frac{(xy)^2 + 1 - 2x^2y^2}{\{(xy)^2 + 1\}^2} = \frac{-(xy)^2 + 1}{\{(xy)^2 + 1\}^2}$$

$$f_{yy} = \frac{-x(2xy \cdot x)}{\{(xy)^2 + 1\}^2} = \frac{-2x^3y}{\{(xy)^2 + 1\}^2}$$

$$(7) \quad f_x = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \not\prec \eta$$

$$f_{xx} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{x^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy} = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_y = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \not\prec \eta$$

$$f_{yx} = y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + y \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = \frac{x^2 + y^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
(8) \quad f_x &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot y(-x^{-2}) = \frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = yx^{-1}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \\
f_{xx} &= y \left\{ -x^{-2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \right\} = \frac{y \{ -(x^2 - y^2) - x^2 \}}{x^2(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y(-2x^2 + y^2)}{x^2(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
f_{xy} &= x^{-1}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} + yx^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2y) = \frac{x^2 - y^2 + y^2}{x(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
f_y &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x} = -(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \\
f_{yx} &= \frac{1}{2} (x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
f_{yy} &= \frac{1}{2} (x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} (-2y) = \frac{-y}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

72

$$\begin{aligned}
(1) \quad \frac{dz}{dt} &= 2x \cos t + 4y(-\sin t) \\
&= 2 \sin t \cos t - 4 \cos t \sin t \\
&= -2 \sin t \cos t = -\sin 2t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \frac{dz}{dt} &= y(e^t - e^{-t}) + x \cdot 2e^t \\
&= 2e^t(e^t - e^{-t}) + 2(e^t + e^{-t})e^t \\
&= 2e^{2t} - 2 + 2e^{2t} + 2 = 4e^{2t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad \frac{dz}{dt} &= 3x^2(-t^{-2}) + 3y^2 \cdot 2t \\
&= 3 \cdot t^{-2} \cdot (-t^{-2}) + 3t^4 \cdot 2t \\
&= -\frac{3}{t^4} + 6t^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{x + y - (x - y)}{(x + y)^2} \cdot e^t \\
&\quad + \frac{-(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} \cdot (-e^{-t}) \\
&= \frac{2ye^t}{(x + y)^2} + \frac{2xe^{-t}}{(x + y)^2} = \frac{2}{(x + y)^2} + \frac{2}{(x + y)^2} \\
&= \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}
\end{aligned}$$

73

$$(1) \quad f_u = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot 2 + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot 2 = \frac{4(x + y)}{x^2 + y^2} = \frac{8u}{4u^2 + 9v^2}$$

$$f_v = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot 3 + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot (-3) = \frac{6(x - y)}{x^2 + y^2} = \frac{36v}{4u^2 + 9v^2}$$

$$(2) \quad f_u = 3x^2 y^2 \cdot (-\sin u) + x^3 \cdot 2y \cdot \cos v$$

$$= 3 \cos^2 u \sin^2 v \cdot (-\sin u) + \cos^3 u \cdot 2 \sin v \cdot 0$$

$$= -3 \cos^2 u \sin u \sin^2 v + 2 \cos^3 u \sin v \cos v$$

$$f_v = 2 \cos^3 u \sin v \cos v$$

$$(3) \quad f_u = 2x \cdot e^u \cos v - 4y e^u \sin v = 2e^{2u} \cos^2 v - 4e^{2u} \sin^2 v$$

$$f_v = 2xe^u(-\sin v) - 4ye^u \cos v$$

$$= -2e^{2u} \cos v \sin v - 4e^{2u} \sin v \cos v$$

$$= -6e^{2u} \cos v \sin v = -3e^{2u} \sin 2v$$

74

$$(1) \quad \text{面積 } f(x, y) = xy \text{ について } f_x = y, \quad f_y = x \text{ より } f(6.1, 7.9) \doteq 6.8 + 8 \cdot 0.1 - 6 \cdot 0.1 = 48.2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(2) \quad \text{長さ } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ について } f_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \text{ より}$$

$$f(50 + 2.6, 120 - 2.6) \doteq \sqrt{50^2 + 120^2} + (50^2 + 120^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 50 \cdot 2.6 + (50^2 + 120^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 120 \cdot (-2.6)$$

$$\doteq 130 + \frac{130}{130} - \frac{12 \times 26}{130} = 128.6 \text{ (cm)}$$

75

$$(1) \quad dz = -\sin(3x + 2y) \cdot 3 dx$$

$$- \sin(3x + 2y) \cdot 2 dy$$

$$= -\sin(3x + 2y)(3dx + 2dy)$$

$$(2) \quad dz = \frac{y}{\sqrt{1 - (xy)^2}} dx + \frac{x}{\sqrt{1 - (xy)^2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (xy)^2}} (y dx + x dy)$$

$$(3) \quad dz = \left(-yx^{-2} - \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{x} + xy^{-2} \right) dy$$

$$= \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} \right) dy$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{x^2 y} dx + \frac{y^2 + x^2}{xy^2} dy$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{xy} \left(-\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy \right)$$

$$(4) \quad dz = \tan y dx + x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} dy$$

76

体積 $f(x, y) = x^2 y$ (但し縦と高さを x , 横を y とする) について

$$df = 2x \cdot y \, dx + x^2 dy$$

よって 体積の増加 $\approx 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0.1 + 6^2 \cdot (-0.1) = 9.6 - 3.6 = 6.0 (\text{cm}^3)$

77

$$(1) \quad f_x = 2x, \quad f_y = 2y \text{ より } f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 4 \text{ なので } z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

$$z = 2x - 2 + 4y - 8 + 5$$

$$z = 2x + 4y - 5$$

$$(2) \quad f_x(0, 1) = 0, \quad f_y(0, 1) = 2 \text{ より } z - 1 = 0(x - 0) + 2(y - 1)$$

$$\text{よって } z = 2y - 1$$

78

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2) \text{ のとき } z = 0 \text{ より 接点は } (2, 2, 0)。$$

$$\text{一方, } f_x = 2x, \quad f_y = -2y \text{ より } f_x(2, 2) = 4, \quad f_y(2, 2) = -4$$

よって接平面は

$$z - 0 = 4(x - 2) - 4(y - 2)$$

$$z = 4x - 8 - 4y + 8$$

$$\text{よって, } 4x - 4y - z = 0$$

$$(2) \quad (x, y) = (2, 1) \text{ のとき } z = 2 \text{ より 接点は } (2, 1, 2)。$$

$$\text{一方, } f_x = \frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$f_y = \frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) \text{ より } f_x(2, 1) = -1, \quad f_y(2, 1) = -\frac{1}{2}$$

なので接平面は

$$z - 2 = -(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 1)$$

$$2z - 4 = -2x + 4 - y + 1$$

$$\text{よって, } 2x + y + 2z - 9 = 0$$

$$(3) \quad (x, y) = (2, -1) \text{ のとき } z = -1 \text{ より 接点は } (2, -1, -1)。$$

$$\text{一方, } f_x = \frac{-y}{(x+y)^2}, \quad f_x(2, -1) = 1$$

$$f_y = \frac{(x+y) - y}{(x+y)^2}, \quad f_y(2, -1) = 2$$

より接平面は

$$z + 1 = 1(x - 2) + 2(y + 1)$$

$$= x - 2 + 2y + 2$$

$$\text{よって, } x + 2y - z - 1 = 0$$

(4) $(x, y) = (1, 1)$ のとき $z = 2$ より 接点は $(1, 1, 2)$ 。

一方,

$$f_x = 2xy + y, \quad f_x(1, 1) = 3$$

$$f_y = x^2 + x, \quad f_y(1, 1) = 2 \text{ より}$$

接平面は

$$z - 2 = 3(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$= 3x - 3 + 2y - 2$$

$$\text{よって, } 3x + 2y - z - 3 = 0$$

B

79

$$(1) \quad x = y^2 \text{ にそって } (0, 0) \text{ に近づけると } f(x, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{一方}$$

$$x = 2y^2 \text{ にそって } (0, 0) \text{ に近づけると } f(x, y) = \frac{2y^4}{4y^4 + y^4} \rightarrow \frac{2}{5}$$

近づけ方により異なる値に近づくので答は「極限值なし」である。

$$(2) \quad y = -x + x^2 \text{ にそい } (0, 0) \text{ に近づけると } f(x, y) = \frac{x^2}{x^2} \rightarrow 1,$$

$$y = -x + 2x^2 \text{ にそって } (0, 0) \text{ に近づけると } f(x, y) = \frac{x^2}{2x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

近づけ方により異なる値に近づくので答は「極限值なし」である。

80

$$(i) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \text{ とおくと } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ より } r \rightarrow 0)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot r^2 \cdot \cos 2\theta$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4} \sin 4\theta \cdot r^2 = 0 \dots\dots \quad \textcircled{ア}$$

$$(-1 \leq \sin 4\theta \leq 1 \text{ より})$$

一方, $f(0, 0) = 0 \dots\dots \textcircled{イ} \quad \textcircled{ア}, \textcircled{イ}$ より $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続。

$$(ii) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 \text{ より } f(x, y) \text{ は } (0, 0) \text{ において } x \text{ について偏微分可能。}$$

$$\text{同様 } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = 0 \text{ より } (0, 0) \text{ で } y \text{ について偏微分可能。}$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0+k) - f_x(0, 0)}{k}$$

だが前問より $f_x(0, 0) = 0$ であり

$$\begin{aligned} f_x(0, k) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, k) - f(0, k)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(kh \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} - 0 \right) \frac{1}{h} \\ &= -k \text{ である} \end{aligned}$$

$$\text{よって } f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-k}{k} = -1 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0+h, 0) - f_y(0, 0)}{h} \quad \text{だが, 前問より } f_y(0, 0) = 0 \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} f_y(h, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, 0+k) - f(h, 0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(hk \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} - 0 \right) \frac{1}{k} \\ &= h \text{ である} \end{aligned}$$

$$\text{よって } f_{yx}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{ より } f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$$

$$(1) \quad f_x = \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \{(-2x)(x^2 + y^2)^2 - (-x^2 + y^2) \cdot 2(x^2 + y^2) \cdot 2x\} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} (-2x^3 - 2xy^2 + 4x^3 - 4xy^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{9} \end{aligned}$$

$$f_y = \frac{-x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -2x \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= -2x \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \{1 \cdot (x^2 + y^2)^2 - y \cdot 2(x^2 + y^2) \cdot 2y\} \\ &= \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^3} (x^2 + y^2 - 4y^2) \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} (-2x^3 + 6xy^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{10} \end{aligned}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{ より } f_{xx} + f_{yy} = 0 \quad \text{よって調和関数}$$

$$(2) \quad f = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{より}$$

$$f_x = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$= -x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{xx} = -(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} + (-x)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x$$

$$= -(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f_y = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y$$

$$= -y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_{yy} = -(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{よって} \quad f_{xx} + f_{yy}$$

$$= -2(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + y^2) \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

よって $f(x, y)$ は調和関数でない。

$$(3) \quad f_x = \frac{(x+y)-x}{(x+y)^2} = y(x+y)^{-2}$$

$$f_{xx} = y \cdot (-2)(x+y)^{-3}$$

$$f_y = \frac{-x}{(x+y)^2} = -x(x+y)^{-2}$$

$$f_{yy} = -x \cdot (-2)(x+y)^{-3}$$

$$\text{よって} \quad f_{xx} + f_{yy} = (-2y - 2x)(x+y)^{-3}$$

従って $f(x, y)$ は調和関数でない。

$$(4) \quad f = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \text{ より}$$

$$f_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$= x(x^2 + y^2)^{-1}$$

$$f_{xx} = (x^2 + y^2)^{-1} + x \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x$$

$$f_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} = y(x^2 + y^2)^{-1}$$

$$f_{yy} = (x^2 + y^2)^{-1} + y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y$$

$$\text{よって } f_{xx} + f_{yy}$$

$$= 2(x^2 + y^2)^{-1} + (-2x^2 - 2y^2) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} = 0$$

よって $f(x, y)$ は調和関数。

83

$$(1) \quad z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$= z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha$$

$$z_{uu} = \{(z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u\} \cos \alpha + \{(z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u\} \sin \alpha$$

$$= z_{xx} \cos^2 \alpha + z_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + z_{yx} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

$$= z_x (-\sin \alpha) + z_y \cos \alpha$$

$$z_{vv} = \{(z_x)_x x_v + (z_x)_y y_v\} (-\sin \alpha) + \{(z_y)_x x_v + (z_y)_y y_v\} \cos \alpha$$

$$= z_{xx} \sin^2 \alpha - z_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yx} (-\sin \alpha) \cos \alpha + z_{yy} \cos^2 \alpha$$

$$\text{よって } z_{uu} + z_{vv} = z_{xx}(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + z_{yy}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= z_{xx} + z_{yy}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad z_u &= z_x x_u + z_y y_u \\
&= z_x (e^u \cos v) + z_y (e^u \sin v) \\
z_{uu} &= \left[\{ (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u \} e^u + z_x e^u \right] \cdot \cos v \\
&\quad + \left[\{ (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u \} e^u + z_y e^u \right] \cdot \sin v \\
&= \left[(z_{xx} e^u \cos v + z_{xy} e^u \sin v) e^u + z_x e^u \right] \cdot \cos v \\
&\quad + \left[(z_{yx} e^u \cos v + z_{yy} e^u \sin v) e^u + z_y e^u \right] \cdot \sin v \\
&= (z_{xx} e^{2u} \cos^2 v + z_{xy} e^{2u} \sin v \cos v + z_x e^u \cos v) \\
&\quad + (z_{yx} e^{2u} \cos v \sin v + z_{yy} e^{2u} \sin^2 v + z_y e^u \sin v) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}
\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
z_v &= z_x x_v + z_y y_v \\
&= z_x e^u (-\sin v) + z_y e^u (\cos v) \\
z_{vv} &= \left[\{ (z_x)_x x_v + (z_x)_y y_v \} (-\sin v) + z_x (-\cos v) \right] \cdot e^u \\
&\quad + \left[\{ (z_y)_x x_v + (z_y)_y y_v \} \cos v + z_y (-\sin v) \right] \cdot e^u \\
&= \left[\{ z_{xx} e^u (-\sin v) + z_{xy} e^u \cos v \} (-\sin v) - z_x \cos v \right] \cdot e^u \\
&\quad + \left[\{ z_{yx} e^u (-\sin v) + z_{yy} e^u \cos v \} \cos v - z_y \sin v \right] \cdot e^u \\
&= z_{xx} e^{2u} \sin^2 v - z_{xy} e^{2u} \cos v \sin v - z_x e^u \cos v \\
&\quad - z_{yx} e^{2u} \sin v \cos v + z_{yy} e^{2u} \cos^2 v - z_y e^u \sin v \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{1} \text{ より } z_{uu} + z_{vv} = z_{xx} e^{2u} + z_{yy} e^{2u}$$

$$\text{よって } z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u} (z_{uu} + z_{vv})$$

84

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\text{仮定より } z_x = f_x(x, y) \text{ に対し } (f_x)_{xy} = (f_x)_{yx} \text{ なるので } f_{xxy} = f_{xyx} \\
&\text{一方 } f_{xy} = f_{yx} \text{ より } (f_{xy})_x = (f_{yx})_x \\
&\text{よって } f_{xyx} = f_{yxx} \quad \text{以上により } f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad &(f_y)_{xy} = (f_y)_{yx} \text{ より } f_{yxy} = f_{yyx} \\
&\text{一方 } f_{xy} = f_{yx} \text{ より } (f_{xy})_y = (f_{yx})_y \\
&\text{よって } f_{xyy} = f_{yyx} \quad \text{以上から, } f_{yxy} = f_{yyx} = f_{xyy}
\end{aligned}$$

85

$$\begin{aligned}
(1) \quad &t = ax + by \text{ とおくと P.26 } \boxed{6} \text{ (1) より} \\
&z_x = f'(t) \cdot t_x = f'(t) \cdot a \\
&z_y = f'(t) \cdot t_y = f'(t) \cdot b \\
&\text{よって } bz_x - az_y = abf'(t) - abf'(t) = 0
\end{aligned}$$

(2) $t = xy$ として P.26 6 (1)より

$$z_x = f'(t) \cdot t_x = f'(t)y$$

$$z_y = f'(t) \cdot t_y = f'(t)x$$

$$\text{よって } xz_x - yz_y = x f'(t)y - y f'(t)x = 0$$

(3) $t = \frac{y}{x}$ として P.26 6 (1)より

$$z_x = f'(t)t_x = f'(t) \cdot y(-x^{-2})$$

$$z_y = f'(t)t_y = f'(t) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{よって } xz_x + yz_y = f'(t)y(-x^{-1}) + f'(t) \cdot \frac{y}{x} = 0$$

(4) (1)と同様にして

$$z_x = f'(x+ay) \cdot 1 + g'(x-ay) \cdot 1$$

$$z_{xx} = f''(x+ay) \cdot 1^2 + g''(x-ay) \cdot 1^2$$

$$z_y = f'(x+ay) \cdot a + g'(x-ay) \cdot (-a)$$

$$z_{yy} = f''(x+ay) \cdot a^2 + g''(x-ay) \cdot (-a)^2$$

$$\begin{aligned} \text{よって } a^2 z_{xx} - z_{yy} &= a^2 \{f''(x+ay) + g''(x-ay)\} - \{f''(x+ay)a^2 + g''(x-ay)a^2\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

86

$t = \frac{y}{x}$ より $y = xt$ z は x, y の関数 $f(x, y)$ であり, x と y はともに x, t の式であるとみなせるので

P.26 6 (II)より

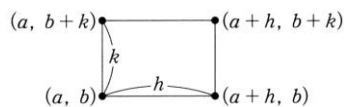
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, xt) = f_x \cdot (x)_x + f_y \cdot (y)_x$$

$$= f_x + f_y t = f_x + f_y \cdot \frac{y}{x}$$

$$= \frac{x f_x + f_y y}{x} = 0 \quad (xz_x + yz_y = 0 \text{ より})$$

よって $f(x, xt)$ すなわち $f(x, y)$ は t のみの式である。

$A = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$ とおく。



$$A = \{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)\} - \{f(a, b+k) - f(a, b)\}$$

$$= \left[f(x, b+k) - f(x, b) \right]_{x=a}^{x=a+h}$$

$$= \{f_x(c_1, b+k) - f_x(c_1, b)\} h$$

$$(a < c_1 < a+h)$$

(x の関数 $f(x, b+k) - f(x, b)$ に平均値の定理を適用。)

$$= \left[f_x(c_1, y) \right]_{y=b}^{y=b+k} \cdot h$$

$$= f_{xy}(c_1, c_2) k \cdot h \quad \dots\dots ㉞$$

$$(b < c_2 < b+k)$$

(y の関数 $f_x(c_1, y)$ に平均値の定理を適用した。)

$$\text{一方 } A = \{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)\}$$

$$- \{f(a+h, b) - f(a, b)\}$$

$$= \left[f(a+h, y) - f(a, y) \right]_{y=b}^{y=b+k}$$

$$= \{f_x(a+h, c_4) - f_x(a, c_4)\} \cdot k$$

$$(b < c_4 < b+k)$$

(y の関数 $f(a+h, y) - f(a, y)$ に平均値の定理を適用。)

$$= \left[f_y(x, c_4) \right]_{x=a}^{x=a+h} \cdot k$$

$$= f_{yx}(c_3, c_4) h \cdot k \quad \dots\dots ㉟$$

$$(a < c_3 < a+h)$$

(x の関数 $f_y(x, c_4)$ に平均値の定理を適用。)

$$\text{㉞ } \text{㉟ より } f_{xy}(c_1, c_2) = f_{yx}(c_3, c_4)$$

$$\text{よって } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} f_{xy}(c_1, c_2) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} f_{yx}(c_3, c_4)$$

$h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ のとき $c_1 \rightarrow a, c_2 \rightarrow b, c_3 \rightarrow a, c_4 \rightarrow b$ であるが

f_{xy} が連続なので 左辺 $= f_{xy}(a, b)$, f_{yx} が連続なので 右辺 $= f_{yx}(a, b)$ である。

よって $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が任意の点 (a, b) について成立する。

$$(1) \quad u_x = \frac{3x^2 - 3yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$u_y = \frac{3y^2 - 3zx}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$u_z = \frac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \quad \text{より}$$

$$u_x + u_y + u_z = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{3}{x + y + z}$$

(因数分解の公式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$ を適用した。←新版基礎数学演習 P.7, 問題 23)

$$(2) \quad u_x = (y - z) \{ (z - x) + (x - y)(-1) \}$$

$$u_y = (z - x) \{ (-1)(y - z) + (x - y) \}$$

$$u_z = (x - y) \{ (-1)(z - x) + (y - z) \} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} u_x + u_y + u_z &= (y - z)(z - x) - (y - z)(x - y) \\ &\quad - (z - x)(y - z) + (z - x)(x - y) \\ &\quad - (x - y)(z - x) + (x - y)(y - z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (1) 問題 82(2)にならって直接 u_{xx} , u_{yy} , u_{zz} を求めて加えてもよい。ここでは別解を紹介する。

与式より

$$u^{-2} = x^2 + y^2 + z^2 \text{ なので } \dots\dots\textcircled{A}$$

両辺を x で偏微分して

$$-2u^{-3} \cdot u_x = 2x \quad \text{より} \quad u_x = -xu^3$$

$$\text{よって} \quad u_{xx} = -(u^3 + x \cdot 3u^2 u_x)$$

$$\text{同様に} \quad u_{yy} = -(u^3 + y \cdot 3u^2 u_y)$$

$$u_{zz} = -(u^3 + z \cdot 3u^2 u_z) \quad \text{であり} \quad u_y = -yu^3, \quad u_z = -zu^3$$

$$\begin{aligned} \text{従って} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= -\{u^3 + 3u^2 x \cdot (-xu^3) + u^3 + 3u^2 y \cdot (-yu^3) \\ &\quad + u^3 + 3u^2 z \cdot (-zu^3)\} \\ &= -\{3u^3 - 3u^5(x^2 + y^2 + z^2)\} \\ &= -(3u^3 - 3u^5 \cdot u^{-2}) \quad (\textcircled{A} \text{より}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって, 調和関数である。

(2) 問題 88(2)より

$$u_x = (y - z)(z - 2x + y)$$

$$u_y = (z - x)(-2y + z + x)$$

$$u_z = (x - y)(-2z + x + y) \quad \text{なので}$$

$$u_{xx} = (y - z)(-2)$$

$$u_{yy} = (z - x)(-2)$$

$$u_{zz} = (x - y)(-2)$$

$$\text{従って} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -2(y - z + z - x + x - y) = 0$$

よって、調和関数である。