２章　代数と幾何

11 講　複素数

練習問題

①　基本

⑴　$(4-3i)-(1-2i)=(4-1)+(-3-(-2))i=3-i$

⑵　$(2-3i)(-3+2i)=-6+4i+9i-6i^2=13i$

⑶　$i(2-3i)+\dfrac{-3-2i}{i}=2i-3i^2+\dfrac{-3i-2i^2}{i^2}=1+5i$

②　基本

⑴　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑵　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{-1\pm i}{2}$

⑶　与えられた方程式を因数分解し，

$$
\begin{aligned}
&x^4-x^3-x^2-2x\\
&=x(x^3-x^2-x-2)\\
&=x(x-2)(x^2+x+1)=0
\end{aligned}
$$

これより

$x=0,\quad x-2=0,\quad x^2+x+1=0$

よって，　$x=0,\ 2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

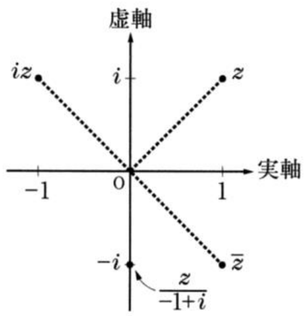
③　基本

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),$

$\bar{z}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right),$

$iz=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right),$

$\dfrac{z}{-1+i}=i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$



④　標準

⑴　$\begin{cases} 3a+2b=5 \\ a-4b=11 \end{cases}$　を解いて，$a=3,\ b=-2$

⑵　$z=\dfrac{2-i}{3-4i}=\dfrac{(2-i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\dfrac{2+i}{5}$

⑶　第 1 式：$(-1+i)z_1+(5+3i)z_2=9+3i$ の両辺に $\dfrac{-1-i}{2}$ をかけて

$z_1+(-1-4i)z_2=-3-6i$　（＊）

を得る。

次に,

第 2 式：$iz_1+(3-2i)z_2=4-3i$ の両辺に i をかけて

$-z_1+(2+3i)z_2=3+4i$　（＊＊）

を得る。

そこで,（＊）と（＊＊）の両辺を加えると

$$(1-i)z_2=-2i$$

$$z_2=\frac{-2i}{1-i}$$

$$z_2=\frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1-i$$

これを（＊）へ代入し，$z_1=2-3i$

⑤　標準

⑴　(a)　2　(b)　2θ　(c)　3　(d)　3θ　(e)　n　(f)　$n\theta$　(g)　$n\theta$

(h)　$-n\theta$　(i)　$-n$　(j)　$-n\theta$

⑵　$1+i$ を極形式で表すと

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，⑴で示したド・モアブルの定理を用いると,

$$(1+i)^{10}=\sqrt{2}^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=32\left(\cos\frac{5}{2}\pi+i\sin\frac{5}{2}\pi\right)$$

$$=32i$$

⑶　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく。

一方，$1-i$ を極形式で表すと，

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

これより，⑴で示したド・モアブルの定理を用いると，

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

よって，

$$r=2^{\frac{1}{4}},$$

$$2\theta=-\frac{\pi}{4}+2n\pi \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

したがって

$$z=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}+n\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}+n\pi\right)\right) \quad \text{ただし，}\ n=0,\ 1$$