７講　図形と式（２次曲線）　練習問題　解答

［１］（基本）　次の円の方程式を求めなさい．

(1)　中心が点$(-3,2)$，半径4　　　(2)　中心が点$(-3,2)$で，点$(1,0)$を通る

［解答］

(1)　$(x+3)^2+(y-2)^2=4^2$

(2)　求める円を　$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$　とおくと　点$(1,0)$を通ることから

$4^2+(-2)^2=r^2$　よって　求める円の方程式は　$(x+3)^2+(y-2)^2=20$

［２］（標準）　方程式$x^2+y^2+x+y=0$で表される円の中心の座標と半径を求めなさい．

［解答］　変形すると　$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$　より，中心$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，半径$\frac{1}{\sqrt{2}}$

［３］（基本）　（基本）　次の方程式で表される楕円の焦点の座標と長軸の長さを求めなさい．

(1)　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　　(2)　$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

［解答］

(1)　$a=4$，$b=3$　より$c=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$　よって　焦点の座標$\left(\sqrt{7},0\right)$，$\left(-\sqrt{7},0\right)$，長軸の長さ8

(2)　$a=3$，$b=4$　より$c=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$　よって　焦点の座標$\left(0,\sqrt{7}\right)$，$\left(0,-\sqrt{7}\right)$，長軸の長さ8

［４］（基本）　２点$\left(0,3\right)$，$\left(0,-3\right)$を焦点とし，短軸の長さが8の楕円の方程式を求めなさい．

［解答］

$a=4$，$c=3$　より　$b=\sqrt{4^2+3^2}=5$　よって　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

［５］（基本）　次の方程式で表される双曲線の焦点の座標，主軸の長さおよび漸近線の方程式を求めなさい.

(1)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=-1$

［解答］

(1)　$a=3$，$b=4$　より $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって　焦点の座標 $(5,0)$，$(-5,0)$，主軸の長さ 6，漸近線の方程式 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$

(2)　$a=3$，$b=4$　より $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって　焦点の座標 $(0,5)$，$(0,-5)$，主軸の長さ 8，漸近線の方程式 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$

［６］（基本）　２点 $(0,5)$，$(0,-5)$ を焦点とし，主軸の長さが 4 の双曲線および漸近線の方程式を求めなさい.

［解答］

$b=2$，$c=5$　より　$a=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

よって　$\dfrac{x^2}{21}-\dfrac{y^2}{4}=-1$，漸近線の方程式　$y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{21}}x$

［７］（基本）　次の方程式で表される放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めなさい.

(1)　$y^2=2x$　　(2)　$y^2=-4x$　　(3)　$y=\dfrac{1}{4}x^2$

［解答］

(1)　$y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}x$　より　焦点の座標 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，準線 $x=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$y^2=4\cdot(-1)x$　より　焦点の座標 $(-1,0)$，準線 $x=1$

(3)　$x^2=4\cdot 1y$　より　焦点の座標 $(0,1)$，準線 $y=-1$

［８］（標準）　焦点の座標が $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，準線が $y=\dfrac{1}{2}$ である放物線の方程式を求めなさい.

［解答］

$x^2=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)y$　より　$x^2=-2y$　すなわち　$y=-\dfrac{1}{2}x^2$

８講　平面のベクトル　練習問題　解答

［１］(標準) １辺の長さが２の正六角形ＡＢＣＤＥＦにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を使って表しなさい

［解答］

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{b}$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{BI}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{a}+\vec{b}$　　（$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$）

I

（3）　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BI}}=\vec{b}+(-\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}+2\vec{b}$　　（$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{BI}}$）

（4）　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\vec{b}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=4$　より　$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|}=\dfrac{\vec{b}}{2}$

［２］ (基本)次の計算をしなさい．

［解答］

（1）　$2(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}+4\vec{b}$

（2）　$\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})+\dfrac{1}{3}(3\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$

（3）　$3(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})-2(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=-\vec{a}+5\vec{b}-5\vec{c}$

［３］ (標準)次の等式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を使って表しなさい．

（1）　$3(\vec{x}-\vec{a})-2(\vec{x}-\vec{b})=\vec{0}$　より　$\vec{x}-3\vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$　よって　$\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}$

（2）　$3(2\vec{a}+\vec{b}-\vec{x})=\vec{x}-\vec{a}$　より　$7\vec{a}+3\vec{b}=4\vec{x}$　よって　$\vec{x}=\dfrac{7}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

［４］(標準)　３ 点Ａ(－1，2)，Ｂ(2，3)，Ｃ(3，－1)に対して，次のベクトルを成分で表し，また，その大きさを求めなさい．

［解答］

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2-(-1),3-2)=(3,1)$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1-2,2-3)=(-3,-1)$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

（3）　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3-2,-1-3)=(1,-4)$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}=(0,0)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=0$

別解

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\vec{0}=(0,0)$

［５］（標準）　次の２つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積と，$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角θを求めなさい.

(1) $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(5,\ -1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 5+2\cdot(-1)=13$

$\cos\theta=\dfrac{13}{\sqrt{3^2+2^2}\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　（ $0\leqq\theta\leqq\pi$ ）　より　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ 6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 2+(-1)\cdot 6=0$

$\cos\theta=\dfrac{0}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+6^2}}=0$　（ $0\leqq\theta\leqq\pi$ ）　より　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\vec{a}=(-1,\ 3\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdot\sqrt{3}+3\sqrt{3}\cdot(-2)=-7\sqrt{3}$

$\cos\theta=\dfrac{-7\sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　（ $0\leqq\theta\leqq\pi$ ）　より　$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$

［６］（標準）２つのベクトル$\vec{a}=(x,-1)$と $\vec{b}=(6,3)$ が次の条件を満たすxの値を求めなさい.

(1)　平行　　(2)　垂直　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

［解答］

(1)　$\vec{a}=k\vec{b}$　より　$(x,-1)=k(6,3)$　よって　$\begin{cases}x=6k\\-1=3k\end{cases}$　これを解いて　$x=-2$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　より　$6x-3=0$　よって　$x=\dfrac{1}{2}$

(3)　$\vec{a}+\vec{b}=(x+6,2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(x-6,-4)$　より　$(x+6)(x-6)-8=0$　よって　$x=\pm 2\sqrt{11}$