３章　集合と論理と統計

12 講　集合・写像・論理

練習問題

①　基本

⑴　$A \cap B = \{x \mid x = 6m,\ m \in \boldsymbol{Z},\ x \in \Omega\}$　　（Ω に属する 6 の倍数全体）

　　（$= \{6,\ 12,\ 18,\ 24, \cdots,\ 96\}$）

⑵　$|A| = |\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 100\}| = 50$

⑶　$|B| = |\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 99\}| = 33$

⑷　$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 33 - 16 = 67$

⑸　$|B^c| = |\Omega| - |B| = 100 - 33 = 67$

②　基本

⑴　$g \circ f(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2\ (= \sin^2 x)$，　$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$

　$g \circ h(x) = g(h(x)) = g(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$，　$h \circ g(x) = h(g(x)) = e^{x^2}$

$\therefore k \circ g(x) = k(g(x)) = (x^2)^3 = x^6$

⑵　全射であるが単射でないもの f

　（$\because \sin 0 = \sin \pi = 0$ より単射でない。

　　またすべての $y \in [-1,\ 1]$ に対して $y = \sin x$ となる x の存在は明らか）

　単射であるが全射でないもの h

　（$\because$ 単調増加なので単射　$e^x = 0$ となる x は存在しないので全射でない）

　全単射であるもの k，全射でも単射でもないもの g

③　標準

⑴　$\{1\} \cap \{2,\ 4\} = \phi$　より正しい。

⑵　$\{1\} \cup \{2,\ 3\} = \{1,\ 2,\ 3\}$　より　$\{1,\ 2,\ 3\}$ は $\{1,\ 3,\ 5\}$ の部分集合ではないので正しくない。

⑶　正しい。

⑷　例えば，部分集合 $\{1,\ 3,\ 5\}$ と $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ ○ & × & ○ & × & ○ & × \end{matrix}$ を対応させると部分集合と○×を 6 つ並べた順列と一対一対応する。よって正しい。

⑸　$2 \in \{2,\ \{3\}\}$　$\{2\} \in \{\{2\},\ 3\}$　$2 \fallingdotseq \{2\}$ より正しくない。

⑹　$x = -3$ とすれば $(-3)^2 > 4$ だが $-3 < 2$ なので正しくない。

⑺　$x = 3$　$y - 1$ が反例となるのでこれは正しくない。

⑻　対偶をとって $x \leqq 0$ か $y \leqq 0$ なら $x + y \leqq 0$ となるのでこれは正しい。

④　標準

逆　$x^2+y^2>1 \longrightarrow x+y>3$，偽

これは$x=y=1$とすると

$x^2+1^2>1$だが$1+1\leqq 3$となり反例が存在するので正しくない。

対偶　$x^2+y^2\leqq 1 \longrightarrow x+y\leqq 3$，真

これは　$x^2\leqq x^2+y^2\leqq 1$ より $-1\leqq x\leqq 1$

同様に　$-1\leqq y\leqq 1$となり　$-2\leqq x+y\leqq 2 \longrightarrow x+y\leqq 3$なのでこれは正しい。

⑤　標準

偽　反例は富士山で高さは 3776m である。このようにすべての x に対して $P(x)$ という命題の否定はある x が存在して $\overline{P(x)}$ である。