１章の問題

1

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+4x}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{5}{3x}\times\log(1+2x)=\lim_{x\to 0}\frac{5\log(1+2x)}{3x}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 0}\frac{5\times\frac{1}{1+2x}\times 2}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{10}{3(1+2x)}=\frac{10}{3}$

(4) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とすると $\log y=\dfrac{1}{x}\log(1+x)$ より

$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}$

$\displaystyle =\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}$

$=0$

$\log y\to 0$ より $y\to 1$ $\quad\therefore\ \displaystyle \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$

2

$x=e^t+e^{-t},\quad y=e^t-e^{-t}$

$\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}$

$t=1$ のとき $\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}$

3

$x=2t^2+1,\quad y=3t-1$

$\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{3}{4t}$

$t=1$ のとき $\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}$

4

$x = e^{\theta} \cos\theta,\ \ y = e^{\theta} \sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \quad \left(= \frac{\tan\theta + 1}{1 - \tan\theta} \right)$$

5

⑴ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3)$

$= 3(x-3)(x-1)$

グラフが増加するとき　$f''(x) > 0$ より　$x < 1,\ \ 3 < x$

⑵ $f''(x) = 6x - 12$

グラフが上に凸なとき　$f''(x) < 0$ より　$x < 2$

6

⑴ $f(x) = x^4 - x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$　のとき　$x = 0,\ \dfrac{3}{4}$

$x = 0$　のとき　$f''(0) = 0$

$x = \dfrac{3}{4}$　のとき　$f''\left(\dfrac{3}{4}\right) = 12 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 6 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4} > 0$

$f(x)$が極小をとるのは　$x = \dfrac{3}{4}$　のとき

⑵ $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$

$f(x)$が上に凸のとき　$f''(x) < 0$　　$\therefore\ 0 < x < \dfrac{1}{2}$

7

⑴ $y = x + \dfrac{4}{x},\ \ y' = 1 - \dfrac{4}{x^2},\ \ y'' = \dfrac{8}{x^3}$

$y' = 0$のとき　$x = \pm 2$

$x = 2$のとき　$y'' = 1 > 0$　　　$y = 4$

$x = -2$のとき　$y'' = -1 < 0$　　　$y = -4$

$\therefore$　$x = 2$のとき極小値　4

$x = -2$のとき極大値　-4　をとる

⑵ $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$, $y'=\dfrac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$, $y''=\dfrac{2(x^3+3x^2-1)}{(x^2+x+1)^3}$

$y'=0$のとき $x=0,\ -2$

$x=0$のとき $y''=-2<0$ $y=1$

$x=-2$のとき $y''=\dfrac{2}{9}>0$ $y=-\dfrac{1}{3}$

∴ $x=0$のとき極大値 1

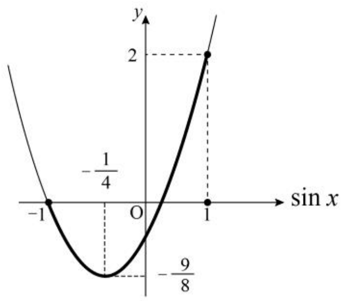
$x=-2$のとき極小値 $-\dfrac{1}{3}$

8

$f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$f'(x)=a-\sin x+\cos 2x$

$f(x)$が極値をもつとき $f'(x)=0$ より $a-\sin x+\cos 2x=0$



$$\begin{aligned}a&=\sin x-\cos 2x\\&=\sin x-(1-2\sin^2 x)\\&=2\sin^2 x+\sin x-1\\&=2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\end{aligned}$$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ において $y=2\left(\sin x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$ と $y=a$ の交点を考えると $-\dfrac{9}{8}\leqq a\leqq 2$

∴ 極値を持たない a の範囲は $a<-\dfrac{9}{8}$, $2<a$

9

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ とすると

$f(x)\fallingdotseq\sqrt[3]{a}+\dfrac{1}{3\times\sqrt[3]{a^2}}(x-a)$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1057}&\fallingdotseq\sqrt[3]{1000}+\frac{1}{3\times\sqrt[3]{1000^2}}(1057-1000)\\&=10+\frac{1}{300}\times 57\\&=10.19\end{aligned}$$

($1057^{\frac{1}{3}}=10.1865001\cdots\cdots$)

10

$f(x)=\cos x$　とすると

$f(x) \fallingdotseq \cos a-\sin a\times(x-a)$

$$\cos 29^\circ=\cos(30^\circ-1^\circ)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\times\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\fallingdotseq 0.866+0.500\times 0.0175$$

$$=0.87475$$

$$\left(\begin{array}{l} a=30^\circ=\dfrac{\pi}{6} \\ x=29^\circ \text{ とすると} \\ x-a=29^\circ-30^\circ=-1^\circ \\ 1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\fallingdotseq 0.0175 \end{array}\right)$$

（$\cos 29^\circ=0.874619707\cdots\cdots$）

$\therefore\quad \cos 29^\circ \fallingdotseq 0.87$

11

⑴　$f(x)=\log\{ax+b(1-x)\}-x\log a-(1-x)\log b$

$$f'(x)=\frac{a-b}{ax+b(1-x)}-\log a+\log b$$

$$f''(x)=\frac{-(a-b)^2}{\{(a-b)x+b\}^2}=-\left\{\frac{a-b}{(a-b)x+b}\right\}^2$$

題意より　$a>b>0$　すなわち　$a-b\neq 0$

よって　$f''(x)<0$　が常に成り立つ

⑵　$f(x)$は $0<x<1$ で微分可能なので

平均値の定理より　$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$　を満たす c が存在する

$$f'(c)=\frac{(\log a-1\times\log a)-(\log b-\log b)}{1-0}=\frac{0-0}{1}=0$$

これより　$f'(c)=0$　となる　c　が $0<c<1$ で存在することがわかる

また，⑴より $f(x)$は上に凸のグラフなので

$f'(c)=0$　$(0<c<1)$ となる c はただ 1 つだけ存在する

⑶　⑴，⑵より $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	最大	↘	0

$0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x) \geqq 0$ より

$$\log\{ax + b(1-x)\} - x\log a - (1-x)\log b \geqq 0$$

$$\log\{ax + b(1-x)\} \geqq x\log a + (1-x)\log b$$

$$\log\{ax + b(1-x)\} \geqq \log a^x \times b^{1-x}$$

$e > 1$ より　$ax + b(1-x) \geqq a^x b^{1-x}$

よって不等式が成り立つ

12

⑴　$r = \dfrac{3}{2+\sin\theta}$

$r(2+\sin\theta) = 3$

$2r + r\sin\theta = 3$

$2r = 3 - r\sin\theta$

両辺を 2 乗すると

$(2r)^2 = (3 - r\sin\theta)^2$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$

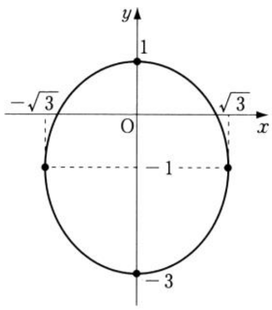
$4(x^2+y^2) = (3-y)^2$

$4x^2 + 4y^2 = 9 - 6y + y^2$

$4x^2 + 3y^2 + 6y = 9$

$4x^2 + 3(y+1)^2 = 12$

$\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$



長軸 4　短軸 $2\sqrt{3}$ のたて長のだ円

⑵ $4x^2+3(y+1)^2=12$ に $y=0$ を代入すると

$$4x^2+3=12$$
$$x^2=\frac{9}{4}$$

$x>0$ より点 P は$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

また，$4x^2+3(y+1)^2=12$ の両辺を x で微分すると

$$8x+6(y+1)\times\frac{dy}{dx}=0$$

$y\neq-1$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{3(y+1)}$

点 P における接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4\times\frac{3}{2}}{3(0+1)}=-\dfrac{6}{3}=-2$

求める接線は傾き -2，点$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$を通るので

$$y-0=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)\qquad\therefore\ y=-2x+3$$

13

$$\begin{cases}x(t)=e^{at}\cos t\\ y(t)=e^{at}\sin t\end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt}=ae^{at}\cos t+e^{at}(-\sin t)$$
$$=e^{at}(a\cos t-\sin t)$$
$$\frac{dy}{dt}=ae^{at}\sin t+e^{at}\cos t$$
$$=e^{at}(a\sin t+\cos t)$$
$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$
$$=(e^{at}(a\cos t-\sin t),\ e^{at}(a\sin t+\cos t))$$

14

(1) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{v} = (e^t(\cos t - \sin t),\ \ e^t(\sin t + \cos t))$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t\,(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t\,(\cos t + \sin t) + e^t(-\sin t + \cos t) = 2e^t \cos t$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{a} = (-2e^t \sin t,\ \ 2e^t \cos t)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (e^t \cos t,\ \ e^t \sin t) = e^t(\cos t,\ \ \sin t)$

$\overrightarrow{v} = e^t(\cos t - \sin t,\ \ \sin t + \cos t)$

以上より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \left|e^t\right| \times \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = e^t$

$$\left|\overrightarrow{v}\right| = \left|e^t\right| \times \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}$$

$$= e^t \times \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)}$$

$$= \sqrt{2}e^t$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{より} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

同様に

$$\cos\theta_2 = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{a}\right|} = \frac{e^t \cos t \times (-2e^t \sin t) + e^t \sin t \times 2e^t \cos t}{e^t \cdot 2e^t} = 0$$

より $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$