▷ 第 1 章　まとめの問題

1. (基本)　放物線 $y = x^2 + x - 2$ に対して，次の問いに答えなさい．

(1) 軸，頂点を求めなさい．

$$y = x^2 + x - 2 = (x^2 + x) - 2 = \left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

よって，軸は $x = -\dfrac{1}{2}$，頂点は $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$

(2) x 軸との交点の x 座標および y 軸との交点の y 座標を求めなさい．

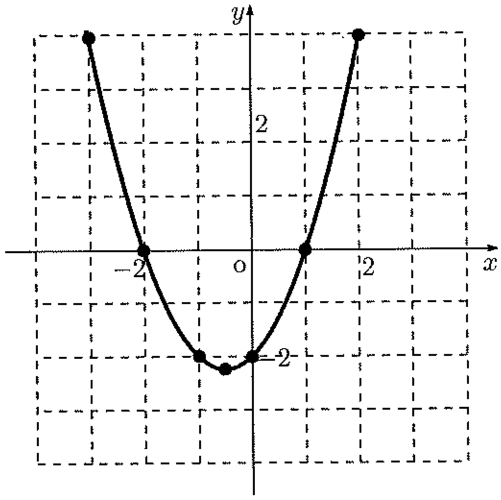
x 軸との交点の x 座標を求めるには $y = 0$ として　$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$
よって　$x = -2,\ 1$　　y 軸との交点の y 座標を求めるには $x = 0$ として　$y = -2$

(3) 放物線を方眼紙に描きなさい．

表のような放物線上の点と頂点を書き入れて，それらを滑らかな曲線で結ぶと放物線が得られる．

表：放物線上の点

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4	0	-2	-2	0	4



2.　(標準) 次の極限を調べなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2^x - 3^x)$

解．与式 $= \displaystyle\lim_{x\to\infty} 3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right) = -\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

解．与式 $= \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5}{7}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{7x}{\sin 7x} = \frac{5}{7}\cdot 1\cdot 1 = \frac{5}{7}$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+2t)^{\frac{1}{t}}$

解．与式 $= \displaystyle\lim_{t\to 0}\left((1+2t)^{\frac{1}{2t}}\right)^2 = e^2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{x^2}$

解．$y = -x$ とおくと，与式 $= \displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{\cos(-y)}{(-y)^2} = \lim_{y\to\infty}\frac{\cos y}{y^2}$．さらに $0 \leqq \left|\dfrac{\cos y}{y^2}\right| \leqq \dfrac{1}{|y|^2}$ であり，$y \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{|y|^2} \to 0$ だから，与式 $= 0$．

3. （標準）次の関数を微分しなさい.

(1) $y = \log_2 x$

解. $y' = \left(\dfrac{\log x}{\log 2}\right)' = \dfrac{1}{x\log 2}$

(2) $y = 2^x$

解. $y' = (e^{x\log 2})'$

$= e^{x\log 2} \cdot (x\log 2)'$

$= 2^x \log 2$

(3) $y = \sqrt[4]{2x+1}$

解. $y' = ((2x+1)^{\frac{1}{4}})'$

$= \dfrac{1}{4}(2x+1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2$

$= \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$

(4) $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

解. $y' = \dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

4. （発展）曲線 $y = e^{-x}$ 上の点 (t, e^{-t}) における接線と，x 軸および y 軸で囲まれてできる三角形の面積を $S(t)$ とする．ただし $t > -1$ とする．

(1) $S(t)$ を求めなさい．

解. $y' = -e^{-x}$ であるから，点 (t, e^{-t}) における接線の方程式は

$$y - e^{-t} = -e^{-t}(x - t)$$

x 軸との交点は, $y = 0$ として $-e^{-t} = -e^{-t}(x-t)$. 両辺を $e^{-t} > 0$ で割って $x = t+1$.
y 軸との交点は，$x = 0$ として $y - e^{-t} = te^{-t}$．よって $y = (t+1)e^{-t}$.
よって

$$S(t) = \frac{1}{2}\cdot(t+1)\cdot(t+1)e^{-t} = \frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-t}$$

(2) $S(t)$ の最大値を求めなさい．

解. $S'(t) = \dfrac{1}{2}(2(t+1)e^{-t} + (t+1)^2\cdot(-e^{-t})) = \dfrac{1}{2}(t+1)(1-t)e^{-t}$ だから，$S'(t) = 0$ となる $t > -1$ は $t = 1$ のみ．したがって増減表は以下の通り．

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

よって $t = 1$ で最大値 $\dfrac{2}{e}$ をとる.

5. （標準）次の不定積分あるいは定積分を求めなさい．

(1) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

解．$(1+x^2)'=2x$ なので

与式 $= \int \frac{1}{2}(1+x^2)'(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$

(2) $\int \frac{dx}{1-x^2}$

解．与式 $= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dt$

$= \frac{1}{2}(-\log|1-x|+\log|1+x|)$

$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

解．$x=\tan t$ とおくと

与式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt = [t]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{4}$

(4) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

解．$x=\sin t$ とおくと

与式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$

$= \frac{1}{2}[t+\frac{1}{2}\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

6.（発展）次の等式を証明しなさい．

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)\,dt = f(x)$

解．左辺の積分において置換積分を行う．$x-t=y$ とおくと

$$\int_0^x f(x-t)\,dt = -\int_x^0 f(y)\,dy = \int_0^x f(y)\,dy$$

両辺を x で微分すると，微積分の基本定理（練習問題 3）より

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^x f(y)\,dy = f(x)$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

解．左辺において $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと

$$(\text{左辺}) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt = (\text{右辺})$$

7. (標準) 次の数列の極限値を求めなさい.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

解. (与式)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$= 0$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n})$

解. (与式)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
$$= \infty$$

(3) $\lim_{n\to\infty} n^{-n}$

解. (与式) $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n} = 0$

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$

解. (与式) $= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

8. (標準) 漸化式 $a_{n+2}-a_{n+1}-2a_n=0$, $a_1=1$, $a_2=2$ を次の順に解きなさい.

(1) a_3, a_4, a_5 を求め, a_n を予想しなさい.

(2) 数学的帰納法により (1) の予想が正しいことを示しなさい.

解. (1) 順に計算すると

$a_3 = a_2 + 2a_1 = 4 = 2^2$

$a_4 = a_3 + 2a_2 = 8 = 2^3$

$a_5 = a_4 + 2a_3 = 16 = 2^4$

よって $a_n = 2^{n-1}$ と予想する.

(2) $n=1$ のときは $a_1 = 2^0 = 1$ なので正しい.

$n=2$ のときも $a_2 = 2^1 = 2$ なので正しい.

$n=k$ まで正しいとすると

$$a_{k+1} = a_k + 2a_{k-1} = 2^{k-1} + 2\cdot 2^{k-2} = 2\cdot 2^{k-1} = 2^k$$

よって $n=k+1$ のときも正しい.

数学的帰納法により $a_n = 2^{n-1}$ であることが示された.