

1 章 微分法

2 節 平均値の定理とその応用

A

20

$f(x)$ は閉区間 $[0, 2\pi]$ で連続

开区間 $(0, 2\pi)$ で微分可能

$$f(0) = \sin 0 = 0, \quad f(2\pi) = \sin 2\pi = 0 \quad \therefore \quad f(0) = f(2\pi) = 0$$

このとき、ロールの定理より $f'(c) = 0$ を満たす c が存在する。

$$f'(c) = \cos c = 0 \quad \therefore \quad c = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

これらの値は、区間 $[0, 2\pi]$ に含まれる。

21

$f(x)$ は閉区間 $[0, 2\pi]$ で連続

开区間 $(0, 2\pi)$ で微分可能

$$f(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1$$

$$f(2\pi) = \cos 2\pi - \sin 2\pi = 1 \quad \therefore \quad f(0) = f(2\pi) = 1$$

このとき、ロールの定理より $f'(c) = 0$ を満たす c が存在する。

$$f'(c) = -\sin c - \cos c = 0$$

$$-\cos c = \sin c$$

$$-1 = \frac{\sin c}{\cos c}$$

$$-1 = \tan c \quad \therefore \quad c = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

- (1)
- $f(x) = x^2$
- は閉区間
- $[0, 3]$
- で連続

开区間 $(0, 3)$ で微分可能なので、平均値の定理より

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c)$$

となる c が存在する。

$$\text{このとき, } \frac{3^2 - 0^2}{3 - 0} = 2 \cdot c \quad c = \frac{3}{2} \quad (0 < c < 3 \text{ に適する})$$

- (2)
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
- は閉区間
- $[1, 4]$
- で連続

开区間 $(1, 4)$ で微分可能なので、平均値の定理より

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c)$$

となる c が存在する。

$$\text{このとき, } \frac{\sqrt{4^2 - 1} - \sqrt{1^2 - 1}}{3} = \frac{1 \times 2c}{2\sqrt{c^2 - 1}} \quad \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - 1}} \quad c^2 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore c = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$1 < c < 4 \text{ より } c = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

- (3)
- $f(x) = \log x$
- のとき、平均値の定理より

$$\frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = f'(c) \text{ となる } c \text{ が存在する}$$

$$\frac{\log e - \log 1}{e - 1} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{c} \quad \therefore c = e - 1 \quad (1 < c < e \text{ に適する})$$

- (4)
- $f(x) = \sin^{-1} x$
- のとき、平均値の定理より
- $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$
- となる
- c
- が存在する

$$\frac{\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0)}{1 - 0} = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \quad \therefore c = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \quad (0 < c < 1 \text{ のため})$$

- (1) $\frac{0}{0}$ の不定形であるから、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^3 - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - x - 6)'}{(x^3 - 8)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 1}{3x^2} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

別解 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{x^2+2x+4} = \frac{7}{12}$

- (2) $\frac{0}{0}$ の不定形であるから、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} \\ &= 2\end{aligned}$$

- (3) $\frac{0}{0}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\log x)'}{(x-1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1\end{aligned}$$

- (4) $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} \\ &= 0\end{aligned}$$

(5) $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\sin x)}{\log x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log(\sin x))'}{(\log x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\sin x} \times \cos x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\tan x}\end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x'}{(\tan x)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1$$

(6) $\frac{0}{0}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x}\end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(2x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0\end{aligned}$$

24

$$(1) \quad f(x) = x^2 \quad \text{より} \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

$$b^2 - a^2 = (b-a) \times 2c$$

$$2c = \frac{b^2 - a^2}{b-a} \quad \therefore c = \frac{1}{2}(a+b)$$

($a < c < b$ を満たす)

$$(2) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{より} \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = (b-a) \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$2\sqrt{c} = \frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

$$2\sqrt{c} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

$$2\sqrt{c} = \sqrt{b} + \sqrt{a}$$

$$4c = (\sqrt{b} + \sqrt{a})^2 \quad \therefore c = \frac{1}{4}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

25

$$f(x) = x^2 + px + q \quad \text{について}$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h \quad \text{より}$$

$$(a+h)^2 + p(a+h) + q = a^2 + pa + q + \{2(a+\theta h) + p\} \times h$$

$$a^2 + 2ah + h^2 + ap + ph + q = a^2 + pa + q + 2h(a+\theta h) + ph$$

$$h^2 = 2h^2\theta$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2}$$

26

$$f(x) = \log x \quad \text{とおくと} \quad x > 0 \quad \text{より}$$

$[x, x+1]$ で連続, $(x, x+1)$ で微分可能なので

平均値の定理より $f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$ となる c が $x < c < x+1$ で存在する。

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{より} \quad \frac{1}{c} = \frac{\log(1+x) - \log x}{1}$$

$$0 < x < c < x+1 \quad \text{より} \quad \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1} < \log(1+x) - \log x < \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+1} < \log \frac{1+x}{x} < \frac{1}{x}$$

以上より $\frac{1}{x+1} < \log \frac{1+x}{x}$ が成り立つ。

27

$f(x) = \sin x$ とおくと、平均値の定理より

$$\frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} = f'(c) \text{ となる } c \text{ が } \alpha < c < \beta \text{ で存在する}$$

$$f'(x) = \cos x \text{ より } f'(c) = \cos c \leq 1$$

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } 0 < c < \frac{\pi}{2} \quad \text{よって } \cos c \neq 1 \quad \therefore \cos c < 1$$

$$\text{よって } \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} = \cos c < 1$$

$$\text{すなわち } \sin \beta - \sin \alpha < \beta - \alpha$$

28

(1) $\frac{0}{0}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x - \tan x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - (\sec^2 x)} \end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(1 - \sec^2 x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-2 \sec x \cdot \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x}{-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 - x^2 + 1)'}{(e^x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{e^x}\end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 - 2x)'}{(e^x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x - 2}{e^x}\end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6x - 2)'}{(e^x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0\end{aligned}$$

(3) $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log(\tan 2x))'}{(\log(\tan x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\tan 2x} \times \frac{1}{\cos^2 2x} \times 2}{\frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \tan x \cdot \cos^2 x}{\tan 2x \cdot \cos^2 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin 2x \cdot \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin 2x}{\sin 4x}\end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形なので、ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(2 \sin 2x)'}{(\sin 4x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \cos 2x \cdot 2}{\cos 4x \cdot 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos 2x}{\cos 4x} \\ &= 1\end{aligned}$$

(4) $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので，ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(ax+1)}{\log(bx+1)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log(ax+1))'}{(\log(bx+1))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{ax+1} \times a}{\frac{1}{bx+1} \times b} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(bx+1)}{b(ax+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(abx+a)'}{(abx+b)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{ab} = 1\end{aligned}$$

29

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x-3}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right)}{\frac{1}{x}}$ ロピタルの定理より

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6}{x^2-9}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{6x^2}{x^2-9} \right) \quad \text{ロピタルの定理より} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-6x^2)'}{(x^2-9)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x}{2x} = -6\end{aligned}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x - \sec x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x} \right)$ ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)'}{(\cos x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} \\ &= 0\end{aligned}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ において $y = \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ とし両辺の対数をとると

$$\log y = \frac{1}{x} \log \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{\tan x}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\log \frac{\tan x}{x} \right)'}{x'} \quad \longleftarrow \text{ロピタルの定理より}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \sin 2x)'}{(x \sin 2x)'} \quad \longleftarrow \text{ロピタルの定理より}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{\sin 2x + 2x \cos 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - 2 \cos 2x)'}{(\sin 2x + 2x \cos 2x)'} \quad \longleftarrow \text{ロピタルの定理より}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{4 \cos 2x - 4x \sin 2x}$$

$$= 0$$

$\log y \rightarrow 0$ より

$$y \rightarrow 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ において $y = x^{\frac{1}{x}}$ とすると $\log y = \frac{\log x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)'}{x'} \quad \longleftarrow \text{ロピタルの定理より}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 0$$

$\log y \rightarrow 0$ より $y \rightarrow 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

- (1) $f(x) = x + \frac{2}{x}$ の $[1, 3]$ における平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} &= \frac{\left(3 + \frac{2}{3}\right) - \left(1 + \frac{2}{1}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- (2) 接点を $(c, f(c))$ とすると、接線の傾きは

$$f'(c) = 1 - \frac{2}{c^2}$$

- (1)の平均変化率と等しい傾きとなることから

$$\begin{aligned}1 - \frac{2}{c^2} &= \frac{1}{3} \\ c^2 &= \pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$1 < c < 3 \quad \text{より} \quad c = \sqrt{3} \quad \therefore \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$$

- 2点 $(0, 0)$, $(4, 2)$ を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{2 - 0}{4 - 0} = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

- 曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の任意の点 (c, \sqrt{c}) , $0 < c < 4$ における接線の傾きは

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{より} \quad \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

- よって、接線の方程式は

$$\begin{aligned}y - \sqrt{c} &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(x - c) \\ y &= \frac{1}{2\sqrt{c}}x + \frac{1}{2}\sqrt{c}\end{aligned}$$

- ①, ②より $c = 1$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$