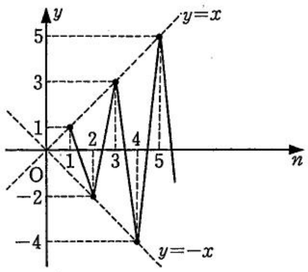
２節　数列の極限

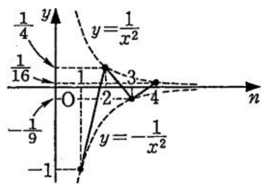
A 問題

31

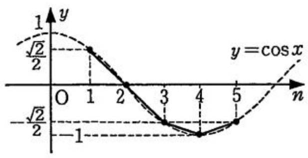
(1)　$(-1)^{n-1}n$　振動する



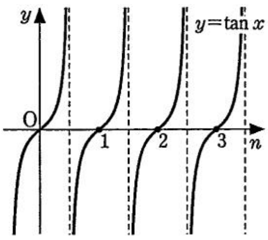
(2)　$\dfrac{(-1)^n}{n^2}$　0 に収束する



(3)　$\cos\dfrac{n\pi}{4}$　振動する



(4)　$\tan n\pi = 0$ より, 0 に収束する



32

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^2-3n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(2-\frac{3}{n}\right)=\infty$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-n^3+n)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(-1+\frac{1}{n^2}\right)=-\infty$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-2\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}n\left(1-2\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=\infty$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1}{n^2+5n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}=1$

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-2)}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-2}{n+3}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\infty$

(6)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\infty$

(7)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-3}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n-1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)-(n-1)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n-1}}=0$

(8)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{(n+3)-(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{2}=\infty$

33

(1)　初項2,　公比 -2　より

$a_n = 2\cdot(-2)^{n-1} = -(-2)\cdot(-2)^{n-1}$

$= -(-2)^n$　∴ $\lim_{n\to\infty}\{-(-2)^n\}$ は振動する

(2)　初項1,　公比 $-\frac{1}{3}$　より　$a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

∴ $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

(3)　初項6,　公比 $\frac{2}{3}$　より　$a_n = 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

∴ $\lim_{n\to\infty} 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$

(4)　初項6,　公比 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　より　$a_n = 6\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

∴ $\lim_{n\to\infty} 6\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = 0$

34

(1)　$\lim_{n\to\infty}(3^n - 2^{2n}) = \lim_{n\to\infty}(3^n - 4^n)$

$= \lim_{n\to\infty} 4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right\} = -\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1-(0.2)^n}{(0.5)^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{0.5}\right)^n - \left(\frac{0.2}{0.5}\right)^n\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{2^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right\} = \infty$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}-3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$

$= \frac{\frac{1}{2}\times 0 - 3}{0+1} = -3$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n - (\sqrt{2})^n}{(\sqrt{3})^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{(\sqrt{3})^n - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n\right\} = \infty$

(5)　$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1-2^n}{1+2^n} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

より，振動する

(6)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{(-2)^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

より，振動する

35

(1)　与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1 < 1-3x \leqq 1$ である。

$-2 < -3x \leqq 0$

$\frac{2}{3} > x \geqq 0$　∴ $0 \leqq x < \frac{2}{3}$

(2)　与えられた数列が収束するための必要十分条件は　$-1 < x^2 - 4x \leqq 1$ である。

$-1 < x^2 - 4x$　から　$x^2 - 4x + 1 > 0$ を解いて

$x < 2-\sqrt{3},\ \ 2+\sqrt{3} < x$　…①

$x^2 - 4x \leqq 1$ から　$x^2 - 4x - 1 \leqq 0$ を解いて

$2-\sqrt{5} \leqq x \leqq 2+\sqrt{5}$　…②

①，②の共通範囲を求めて　$2-\sqrt{5} \leqq x < 2-\sqrt{3},\ \ 2+\sqrt{3} < x \leqq 2+\sqrt{5}$

36

(1) $|r|<1$のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

だから $\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}}{2+r^n} = \dfrac{0}{2+0} = 0$

(2) $r = 1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}}{2+r^n}\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

(3) $r = -1$ のとき 数列は

$1,\ -\dfrac{1}{3}$，$1,\ -\dfrac{1}{3}$， ……となり振動する。

(4) $|r|>1$ のとき $0<\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ だから

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}}{2+r^n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{r}{2\cdot\left(\dfrac{1}{r}\right)^n+1} = \dfrac{r}{2\times 0+1} = r$

37

(1) $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

$= \dfrac{1}{4}\left\{\left(1-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{13}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4n+1}\right)$ よって $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4n+1}\right) = \dfrac{1}{4}$

(2) $S_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$ で

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} = \dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}\right)}$

$= -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}\right)$ より

$S_n = -\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}\right)\right\} = -\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{2n+1}\right)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{-\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{2n+1}\right)\right\} = \infty$

よって，この無限級数は発散し，和はない

38

(1) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots\cdots$ は，初項 $a=1$, 公比 $r=-\dfrac{1}{3}$ で, $|r|<1$ だから収束する。

和は $\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{3}{4}$

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{8}-\dfrac{27}{16}+\cdots\cdots$ は，初項 $a=\dfrac{1}{2}$， 公比 $r=-\dfrac{3}{2}$ で， $|r|>1$ だから発散する。

(3) $1+0.2+0.04+0.008+\cdots\cdots$ は，初項 $a=1$, 公比 $r=0.2$ で， $|r|<1$ だから収束する。

和は $\dfrac{1}{1-0.2} = \dfrac{5}{4}$

(4) $\left(\sqrt{2}-1\right)+1+\left(\sqrt{2}+1\right)+\cdots\cdots$ は，初項 $a=\sqrt{2}-1$, 公比 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ で,

$|r|>1$ だから発散する。

39

(1)　$1-2x+4x^2-8x^3+\cdots\cdots$ は，初項 $1(\neq 0)$，公比 $-2x$ だから，

収束するためには $-1<-2x<1$ であればよい。

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$

(2)　$x+x(x^2-x+1)+x(x^2-x+1)^2+x(x^2-x+1)^3+\cdots\cdots$ は，初項 x，公比 x^2-x+1 だから，

(ⅰ) $x=0$ のとき $0+0+0+\cdots\cdots$ となり収束する。

(ⅱ) $x\neq 0$ のとき 収束するためには $-1<x^2-x+1<1$ であればよい。

まず $-1<x^2-x+1$ より $x^2-x+2>0$

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ となり，すべての x について成り立つ …①

次に $x^2-x+1<1$ より $x(x-1)<0$ 　$\therefore\ 0<x<1$ …② ($x\neq 0$ をみたす)

①，②から $0<x<1$

よって，(ⅰ)または(ⅱ)より $0\leqq x<1$

40

$0.1\dot{3}=0.13333\cdots\cdots=0.1+0.03+0.003+0.0003+\cdots\cdots$ となり

第 2 項以降は初項 0.03，公比 0.1 の無限等比級数である。

よって　$0.1\dot{3}=0.1+\dfrac{0.03}{1-0.1}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{2}{15}$

B 問題

41

(1)　$\log_2(n-1)-\log_2 2n=\log_2\dfrac{n-1}{2n}=\log_2\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$

(2)　$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$=\dfrac{\{(n+1)-(n-1)\}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{\{(n+2)-(n-2)\}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=\dfrac{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{4(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1+1}=\frac{1}{2}$

42

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\times 1\times 1\times 2=\frac{1}{3}$$

(2) $$(\text{分子})=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$(\text{分母})=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ より

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n}}=1$$

43

$S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}-\sqrt{\frac{1}{2}(n+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

44

$\log_2 n<a_n<\log_2 2n$ より $\log_2 2n<a_{2n}<\log_2 4n$

また $n\geqq 2$ のとき $\frac{1}{\log_2 2n}<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{\log_2 n}$ だから

$$\frac{\log_2 2n}{\log_2 2n}<\frac{a_{2n}}{a_n}<\frac{\log_2 4n}{\log_2 n}$$

$$1<\frac{a_{2n}}{a_n}<\frac{\log_2 4+\log_2 n}{\log_2 n}$$

ここで $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 4+\log_2 n}{\log_2 n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\log_2 n}+1\right)=1$

よって $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=1$

45

(1) $-1 \leqq \sin n\theta \leqq 1$ より $0 \leqq 1+\sin n\theta \leqq 2$

$$0 \leqq \frac{1+\sin n\theta}{n} \leqq \frac{2}{n}$$

ここで $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ ゆえに $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sin n\theta}{n}=0$

(2) $-1 \leqq \cos n\theta \leqq 1$ より $-\frac{1}{n^2} \leqq \frac{\cos n\theta}{n^2} \leqq \frac{1}{n^2}$

ここで $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ ゆえに $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}=0$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{3}{7}\right)^n+5\left(\frac{5}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=7$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot6\cdot9\cdots\cdots3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot1)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdots\cdots(2\cdot n)}{(3\cdot1)\cdot(3\cdot2)\cdot(3\cdot3)\cdots\cdots(3\cdot n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}{3^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

46

(1) (ⅰ) $|r|<1$のとき $0<r^2<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}r^n=0,\quad \lim_{n\to\infty}r^{2n}=\lim_{n\to\infty}(r^2)^n=0 \quad \text{だから} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n+r^{2n}}{2-r^{2n}}=\frac{1+0+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

(ⅱ) $|r|>1$のとき $\left|\frac{1}{r}\right|<1,\quad 0<\frac{1}{r^2}<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n+r^{2n}}{2-r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r^2}\right)^n+\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}{2\left(\frac{1}{r^2}\right)^n-1}=\frac{0+0+1}{2\times0-1}=-1$$

(ⅲ) $r=1$ のとき $r^2=1$ より

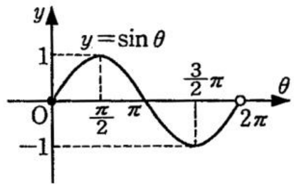
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n+r^{2n}}{2-r^{2n}}=\frac{1+1+1}{2-1}=3$$

(ⅳ) $r=-1$ のとき $r^2=1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^n+r^{2n}}{2-r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n+1}{2-1}=\lim_{n\to\infty}\left\{2+(-1)^n\right\}$$ となり振動する。

したがって $\begin{cases} |r|<1 \text{ のとき } \frac{1}{2} \\ |r|>1 \text{ のとき } -1 \\ r=1 \text{ のとき } 3 \\ r=-1 \text{ のとき 振動する} \end{cases}$

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$　より　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$



（ⅰ）　$|\sin\theta| < 1$のとき,

すなわち　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$，　$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$,　$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$　のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\sin^n\theta}{2+\sin^n\theta} = \frac{2-0}{2+0} = 1$$

（ⅱ）　$\sin\theta = 1$　のとき,　すなわち　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$　のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\sin^n\theta}{2+\sin^n\theta} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

（ⅲ）　$\sin\theta = -1$　のとき,　すなわち　$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$　のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-\sin^n\theta}{2+\sin^n\theta} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}$　となり振動する。

したがって
$$\begin{cases} 0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi & \text{のとき } 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & \text{のとき } \dfrac{1}{3} \\ \theta = \dfrac{3}{2}\pi & \text{のとき　振動する} \end{cases}$$

47

(1)　$3a_{n+1} = a_n + 6$　より　$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 2$　　$a_{n+1} - 3 = \dfrac{1}{3}(a_n - 3)$ と変形できる。

数列$\{a_n - 3\}$は，初項$a_1 - 3 = -2$,　公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列だから

$a_n - 3 = (-2)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　　$a_n = -2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n = 3$

(2)　$3a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$　より　$a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$ と変形できる。

ここで　$a_{n+1} - a_n = b_n$　とおくと

$b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n$　となり　$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$　だから

$\{b_n\}$は初項1,　公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。

$\therefore$　$b_n = 1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　また, $\{b_n\}$は$\{a_n\}$の階差数列だから

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$

$\displaystyle = 1 + \frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$　（これは $n = 1$ のときも成り立つ）

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

(3)　$a_1=1,\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$ より $a_1\neq 0$ だから $a_n\neq 0$

漸化式の逆数をとって $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+3}{a_n}=\dfrac{3}{a_n}+1$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと $b_{n+1}=3b_n+1$

変形すると $b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$

したがって，数列$\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$は初項 $b_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$　公比3の等比数列である。

$\therefore\ b_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$

$b_n=\dfrac{1}{2}\left(3^n-1\right)$

したがって $a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{3^n-1}$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

48

$b_n=\dfrac{a_n+5}{3a_n-2}$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=1\cdots$①

a_nについて解くと $\left(3a_n-2\right)b_n=a_n+5$

$\left(3b_n-1\right)a_n=2b_n+5$

$b_n=\dfrac{1}{3}$とすると $0\cdot a_n=2\times\dfrac{1}{3}+5$ となり不適。

ゆえに $b_n\neq\dfrac{1}{3}$で $a_n=\dfrac{2b_n+5}{3b_n-1}$

ここで①を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n+5}{3b_n-1}=\frac{2\times1+5}{3\times1-1}=\frac{7}{2}$

49

(1)　$a_n=\dfrac{1}{(2n)^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ より

$$S_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

よって，この無限級数は収束し，和は$\dfrac{1}{2}$

(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n} = \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$ より

$$S_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

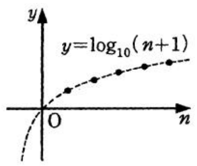
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

よって，この無限級数は収束し，和は $\dfrac{3}{4}$

(3) $a_n = \log_{10}\dfrac{n+1}{n}$ より

$$S_n = \log_{10}\frac{2}{1} + \log_{10}\frac{3}{2} + \log_{10}\frac{4}{3} + \cdots\cdots + \log_{10}\frac{n+1}{n}$$

$$= \log_{10}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \log_{10}(n+1)$$



$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\log_{10}(n+1) = \infty$$

よって，この無限級数は発散する。

（別解） $a_n = \log_{10}\dfrac{n+1}{n} = \log_{10}(n+1) - \log_{10} n$

$$S_n = (\log_{10}2 - \log_{10}1) + (\log_{10}3 - \log_{10}2) + \cdots\cdots + \{\log_{10}(n+1) - \log_{10}n\}$$

$= \log_{10}(n+1)$ 　として求めてもよい。

50

$S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{27} + \cdots\cdots + \dfrac{n}{3^n}$ 　…① とおくと

$\dfrac{1}{3}S_n = \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{27} + \dfrac{3}{81} + \cdots\cdots + \dfrac{n-1}{3^n} + \dfrac{n}{3^{n+1}}$ 　…②

①－②より　$S_n - \dfrac{1}{3}S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{n}{3^{n+1}}$

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - \frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{3^n}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{3^n}\right\} = \frac{3}{4}$

51

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ で，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ はそれぞれ収束するから，無限級数も収束する。

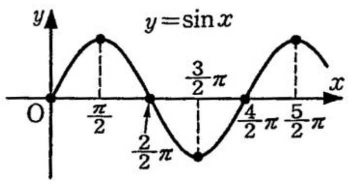
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}=2-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}$

(2) $\sin\dfrac{n\pi}{2}$ の値は，n が奇数のとき 1, -1, 1, -1, ……

n が偶数のとき 0 であるから



$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=1\times1+\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2^2}\times(-1)+\frac{1}{2^3}\times0+\frac{1}{2^4}\times1+\frac{1}{2^5}\times0+\frac{1}{2^6}\times(-1)+\cdots\cdots$$

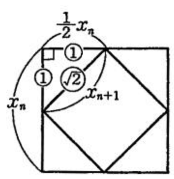
$=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{2^6}+\cdots\cdots$ これは，初項 1, 公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ の無限等比級数だから収束し，

$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{4}{5}$$

52

(1) 正方形 S_1， S_2， S_3 …… の 1 辺の長さをそれぞれ x_1， x_2， x_3, ……とする。

$x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_n$ より正方形の相似比は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ だから，



面積比は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ である。よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は，

初項 $S_1=\dfrac{1}{2}a^2$， 公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数である。

公比は $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ より収束して，和は $\dfrac{\frac{1}{2}a^2}{1-\frac{1}{2}}=a^2$

(2)　正方形 S_n の周の長さを l_n とすると，

周の長さの比は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ は，初項 $l_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 4a=2\sqrt{2}a$,　公比 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の無限等比級数である。

公比は $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|<1$ より収束して，和は $\dfrac{2\sqrt{2}a}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}a}{2-\sqrt{2}}=4\left(\sqrt{2}+1\right)a$

発展問題

53

二項定理より $(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$

この式で $x=1$ とすると $2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$

左辺の各項は正だから $2^n>{}_n\mathrm{C}_2$

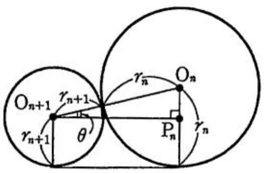
すなわち $2^n>\dfrac{n(n-1)}{2}$ (前半証明終)

次に $n\geqq 2$ のとき逆数をとって $\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{2}{n(n-1)}$ より $0<\dfrac{n}{2^n}<\dfrac{2}{n-1}$ と変形できる。

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$　よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ (証明終)

54

右図のように P_n をとると



$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n}{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=\dfrac{r_n-r_{n+1}}{r_n-r_{n+1}}$ より

$(r_n+r_{n+1})\sin\theta=r_n-r_{n+1}$

$(1+\sin\theta)r_{n+1}=(1-\sin\theta)r_n$

$$r_{n+1}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}r_n$$

となり，円の相似比は $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ だから，面積比は $\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\pi r_n^{\,2}$ は，初項 $\pi r_1^{\,2}$，　公比 $\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$ の無限等比級数である。

$0<\sin\theta<1$ より $0<\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2<1$ だから収束し，

和は $\dfrac{\pi r_1^{\,2}}{1-\left(\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}=\dfrac{(1+\sin\theta)^2\pi r_1^{\,2}}{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}=\dfrac{(1+\sin\theta)^2\pi r_1^{\,2}}{4\sin\theta}$

1 章の問題

1

(1) $a_n = -70 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 74$ だから

$a_{20} = 4 \cdot 20 - 74 = 80 - 74 = 6$

$4n - 74 = -58$ より $n = 4$ よって 第 4 項

(2) $S_{20} = \dfrac{1}{2} \cdot 20\{2 \cdot 1 + (20-1) \cdot 2\} = 400$

(3) $S_n = \dfrac{1}{2} n\{2 \cdot 15 + (n-1) \times (-2)\}$

$= -n^2 + 16n \quad = -(n-8)^2 + 64$

したがって S_n が最大になるのは $n = 8$

(4) $a_n = \sqrt{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$ だから $a_8 = \sqrt{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^7 = -\dfrac{1}{27}$

(5) $a_n = 6 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 3$ より 6, 9, 12, 15, 18, 21……

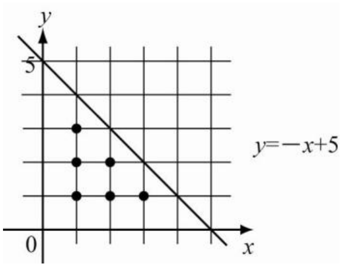
$b_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ より 1, 3, 5, 7, 9……

したがって 共通に含まれていて最小のものは 9

小さい方から3つは 9, 15, 18 であるので $9 + 15 + 21 = 45$

2

(1)



$S_5 = 6$

(2) $\{S_n\}$ は 0, 0, 1, 3, 6, 10, 21 ……であるので階差数列を $\{b_n\}$ とすると,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 21 \\ & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdots\cdots\{S_n\} \\ \cdots\cdots\{S_n\} \end{array}$$

$\{b_n\}$ は 初項 0, 公差 1 の等差数列より $b_n = 0 + (n-1) \cdot 1 = n - 1$

したがって $S_n = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$

$$= \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

3

1 から 100 までの自然数のうち n の倍数の和を $S(n)$ とすると

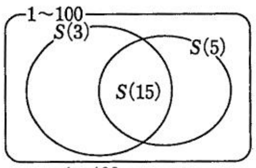
$$S(3) = 3 + 6 + 9 + \cdots\cdots + 99 = \frac{33(3 + 99)}{2} = 1683$$

$$S(5) = 5 + 10 + 15 + \cdots\cdots + 100 = \frac{20(5 + 100)}{2} = 1050$$

$$S(15) = 15 + 30 + 45 + \cdots\cdots + 90 = \frac{6(15 + 90)}{2} = 315$$

(1) $S(3) - S(15) = 1683 - 315 = 1368$

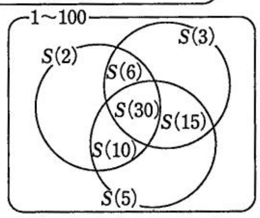
(2) 3 または 5 で割り切れる数の和は



$$S(3) + S(5) - S(15) = 1683 + 1050 - 315 = 2418$$

1 から 100 までの総和は $\dfrac{100(1 + 100)}{2} = 5050$

よって $5050 - 2418 = 2632$



(3) $S(2) = 2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 100$

$$= \frac{50(2 + 100)}{2} = 2550$$

$$S(6) = 6 + 12 + 18 + \cdots\cdots + 96 = \frac{16(6 + 96)}{2} = 816$$

$$S(10) = 10 + 20 + 30 + \cdots\cdots + 100 = \frac{10(10 + 100)}{2} = 550$$

$$S(30) = 30 + 60 + 90 = 180$$

2 または 3 または 5 の倍数の和は

$$S(2) + S(3) + S(5) - S(6) - S(15) - S(10) + S(30)$$

$$= 2550 + 1683 + 1050 - 816 - 315 - 550 + 180$$

$$= 5463 - 1681 = 3782$$

4

等差数列であるとすると

初項は 3，公差は $6 - 3 = 3$ だから一般項は

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n$$

$3n = 768$ とすると $n = 256$

よって，第 256 項が 768 となるから等差数列になることができる。

等比数列であるとすると

初項は 3， 公比は $6 \div 3 = 2$ だから一般項は

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$3 \cdot 2^{n-1} = 768$ とすると $2^{n-1} = 256$ より $n = 9$

よって，第 9 項が 768 となるから等比数列になることができる。

5

(1)

2, 3, 5, 10, 20, 37, ……$\{a_n\}$

1　2　5　10　17　……$\{b_n\}$

1　3　5　7　……$\{c_n\}$

上のように階差をとると $c_n = 2n-1$ だから

$n \geqq 2$のとき $b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) = n^2 - 2n + 2$ （$n=1$のときにも成り立つ）

$n \geqq 2$のとき $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k^2 - 2k + 2) \quad = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1}k + 2\sum_{k=1}^{n-1}1$

$= 2 + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + 2(n-1)$

$= 2 + \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n) - (n^2 - n) + 2n - 2$

$= \frac{1}{3}n^2 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{19}{6}n = \frac{1}{6}n(2n^2 - 9n + 19)$ （$n=1$のときにも成り立つ）

(2)

1, 2, 5, 12, 27, 58, ……$\{a_n\}$

1　3　7　15　31　……$\{b_n\}$

2　4　8　16　……$\{c_n\}$

上のように，階差をとると $c_n = 2^n$ だから

$n \geqq 2$のとき $b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}2^k = 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 1$ （$n=1$のときにも成り立つ）

$n \geqq 2$のとき $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k - 1) = 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (n-1)$

$= 2^n - n$ （$n=1$のときにも成り立つ）

6

(1) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$ から

$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -2$

α, βは $t^2 - t - 2 = 0$ の解だから

$(t-2)(t+1) = 0$ より $t = 2, \quad -1$ 　よって $(\alpha, \beta) = (2, -1), (-1, 2)$

(2) $(\alpha, \beta) = (2, -1)$のとき $a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n)$

数列$\{a_{n+1} - 2a_n\}$は初項 $a_2 - 2a_1 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$,

公比-1の等比数列だから $a_{n+1} - 2a_n = -1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$ …①

$(\alpha, \beta) = (-1, 2)$のとき $a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n)$

数列$\{a_{n+1} + a_n\}$は初項 $a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$,

公比2の等比数列だから $a_{n+1} + a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ …②

②－①より $3a_n = 2^n - (-1)^n$ 　よって $a_n = \frac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}$

7

(1) $a_{n+1} = 3a_n + 2n + 3$ から

$b_n = a_n + n + 2$

$a_n = b_n - n - 2,\quad a_{n+1} = b_{n+1} - n - 3$

$b_{n+1} - n - 3 = 3\left(b_n - n - 2\right) + 2n + 3 \quad \therefore\ b_{n+1} = 3b_n$

よって，数列$\left\{b_n\right\}$は初項 $b_1 = a_1 + 1 + 2 = 6$,　公比3の等比数列。

(2) $b_n = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n \quad a_n + n + 2 = 2 \cdot 3^n$

$\therefore\ a_n = 2 \cdot 3^n - n - 2$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(2 \cdot 3^k - k - 2\right) = 2 \cdot \frac{3\left(3^n - 1\right)}{3-1} - \frac{1}{2}n\left(n+1\right) - 2n$

$\displaystyle = 3^{n+1} - 3 - \frac{1}{2}n\left(n+5\right)$

8

「nが自然数のとき,$\left(1+\sqrt{2}\right)^n$は p,　q を自然数として,

$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = p + q\sqrt{2}$ と表せる。」…①　とする。

［Ⅰ］ $n = 1$ のとき $\left(\text{左辺}\right) = 1 + \sqrt{2}$　だから　$p = 1$,　$q = 1$　で成り立つ。

［Ⅱ］ $n = k$ のとき ①が成り立つと仮定すると

$\left(1+\sqrt{2}\right)^k = p + q\sqrt{2}$ （p，q は自然数）…②　と表せる。

$n = k+1$のとき,$\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1}$　を②を用いて変形すると

$\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1} = \left(1+\sqrt{2}\right)^k\left(1+\sqrt{2}\right) = \left(p + q\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$

$= \left(p + 2q\right) + \left(p + q\right)\sqrt{2}$　と表せる。p，qが自然数だから

$p + 2q$，$p + q$ も自然数になるから　$n = k+1$のときにも①は成り立つ。

［Ⅰ］,［Ⅱ］より，①はすべての自然数 n で成り立つ。

9

「n を 2 以上の自然数とするとき，$n^7 - n$ が 7 の倍数である。」…①　とする。

［Ⅰ］ $n = 2$ のとき $2^7 - 2 = 128 - 2 = 126 = 7 \cdot 18$　となるから7の倍数である。

［Ⅱ］ $k \geqq 2$ として，$n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$k^7 - k = 7N$（Nは自然数）…②と表せる。

$n = k+1$ のとき $\left(k+1\right)^7 - \left(k+1\right)$を ②を使って変形すると

$\left(k+1\right)^7 - \left(k+1\right)$

$= {}_7\mathrm{C}_0k^7 + {}_7\mathrm{C}_1k^6 + {}_7\mathrm{C}_2k^5 + {}_7\mathrm{C}_3k^4 + {}_7\mathrm{C}_4k^3 + {}_7\mathrm{C}_5k^2 + {}_7\mathrm{C}_6k + {}_7\mathrm{C}_7 - \left(k+1\right)$

$= k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - \left(k+1\right)$

$= \left(k^7 - k\right) + 7\left(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k\right)$

$= 7\left(N + k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k\right)$ と表せるから, 7 の倍数である。

［Ⅰ］,［Ⅱ］により，①は成り立つ。

10

(1) $a_{n+1}-2=\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}-2=\dfrac{a_n-2}{a_n-1}$　両辺の逆数をとる。

$\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{a_n-1}{a_n-2}=\dfrac{1}{a_n-2}+1\ \left(a_n\neq 2\right)$

$\dfrac{1}{a_n-2}=b_2$ とおくと $b_{n+1}=b_n+1$

$b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=\dfrac{1}{3-2}=1$

$\therefore\ b_n=1+\left(n-1\right)\cdot 1=n$　$\dfrac{1}{a_n-2}=n$　よって $a_n=\dfrac{1}{n}+2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+2\right)=2$

11

(1) 数学的帰納法で証明する。

［Ｉ］ $n=1$ のとき $0<a_1<3$ より成り立つ。

［Ⅱ］ $n=k$ のとき $0<a_k<3$ が成り立つと仮定すると

$1<1+a_k<4\Leftrightarrow 1<\sqrt{1+a_k}<2\Leftrightarrow 2<1+\sqrt{1+a_k}<3$

よって, $0<a_{k+1}<3$ が成り立つ。

［Ｉ］,［Ⅱ］より，すべての自然数 n に対して $0<a_n<3$ が成り立つ。　（証明終）

(2) $\left(\text{i}\right)$ $n=1$ のとき　（左辺）$=3-a_1$

（右辺）$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(3-a_1\right)=3-a_1$

より，$n=1$ のとき成り立つ。

$\left(\text{ii}\right)$ $n\geqq 2$ のとき

$3-a_n=3-\left(1+\sqrt{1+a_{n-1}}\right)=2-\sqrt{1+a_{n-1}}$

$=\dfrac{\left(2-\sqrt{1+a_{n-1}}\right)\left(2+\sqrt{1+a_{n-1}}\right)}{2+\sqrt{1+a_{n-1}}}=\dfrac{3-a_{n-1}}{2+\sqrt{1+a_{n-1}}}$

ここで，$0<a_{n-1}<3$ より $3-a_{n-1}>0$

また，$3<2+\sqrt{1+a_{n-1}}<4$ より $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2+\sqrt{1+a_{n-1}}}<\dfrac{1}{3}$

よって $3-a_n<\dfrac{1}{3}\left(3-a_{n-1}\right)$ となるから $3-a_n<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(3-a_1\right)$

したがって，$n\geqq 1$ のとき $3-a_n\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(3-a_1\right)$ (証明終)

(3)　(1), (2) より

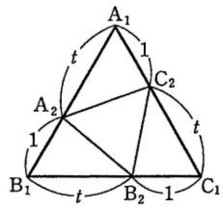
$$0 < 3 - a_n \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(3 - a_1\right) \text{ より}$$

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty}\left(3 - a_n\right) \leqq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(3 - a_1\right) = 0$$

よって $\lim_{n\to\infty}\left(3 - a_n\right) = 0$ だから $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ （証明終）

12

(1)　$A_2B_1 = \dfrac{a}{1+t}$, $B_1B_2 = \dfrac{at}{1+t}$



$$A_2B_2{}^2 = A_2B_1{}^2 + B_1B_2{}^2 - 2A_2B_1 \cdot B_1B_2 \cos 60°$$

$$= \left(\frac{a}{1+t}\right)^2 + \left(\frac{at}{1+t}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{1+t}\cdot\frac{at}{1+t}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{a^2\left(1 - t + t^2\right)}{\left(1+t\right)^2}$$

よって，$t^2 - t + 1 = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ より，正三角形 T_2 の 1 辺の長さは

$$\sqrt{\frac{a^2\left(1 - t + t^2\right)}{\left(1+t\right)^2}} = \frac{a\sqrt{1 - t + t^2}}{1+t}$$

(2)　正三角形 T_n と T_{n+1} の相似比は (1) より

$1 : \dfrac{\sqrt{1-t+t^2}}{1+t}$ だから面積比は $1 : \dfrac{1-t+t^2}{\left(1+t\right)^2}$

$$T_1 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

数列 $\{T_n\}$ は初項 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，公比 $\dfrac{1-t+t^2}{\left(1+t\right)^2}$ の等比数列。

ここで $0 < \dfrac{1-t+t^2}{\left(1+t\right)^2} < 1$ だから $S\left(t\right)$ は無限等比級数の和となる。

$$S\left(t\right) = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1 - \dfrac{1-t+t^2}{\left(1+t\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}a^2\left(1+t\right)^2}{4\left(1+t\right)^2 - 4\left(1-t+t^2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2\left(1+t\right)^2}{12t}$$

(3)

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}a^2}{12}\cdot\frac{1+2t+t^2}{t}=\frac{\sqrt{3}a^2}{12}\cdot\left(t+\frac{1}{t}+2\right)$$

$t>0$ だから，$\left(\text{相加平均}\right)\geqq\left(\text{相乗平均}\right)$ の関係より

$$t+\frac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2\quad\left(\text{等号成立は } t=\frac{1}{t} \text{ より } t=1 \text{ のとき}\right)$$

$$\therefore\ S(t)=\frac{\sqrt{3}a^2}{12}\left(t+\frac{1}{t}+2\right)\geqq\frac{\sqrt{3}a^2}{12}(2+2)=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

よって，$S(t)$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$ $(t=1\text{ のとき})$