

3章 集合と論理と統計

まとめの問題

1 標準

- (1) 正しい。 (2) 正しい。
 (3) $A \cup A^c = \Omega$ = 全体集合なので, 正しくない
 (4) $A \cap A^c = \phi$ なので, 正しい
 (5) $B^c \supset A$ なので, $A \cap B \subset B^c \cap B = \phi$ つまり, $A \cap B = \phi$ となり, $A \cap B \neq \phi$ に矛盾する。よって, 正しくない
 (6) 正しい。 (7) $A \cap \phi = \phi$ より, 正しい

2 標準

- (1) 正しい (2) 正しい
 (3) 3000m 以上かつ 1000m 以下になることはないので, 正しくない
 (4) $x = -1, y = -2$ とすると, $xy > 0$ だが, $-1 > 0$ かつ $-2 > 0$ は正しくないので, $(x, y) = (-1, -2)$ はこの命題の反例。よって, 正しくない
 (5) これも(4)と同じ $(x, y) = (-1, -2)$ が反例となるので, 正しくない
 (6) 対偶をとると $x = 0 \rightarrow xy \leq 0$ となるが, もちろん, $x = 0$ ならば $xy = 0 \leq 0$ となり, この命題は正しい。よって, その対偶も正しい命題となる

3 標準

(1)

X	0	1	Y	2	4
確率	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(2) $E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{7}{10} = \frac{7}{10}$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{7}{10} = \frac{7}{10} \quad \text{ゆえに} \quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{10} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{21}{100}$$

(3) $E(Y) = 3, V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1$

(4) $V(4 - 5X) = (-5)^2 V(X) = \frac{21}{4}$

(5)

$Y-X$	1	2	3	4
確率	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

なぜなら, 例えば, $P(Y - X = 1) = P(Y = 2 \cap X = 1) = \frac{4}{10}$

$$(6) \quad E(XY) = 2 \times \frac{4}{10} + 4 \times \frac{3}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2 - \frac{7}{10} \times 3 = \frac{-1}{10}$$

(7) (5)の答えより,

$$E(Y - X) = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{2}{10} = \frac{23}{10}$$

$$(\text{別解}) \quad E(Y - X) = E(Y) - E(X) = 3 - \frac{7}{10} = \frac{23}{10}$$

$$(5) \text{の答えより, } E((Y - X)^2) = 1^2 \times \frac{4}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 4^2 \times \frac{2}{10} = \frac{67}{10}$$

$$\text{ゆえに, } V(Y - X) = E((Y - X)^2) - E((Y - X))^2 = \frac{67}{10} - \left(\frac{23}{10}\right)^2 = \frac{141}{100}$$

$$\begin{aligned} (\text{別解}) \quad V(Y - X) &= V(Y) - 2Cov(X, Y) + V(X) \\ &= 1 - 2\left(-\frac{1}{10}\right) + \frac{21}{100} = \frac{100 + 20 + 21}{100} = \frac{141}{100} \end{aligned}$$

4 発展

$$(1) \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$(2) \quad X, Y \text{ は独立より, } P(X \geq 3) P(Y \geq 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$(3) \quad P(X \geq 3) + P(Y \geq 3) - P(X \geq 3 \cap Y \geq 3) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

$$(4) \quad E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$(5) \quad E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6^2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\text{ゆえに, } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$(6) \quad E(X) + E(Y) = 7$$

$$(7) \quad X, Y \text{ は独立より, } E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

$$(8) \quad X, Y \text{ は独立より, } V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

$$(9) \quad X, Y \text{ は独立より, } V(X - 2Y) = V(X) + 4V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{3} = \frac{175}{12}$$