9講　行列

練習問題

[1] (1) 与式 $= \begin{pmatrix} 2+3 & 5+8 & -1+5 \\ 4+6 & -3+4 & 0+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 4 \\ 10 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(2) 与式 $= \begin{pmatrix} 4+1 & -5+9 \\ 2+2 & 3+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

(3) 与式 $= (4-3 \quad 2-1) = (1 \quad 1)$

(4) 与式 $= \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-(-2) \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

[2] (1) 与式 $= \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times(-4) & 2\times 1 \\ 2\times 3 & 2\times 2 & 2\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

(2) 与式 $= \left(\frac{1}{3}\times(-6) \quad \frac{1}{3}\times 0\right) = (-2 \quad 0)$

(3) 与式 $= \begin{pmatrix} (-1)\times 1 & (-1)\times 3 \\ (-1)\times(-5) & (-1)\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

(4) 与式 $= \begin{pmatrix} 4\times 3 \\ 4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

[3] (1) 与式 $= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\times 0 & 3\times 1 & 3\times 0 \\ 3\times(-1) & 3\times 0 & 3\times 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1+0 & 2+3 & 12+0 \\ 1+(-3) & 4+0 & 9+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 12 \\ -2 & 4 & 15 \end{pmatrix}$

(2) 与式 $= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\times 0 & 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 2 & 2\times 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 & 5-2 & 6-4 \\ 7-2 & 8-4 & 9-0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

[4] (1)

$$与式 = \begin{pmatrix} x-4 & 5-z \\ y-0 & -3-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから、

$$x-4=0,\ 5-z=0,\ y-0=0,\ -3-w=0$$

よって、

$$x=4,\ y=0,\ z=5,\ w=-3$$

（2）

$$与式=\begin{pmatrix} x-6 \\ 4+z \\ y+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから、

$$x-6=0,\ 4+z=0,\ y+0=0$$

よって、

$$x=6,\ y=0,\ z=-4$$

10講　連立1次方程式

練習問題

［1］（1）与式 $=1\times(-5)+3\times2=1$

（2）与式 $=(-3)\times2+2\times3=0$

（3）与式 $=1\times2+(-3)\times0+8\times6=50$

（4）与式 $=(-3)\times1+1\times(-1)+2\times4=4$

［2］（1）与式 $=(3\cdot1+1\cdot3\quad 3\cdot0+1\cdot(-1)\quad 3\cdot2+1\cdot0)=(6\quad -1\quad 6)$

（2）与式 $=\begin{pmatrix} 4\cdot2 & 4\cdot3 \\ 1\cdot2 & 1\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

（3）与式 $=\begin{pmatrix} -3\cdot1+4\cdot0 \\ 2\cdot1+(-5)\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

（4）与式 $=\begin{pmatrix} 4\cdot2+5\cdot0 & 4\cdot0+5\cdot1 \\ 6\cdot2+7\cdot0 & 6\cdot0+7\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$

［3］行列の積を用いて表すと、

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

係数行列および拡大係数行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

［4］（1） $AB=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot2+3\cdot(-1)&2\cdot(-3)+3\cdot2\\1\cdot2+2\cdot(-1)&1\cdot(-3)+2\cdot2\end{pmatrix}=E$$

よって、B は A の逆行列。

（2） $AB=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1\\-2&1\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\cdot2+(-1)\cdot(-2)&1\cdot1+(-1)\cdot1\\2\cdot2+2\cdot(-2)&2\cdot1+2\cdot1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$$

$=E$

よって、B は A の逆行列。

（3）

$$AB=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1}&0&0\\0&b^{-1}&0\\0&0&c^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a\cdot a^{-1}+0\cdot0+0\cdot0&a\cdot0+0\cdot b^{-1}+0\cdot0&a\cdot0+0\cdot0+0\cdot c^{-1}\\0\cdot a^{-1}+b\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+b\cdot b^{-1}+0\cdot0&0\cdot0+b\cdot0+0\cdot c^{-1}\\0\cdot a^{-1}+0\cdot0+c\cdot0&0\cdot0+0\cdot b^{-1}+c\cdot0&0\cdot0+0\cdot0+c\cdot c^{-1}\end{pmatrix}$$

$=E$

よって、B は A の逆行列。

［5］（1） 行列の積を用いて表すと、

$$\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

係数行列および拡大係数行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix},\quad\left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\3&-2&4\end{array}\right)$$

（2） $AB=\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&1\end{pmatrix}$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+1\cdot(-3)&1\cdot(-1)+1\cdot1\\3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)&3\cdot(-1)+(-2)\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5&0\\0&-5\end{pmatrix}=E$$

よって、B は A の逆行列。

（3）$A^{-1} = B$ だから、求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-2)\cdot 3 + (-1)\cdot 4 \\ (-3)\cdot 3 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$x = 2,\ y = 1$$

［6］A, B は正則だから、逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在する。

このとき、

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

よって、$B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列となるから、AB は正則である。