▶ 第 3 講の練習問題

1. （基本）次の極限を調べなさい．

(1) $\lim_{x\to 2}(x^3-2x+1)$

解．与式 $=2^3-2\cdot 2+1=5$

(2) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$

解．与式 $=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}(x-2)=-1-2=-3$

(3) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

解. 与式 $=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4}$

$=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)=2+2=4$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^2}$

解．x が 0 に限りなく近づくとき，$\dfrac{x-1}{x^2}$ は負で，その絶対値は限りなく大きくなるので，与式 $=-\infty$

(5) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x+1}$

解．与式 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{7x^2+1}$

解．$y=-x$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $y\to\infty$．与式 $=\lim_{y\to\infty}\dfrac{2y^2+3y+1}{7y^2+1}=$ $\lim_{y\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{y}+\frac{1}{y^2}}{7+\frac{1}{y^2}}=\dfrac{2}{7}$

(7) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x-3}$

解．与式 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{2-\frac{3}{x}}=\infty$

(8) $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})$

解．与式 $=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=\infty$

2. （標準）次の極限値を求めなさい．

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$

解．与式 $=\lim_{x\to 0}4\cdot\dfrac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

解．$0\leqq\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqq\dfrac{1}{|x|}$ であり，$x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{|x|}\to 0$ だから，与式 $=0$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-6}$

解. 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to-2}\frac{(x-5)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-2}\frac{x-5}{x-3}=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

解. 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$

解. 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=0$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{1-4^x}$

$y=-x$ とおくと，

与式 $\displaystyle=\lim_{y\to\infty}\frac{4^{-y}}{1-4^{-y}}$

$\displaystyle=\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{1}{4^y}}{1-\frac{1}{4^y}}=\frac{0}{1-0}=0$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\log_2(x+2)-\log_2 x)$

解. 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x+2}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(1+\frac{2}{x}\right)=\log_2 1=0$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

解. 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x^2(1+\cos 2x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}16\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\frac{1}{1+\cos 2x}$

$\displaystyle=16\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=8$

3.（発展）次の関数 $f(x)$ が $x=1$ で連続であるとき，a，b の値を求めなさい．[*1]

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+a}{x-1} & (x\neq1)\\ b & (x=1)\end{cases}$$

解. $f(x)$ が $x=1$ で連続であるとき，$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=b$ であるから

$$\lim_{x\to1}(x^2+x+a)=\lim_{x\to1}f(x)(x-1)=b\cdot0=0$$

左辺を計算して $2+a=0$．よって $a=-2$．さらに

$$b=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+2)=3$$

[*1] ヒント：$x^2+x+a=f(x)(x-1)$ の両辺を $x\to1$ として a を求める．

▶ 第 4 講の練習問題

1. （基本）関数 $f(x)=x^3$ を定義にしたがって微分しなさい.

解.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

2. （基本）次の関数を微分しなさい.

(1) $y=4x^6+5x^4-x^3+7x$

解. $y'=24x^5+20x^3-3x^2+7$

(2) $y=(x^2-1)(2x^2+x-3)$

解. $y'=2x(2x^2+x-3)+(x^2-1)(4x+1)=8x^3+3x^2-10x-1$

(3) $y=\dfrac{x-4}{x^2+x-2}$

解.$y'=\dfrac{1\cdot(x^2+x-2)-(x-4)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

$=\dfrac{-x^2+8x+2}{(x^2+x-2)^2}$

(4) $y=(x^2+x-1)^6$

解. $y'=6(x^2+x-1)^5(2x+1)$

(5) $y=x\sqrt[3]{x}$

解. $y'=(x^{\frac{4}{3}})'=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

(6) $y=x^2\sin x$

解. $y'=2x\sin x+x^2\cos x$

(7) $y=\sin 2x\cos x$

解. $y'=2\cos 2x\cos x+\sin 2x(-\sin x)=2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

(8) $y=\tan^2 x$

解. $y'=2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$

(9) $y=\log x^3$

解. $y'=(3\log x)'=\dfrac{3}{x}$

別. $y'=\dfrac{1}{x^3}\cdot 3x^2=\dfrac{3}{x}$

(10) $y=(\log x)^3$

解. $y'=3(\log x)^2\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{3(\log x)^2}{x}$

(11) $y=e^{2x}+e^{-2x}$

解. $y'=2e^{2x}-2e^{-2x}$

(12) $y=\dfrac{1+e^x}{1+2e^x}$

解. $y'=\dfrac{e^x(1+2e^x)-(1+e^x)\cdot 2e^x}{1+2e^x}$

$=-\dfrac{e^x}{1+2e^x}$

3. （標準）曲線 $y=\log x$ について，原点を通る接線の方程式を求めなさい．

解．接点の座標を $(t, \log t)$ とする．$y'=\dfrac{1}{x}$ であるから，接線の方程式は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{1}{t}x-1+\log t$$

これが原点を通るから $0=-1+\log t$．よって $t=e$．したがって接線の方程式は

$$y=\frac{1}{e}x$$

4. （発展）次の関数の最大値，最小値を求めなさい．

$$y=\sin x(1-\cos x)\quad (0\leqq x\leqq \pi)$$

解．

$$\begin{aligned} y'&=\cos x(1-\cos x)+\sin x\cdot\sin x=\cos x-\cos^2 x+(1-\cos^2 x)\\ &=-2\cos^2 x+\cos x+1=-(2\cos x+1)(\cos x-1)\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq \pi$ において，$y'=0$ となる x を求めると，

$$\cos x=-\frac{1}{2}\quad \text{のとき}\quad x=\frac{2}{3}\pi.\quad \cos x=1\quad \text{のとき}\quad x=0$$

したがって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

ゆえに，$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=0,\ \pi$ のとき最小値 0．

5. （発展）$x>0$ のとき，次の不等式を証明しなさい．

$$e^x>1+x$$

解．$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと

$$f'(x)=e^x-1$$

$x>0$ のとき $e^x>1$ であるから $f'(x)>0$．

よって $f(x)$ は区間 $x>0$ で増加する．

したがって $x>0$ のとき $f(x)>f(0)=0$．

ゆえに $e^x>1+x$．