1講　初等関数(1)

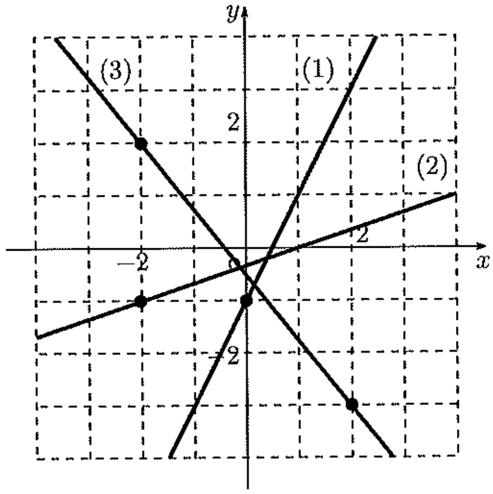
▷ **練習問題**

1. (基本)　次の直線を方眼紙に描いた後，その直線の方程式を求めなさい．

(1) 傾きが 2，y 切片が -1

(2) 傾きが $\dfrac{1}{3}$，点 $(-2,\ -1)$ を通る

(3) 2 点 $(-2,\ 2)$, $(2,\ -3)$ を通る



(1) 直線の方程式 (i) より　$y = 2x - 1$

(2) 直線の方程式 (ii) より

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - (-2))$$

よって　$y = \dfrac{1}{3}(x+2) - 1 = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$

(3) 直線の方程式 (iii) より

$$(2 - (-2))(y - (-3)) = (-3-2)(x-2)$$

よって　$4(y+3) = -5(x-2)$

よって　$y = -\dfrac{5}{4}(x-2) - 3 = -\dfrac{5}{4}x - \dfrac{1}{2}$

2. (基本)　次の放物線の方程式を求めなさい．その後，方程式を用いて表の放物線上の点を決定し，これらの点を滑らかに結んでグラフを方眼紙に描きなさい．

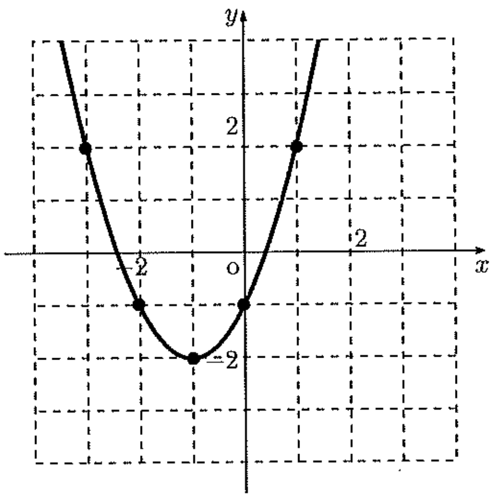
(1) 軸が $x = -1$，頂点が $(-1,\ -2)$，y 軸との共有点が $(0,\ -1)$

放物線の方程式 (ii) より

$y = a(x+1)^2 - 2$

y 切片が -1 であるので　$-1 = a(0+1)^2 - 2$

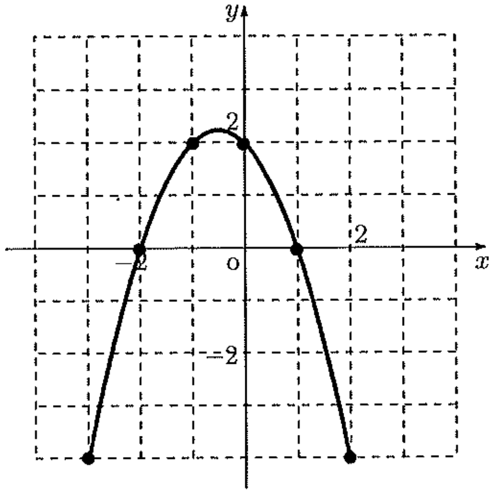
よって $a = 1$　放物線の方程式は $y = (x+1)^2 - 2$



表：放物線上の点

x	-3	-2	-1	0	1
y	2	-1	-2	-1	2

(2) x 軸と 2 点 $(-2, 0)$, $(1, 0)$ で交わり，y 軸との共有点が $(0, 2)$



放物線の方程式 (iii) より

$y = a(x-(-2))(x-1)$

y 切片が 2 であるので　$2 = a(0+2)(0-1)$

よって　$a = -1$　放物線の方程式は

$y = -(x+2)(x-1)$

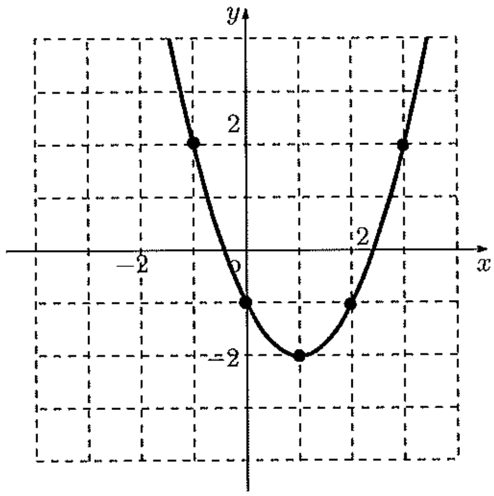
表：放物線上の点

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-4	0	2	2	0	-4

3. (基本)　2 次関数 $y = x^2 - 2x - 1$ のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフを方眼紙に描きなさい．

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

放物線の方程式 (ii) と較べて，軸は $x = 1$，頂点は $(1, -2)$．



グラフを描くために放物線上の点をいくつか求める．

表：放物線上の点

x	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2

これらの点を方眼紙にかき入れて滑らかな曲線で結ぶと放物線は図のようになる．

4. (基本)　次の 2 次関数のグラフと x 軸との共有点の個数を求めなさい．

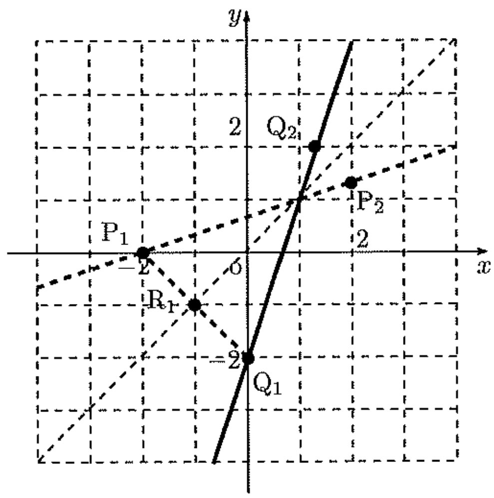
(1) $y = 2x^2 - x + 1$　　　(2) $y = x^2 - 2x - 1$

(1) 2 次方程式 $2x^2 - x + 1 = 0$ の判別式は　$D = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = -7 < 0$
よって，x 軸との共有点はなし．

(2) (1) と同様にして，$D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1) = 8 > 0$　よって，x 軸との共有点の個数は 2

5. (標準) $f(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ とする．関数 $y=f(x)$ に対して，次の問いに答えなさい．

(1) $x_1=-2, x_2=2$ のときの y の値 y_1，y_2 を小数第1位 (小数第2位を四捨五入) まで求めなさい．2点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を方眼紙にかき入れ，それを通る直線を点線で引きなさい．



$$y_1=\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0,\ y_2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\fallingdotseq 1.3$$

P_1，P_2 および直線は図の通り．

(2) (1) で求めた2点の x 座標と y 座標を入れかえた点 $Q_1(y_1,\ x_1)$，$Q_2(y_2,\ x_2)$ を方眼紙にかき入れ，さらに直線 $y=x$ を点線でかき入れなさい．P_1 と Q_1 を点線で結び，直線 $y=x$ との交点を R_1 としたとき，線分 P_1R_1 と R_1Q_1 の長さを求めなさい．

$Q_1(0,\ -2)$，$Q_2(1.3,\ 2)$ と直線 $y=x$ は図の通り．P_1 と Q_1 を結ぶ線分と交点 R_1 も図の通り．R_1 の座標は $(-1,\ -1)$ であるので，線分 P_1R_1 と R_1Q_1 の長さはともに $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\fallingdotseq 1.4$

(3) (2) で求めた2点 Q_1，Q_2 を通る直線を引きなさい．この直線は与えられた直線の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフになっていることを考えて，$f^{-1}(x)$ を求めなさい．

$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ を x について解くと　$x=3y-2$　x と y を入れかえて逆関数は　$y=3x-2$

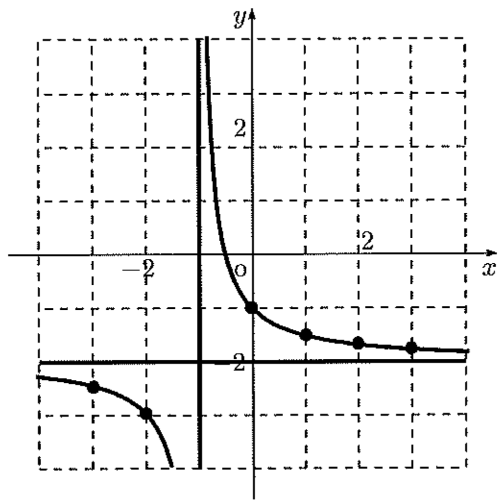
よって $f^{-1}(x)=3x-2$

6. (基本) 双曲線 $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}$ の漸近線を求め，そのグラフと漸近線を方眼紙に描きなさい．

$$y=\frac{-2(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-2$$

よって，漸近線は　$x=-1,\ y=-2$

双曲線上の点をいくつか求める．表の x に対する y の値を小数第1位 (第2位を四捨五入) まで求める．



表：双曲線上の点

x	-3	-2	0	1	2	3
y	-2.5	-3	-1	-1.5	-1.7	-1.8

これらの点を方眼紙にかき入れて滑らかな曲線で結ぶと双曲線は図のようになる．

2講　初等関数 (2)

▷ 練習問題

1. (基本)　次の値を求めなさい．ただし，(1)〜(3) は値を求めるまえに a^p の形にしなさい．

(1) $2^2 \div 2^3$　　(2) $\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}$　　(3) $\dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$　　(4) $\log 2e - \log 2$　　(5) $\dfrac{\log_3 27}{\log_3 9}$

(1) $2^2 \div 2^3 = 2^{2-3} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

(2) $\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}} = 3^{\frac{5}{3} \times (-\frac{3}{5})} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

(3) $\dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

(4) $\log 2e - \log 2 = \log \dfrac{2e}{2} = \log e = 1$

(5) $\dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3 \log_3 3}{2 \log_3 3} = \dfrac{3}{2}$

2. (基本)　$-2 \log \dfrac{1}{2}$，0，$\log 3$　を小さい順に並べなさい．

$-2 \log \dfrac{1}{2} = -2 \log 2^{-1} = \log (2^{-1})^{-2} = \log 2^{(-1)\times(-2)} = \log 2^2 = \log 4$

前ページ公式 (3) より　$0 = \log 1$　また　$\log 1 < \log 3 < \log 4$　であることを用いると

$0 < \log 3 < -2 \log \dfrac{1}{2}$

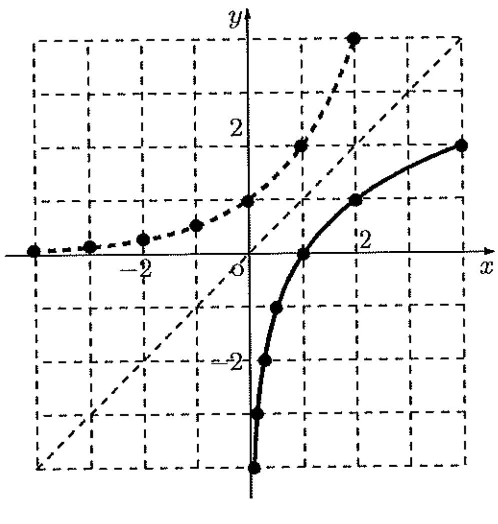
3. (標準)　$y = 2^x$　と　$y = \log_2 x$　に関して，次の問いに答えなさい．

(1) $y = \log_2 x$　は　$y = 2^x$　の逆関数であることを示しなさい．

$y = 2^x$ を x について解く．対数関数の定義より
$x = \log_2 y$　x と y を入れかえると　$y = \log_2 x$
よって逆関数になっている．

(2) $y = 2^x$ のとき，表の y を小数第 1 位 (第 2 位は四捨五入) まで求めなさい．表の点を方眼紙にかき入れ，それらを滑らかな曲線 (点線) で結びなさい．

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0.1	0.1	0.3	0.5	1	2	4



(3) 直線 $y = x$ を点線でかき入れなさい．また，(2) の点の x 座標と y 座標を入れかえた点を方眼紙にかき入れ，それらを滑らかな曲線 (実線) で結んで $y = \log_2 x$ のグラフを描きなさい．

4. (標準)　次の方程式を解きなさい．

(1) $3^{2x} - 3^x - 2 = 0$　　　(2) $2^x + 9 \cdot 2^{-x} = 6$

(1) $3^{2x} = (3^x)^2$　であるので $t = 3^x$ とおくと与式は　$t^2 - t - 2 = 0$　　よって　$(t-2)(t+1) = 0$

よって　$t = 2, -1$　　ここで　$t = 3^x > 0$ であるので　$(t =)\ 3^x = 2$　　よって　$x = \log_3 2$

(2) $2^x + \dfrac{9}{2^x} = 6$　　ここで $t = 2^x$ とおくと　$t + \dfrac{9}{t} = 6$　　よって　$t^2 - 6t + 9 = 0$

よって　$(t-3)^2 = 0$　　よって　$(t =)\ 2^x = 3$　　よって　$x = \log_2 3$

5. (基本)　次の問いに答えなさい．

(1) 加法定理を用いて $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$　を $\sin\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\dfrac{\pi}{4}$，$\sin\dfrac{\pi}{6}$，$\cos\dfrac{\pi}{6}$　で表しなさい．

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

(2) $\sin\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めなさい．

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めなさい．

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

6. (基本)　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$　のとき，次の問いに答えなさい．

(1) $\cos\alpha$ を求めなさい．

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるので　$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

(2) 2倍角の公式　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$　を用いて，$\sin 2\alpha$ を求めなさい．

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$