５章　微分方程式

１節　微分方程式と解

A

126

⑴　$y' = -\dfrac{2}{y'}$

⑵　法線の方程式は　$Y - y = -\dfrac{1}{y'}(X - x)$

$X = a,\ Y = b$ を代入して　$b - y = -\dfrac{1}{y'}(a - x)$　　$\therefore$　$y' = -\dfrac{a - x}{b - y}$

⑶　接線の方程式は　$Y - y = y'(X - x)$

Q の Y 座標は　$X = 0$ を代入して

$Y = y - xy'$

条件より　$y = -y + xy'$　　$\therefore$　$xy' - 2y = 0$

127

⑴　$\dfrac{dx(t)}{dt} = kx(t)$

⑵　$\dfrac{dP(t)}{dt} = k(a - P(t))$

128

⑴　$y' = c$　より，$y = xy' - \log y' = cx - \log c$ と微分方程式を満たす。

また，1 個の任意定数を含むので一般解である。

⑵　$y' = \dfrac{1}{x}$　より

$y = xy' - \log y' = x \cdot \dfrac{1}{x} - \log \dfrac{1}{x} = 1 + \log x$ と微分方程式を満たす。しかし，一般解の任意定数にどのような値を入れても得られないので特異解である。

129

⑴　$y' = 3c_1x^2 + c_2$　　$y'' = 6c_1x$　より

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2(6c_1x) - 3x(3c_1x^2 + c_2) + 3(c_1x^3 + c_2x)$$
$$= 6c_1x^3 - 9c_1x^3 - 3c_2x + 3c_1x^3 + 3c_2x = 0$$

と微分方程式を満たす。また，2 個の任意定数を含むので一般解である。

⑵　$\begin{cases} y = c_1x^3 + c_2x \\ y' = 3c_1x^2 + c_2 \end{cases}$　に $x = 1,\ \ y = 0$　$x = 1,\ \ y' = 2$　を代入すると　$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = 3c_1 + c_2 \end{cases}$

これより　$c_1 = 1,\ \ c_2 = -1$

したがって　$y = x^3 - x$

⑶　$y = c_1x^3 + c_2x$　に　$x = 1,\ \ y = 1,\ \ x = 2,\ \ y = 1$を代入すると

$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 1 = 8c_1 + 2c_2 \end{cases}$　これより　$c_1 = -\dfrac{1}{6}$，$c_2 = \dfrac{7}{6}$

したがって　$y = -\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{7}{6}x$

B

130

⑴　$y' = c$　より　$y = y'x$　　$\therefore$　$xy' - y = 0$

⑵　$y' = ce^x + 1$　より　$c = e^{-x}(y' - 1)$

$y = e^{-x}(y' - 1)e^x + x = y' - 1 + x$　　$\therefore$　$y' - y = x - 1$

⑶　$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x$

$y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$　より　$y'' + y = 0$

⑷　$y = c_1x + \dfrac{c_2}{x}$，$y' = c_1 - \dfrac{c_2}{x^2}$，$y'' = \dfrac{2c_2}{x^3}$　より　$c_2 = \dfrac{x^3}{2}y''$，　$c_1 = y' + \dfrac{c_2}{x^2}$

$$= y' + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{2}y''$$
$$= y' + \frac{x}{2}y''$$

したがって　$y = \left(y' + \dfrac{x}{2}y''\right)x + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^3}{2}y''\right)$

$$= xy' + \frac{x^2}{2}y'' + \frac{x^2}{2}y'' = xy' + x^2y''$$

$\therefore$　$x^2y'' + xy' - y = 0$

131

⑴ $y' = e^{ax}\{(aA+bB)\cos bx + (aB-bA)\sin bx\}$ ……①

$y'' = e^{ax}\{(a^2A-b^2A+2abB)\cos bx + (a^2B-b^2B-2abA)\sin bx\}$ ……②

①×$2a$　$2ay' = e^{ax}\{(2a^2A+2abB)\cos bx + (2a^2B-2abA)\sin bx\}$ ……①′

②－①′ より　$y''-2ay'+(a^2+b^2)y=0$

⑵ $x=0$ のとき　$y=A,\quad y'=aA+bB$

132

⑴ $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-g$

⑵ $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-mg-k\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$