３章の問題

1

⑴ $f_x(1,\ 2) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h,\ 2) - f(1,\ 2)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)\cdot 4 - 1\cdot 4}{h} = 4$

$f_y(1,\ 2) = \lim_{k\to 0}\dfrac{f(1,\ 2+k) - f(1,\ 2)}{k}$

$= \lim_{k\to 0}\dfrac{1\cdot(4+4k+k^2) - 4}{k} = \lim_{k\to 0}(4+k) = 4$

⑵ $z_x = \cos xy \times (xy)_x = y\cos xy$

$z_y = \cos xy \times (xy)_y = x\cos xy$

⑶ $z_x = 9x^2 + 4y,\ z_y = 4x - 10y$ より $z_{xx} = 18x,\ z_{xy} = 4 = z_{yx},\ z_{yy} = -10$

⑷ $z_u = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot 1 + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot 1 = \dfrac{2(u+v)+2(u-2v)}{(u+v)^2+(u-2v)^2}$

$= \dfrac{2u+2v+2u-4v}{u^2-2uv+v^2+u^2-4uv+4v^2} = \dfrac{4u-2v}{2u^2-2uv+5v^2}$

$z_v = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot 1 + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot(-2) = \dfrac{2(u+v)-4(u-2v)}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{-2u+10v}{2u^2-2uv+5v^2}$

2

⑴ $z_x = e^{-\frac{y}{x}}\cdot(-yx^{-1})_x = e^{-\frac{y}{x}}\cdot yx^{-2} = \dfrac{e^{-\frac{y}{x}}y}{x^2}$

$z_y = e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x}\right)_y = e^{-\frac{y}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{e^{-\frac{y}{x}}}{x}$

⑵ $z_x = 2x + 4y,\ z_{xx} = 2$

$z_y = 3 + 4x$ より $z_{yx} = 4$

⑶ $z_u = -\sin(2x+y)\cdot 2\cdot 1 - \sin(2x+y)\cdot 2u$

$= -\sin(2u+u^2-v)\cdot(2+2u) = -2(u+1)\sin(2u+u^2-v)$

$z_v = -\sin(2x+y)\cdot 2\cdot 0 - \sin(2x+y)\cdot(-1)$

$= \sin(2x+y)$

$= \sin(2u+u^2-v)$

3

⑴　$f_x = 3y + 6x^2$,　$f_y = 3x - 1$

⑵　$f_{xx} = 12x$,　$f_{xy} = 3$　より　$f_{xx}(1,\ 1) = 12$,　$f_{xy}(1,\ 1) = 3$

⑶　$z_x = 3x^2 - 3y^2$,　$z_y = -6xy$　より　$\varDelta z \fallingdotseq (3x^2 - 3y^2)\varDelta x - 6xy\varDelta y$

⑷　$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = z_u \cdot 3 + z_v \cdot 5$

4

⑴　$f_x = 2x - 6y + 2 = 0$　かつ　$f_y = -6x + 20y - 10 = 0$ となるのは

$x - 3y + 1 = 0$　……㋐　　かつ

$-3x + 10y - 5 = 0$　……㋑　　㋐より $3x - 9y + 3 = 0$　……㋐′　　㋑＋㋐′　で

$y - 2 = 0$　よって $y = 2$

㋐より $x = 5$　　よって答は(5,　2)

⑵　$f_{xx} = 2$,　$f_{xy} = -6$,　$f_{yy} = 20$ より $\mathrm{H}(5,\ 2) = 2 \times 20 - (-6)^2 = 4 > 0$ より f は(－5,　－1)で

極値 $f(5,\ 2) = 25 - 6 \times 10 + 40 + 10 - 20 = -5$ をとる。

$f_{xx}(5,\ 2) = 2 > 0$ よりこれは極小値。

5

⑴　$z = xy^{-2}$ より $z_x = y^{-2}$,

$z_y = x \cdot (-2y^{-3}) = -2xy^{-3}$　より

$z_{xx} = 0$,　$z_{xy} = -2y^{-3} = \dfrac{-2}{y^3}$

$z_{yx} = -2y^{-3} = \dfrac{-2}{y^3}$,　$z_{yy} = -2x \cdot (-3y^{-4}) = \dfrac{6x}{y^4}$

⑵　$z = f(x,\ y)$ とおく。

(i)　$f_x = 2x = 0$,　$f_y = -3y^2 = 0$ となるのは $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき。

$f_{xx} = 2$,　$f_{xy} = 0$,　$f_{yy} = -6y$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 2 \times 0 - 0^2 = 0$

$x = 0$ のとき $z = -y^3$ なので z は y の増加につれ $(0,\ 0)$ において正から負に変化する。

よって f は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。

(ii)　$f_x = -2x = 0$,　$f_y = -2y = 0$ となるのは $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき。

$f_{xx} = -2$,　$f_{xy} = 0$,　$f_{yy} = -2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = (-2)^2 > 0$ なので f は $(0, 0)$ で極値 $f(0,\ 0) = 0$ をとる。

$f_{xx}(0,\ 0) = -2 < 0$ よりこれは極大値である。

(iii)　$f_x = 2x = 0$,　$f_y = -4y^3 = 0$ となるのは $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき。

$f_{xx} = 2$,　$f_{xy} = 0$,　$f_{yy} = -12y^2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 2 \times 0 - 0^2 = 0$

$x = 0$ のとき $z = -y^4$ より f は $(0,\ 0)$ で極大となっているが，$y = 0$ のとき $z = x^2$ より

f は $(0,\ 0)$ で極小となっているので f は $(0,\ 0)$ で極値をとらない。

(iv)　$f_x = 4x^3 = 0$,　$f_y = 2y = 0$ となるのは $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき。

$f_{xx} = 12x^2$,　$f_{xy} = 0$,　$f_{yy} = 2$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0) = 0 \times 2 - 0^2 = 0$

$z = f(x,\ y)$ は $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のとき $z > 0$,　$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき $z = 0$ なので f は $(0,\ 0)$ で極小値 0 をとる。

⑶　$z = f(x,\ y) = x^2y^3$とおくと $f_x = 2x\cdot y^3,\ f_y = x^2\cdot 3y^2$ より

$\varDelta z \fallingdotseq f_x(1,\ 1)\varDelta x + f_y(1,\ 1)\varDelta y$

$= 2\times 0.02 + 3\times 0.01 = 0.07$

6

⑴　$f_x = 3x^2 - y,\ f_y = -x + 3y^2,\ f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = -1,\ f_{yy} = 6y$

⑵　$3x^2 - y = 0,\ -x + 3y^2 = 0$ のとき　$y = 3x^2$　より　$-x + 3\cdot 9x^4 = 0$

$-x(1 - 27x^3) = 0$　よって　$x = 0,\ \dfrac{1}{3}$　従って　$(x,\ y) = (0,\ 0),\ \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

⑶　fが極値をとる可能性があるのは⑵の 2 点のみである。

$\mathrm{H}(x,\ y) = 6x\cdot 6y - (-1)^2$　であるから　$\mathrm{H}(0,\ 0) = -1 < 0$　より　$(0,\ 0)$で極値をとらない。

$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) = 2\times 2 - 1 = 3$

⑷　$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) > 0$　より　$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$で極値をとる。

その値は $f\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} = -\dfrac{1}{27}$

⑸　$f_{xx}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) = 6\times\dfrac{1}{3} > 0$　より極小値である。

⑹　$f_x(1,\ 1) = 2,\quad f_y(1,\ 1) = 2$　より　$z - 1 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$

⑺　$\varDelta z \fallingdotseq 2(1.01 - 1) + 2(1.02 - 1) = 0.02 + 0.04 = 0.06$

7

⑴　$F(x,\ y) = x^2(x+2) - y^2 = 0$ とおくと $F_x = 3x^2 + 4x,\ \ F_y = -2y$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2+4x)}{-2y} = \frac{3x^2+4x}{2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(6x+4)y-(3x^2+4x)y'}{y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(6x+4)2y^2-(3x^2+4x)^2}{2y^3}$$

$$= \frac{(6x+4)\cdot 2x^2(x+2)-(9x^4+24x^3+16x^2)}{4y^3}$$

$$= \frac{2x^2(6x^2+16x+8)-9x^4-24x^3-16x^2}{4y^3} = \frac{3x^4+8x^3}{4y^3}$$

⑵　$x=-1$ のとき $y^2 = x^2(x+2) = 1$　よって $y = \pm 1$

(i)　$(x,\ y) = (-1,\ 1)$　では　$F_x = (-1,\ 1) = -1,\ \ F_y(-1,\ 1) = -2$

よって　$(-1)(x+1) - 2(y-1) = 0$

$-x-1-2y+2=0$　つまり　$x+2y-1=0$ が接線

一方　$(-2)(x+1)+(y-1)=0$

つまり　$2x-y+3=0$ が法線

(ii)　$(x,\ y) = (-1,\ -1)$　では　$F_x = (-1,\ -1) = -1,\ \ F_y(-1,\ -1) = 2$

よって　$(-1)(x+1)+2(y+1)=0$

つまり　$x-2y-1=0$ が接線の方程式

$2(x+1)+(y+1)=0$

つまり　$2x+y+3=0$ が法線の方程式

⑶　$(-1,\ 1)$ では⑴より　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3-8}{4} < 0$　より上に凸,

$(-1,\ -1)$ では　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3-8}{-4} > 0$　より下に凸。

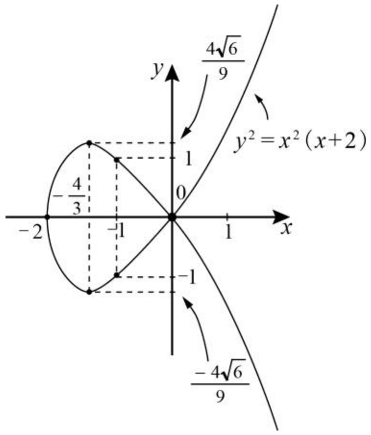
⑷　⑴より $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+4x}{2y} = \dfrac{x(3x+4)}{2y} = 0$ となるのは　$x = -\dfrac{4}{3}$ のとき。

（$x=0$ のときは $y=0$ となり不適）

このとき $y^2 = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2\left(-\dfrac{4}{3}+2\right) = \dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{32}{27}$

よって　$y = \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$　　従って $(x,\ y) = \left(-\dfrac{4}{3},\ \pm\dfrac{4}{9}\sqrt{6}\right)$

⑸　⑷より y は $x=-\dfrac{4}{3}$ のとき $0<y$ では極値　$y=\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ をとる。



このとき　$-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{6\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{-2\times\dfrac{4\sqrt{6}}{9}}<0$　より　極大値である。

また，$0>y$ では極値 $y=\dfrac{-4\sqrt{6}}{9}$ をとる。

このとき $-\dfrac{F_{xx}}{F_y}=-\dfrac{6\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{-2\times\left(\dfrac{-4\sqrt{6}}{9}\right)}>0$ より極小値である。

8

⑴　$f_x=10x-6y=0$

$f_y=-6x+10y=0$ となるのは $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき

$f_{xx}=10,\ \ f_{xy}=-6,\ \ f_{yy}=10$　より　$\mathrm{H}(0,\ 0)=10^2-(-6)^2=64>0$ であり

極値 $f(0,\ 0)=-4$ をとる。 $f_{xx}(0,\ 0)=10>0$ より極小値である。

⑵　$g(x,\ y)=x^2+y^2-1=0$ とおくと $g_x=2x,\ \ g_y=2y$ なので極値をとる点 $(x,\ y)$ では

$$\frac{10x-6y}{2x}=\frac{-6x+10y}{2y}(=\lambda)\quad\cdots\cdots㋐$$

の成立することが必要である。（λ はラグランジュの乗数）

㋐より $5xy-3y^2=-3x^2+5xy$　よって　$y=\pm x$。

条件式 $g=0$ に代入して $x^2=\dfrac{1}{2}$ であり $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

よって f は次の 4 点で極値をとる可能性がある。

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

このとき　$f\left(\dfrac{\pm1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\pm1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{6}{2}+\dfrac{5}{2}-4=\dfrac{4}{2}-4=-2$　（複号同順）

$f\left(\dfrac{\pm1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\mp1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{5}{2}+\dfrac{6}{2}+\dfrac{5}{2}-4=4$　（複号同順）

よって　$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　のとき極小値 -2，$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき極大値 4 をとる。

（条件 $x^2+y^2=1$ をもつ $(x,\ y)$ で f が最大値と最小値をもつことは既知とする。）

⑶　⑴⑵より最大値は $z=4$，最小値は $z=-4$