1 章　数列　解答

1 節　数列とその和

A 問題

1

(1)　$a_n = 2 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 4$

$a_{10} = 6 \cdot 10 - 4 = 56$

(2)　$a_n = -3 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 5$

$a_{10} = 2 \cdot 10 - 5 = 15$

(3)　初項が3，公差が $7 - 3 = 4$ だから

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

$a_{10} = 4 \cdot 10 - 1 = 39$

(4)　初項が14，公差が $9 - 14 = -5$ だから

$a_n = 14 + (n-1) \cdot (-5) = -5n + 19$

$a_{10} = -5 \cdot 10 + 19 = -31$

2

初項を a，公差を d とすると

(1)　$a_5 = a + 4d = 13$　…①

$a_{10} = a + 9d = 28$　…②

①，②を解いて　$a = 1$，$d = 3$

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$

(2)　$a_6 = a + 5d = 65$　…①

$a_{30} = a + 29d = -103$　…②

①，②を解いて　$a = 100$，$d = -7$

$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-7) = -7n + 107$

3

(1)　初項が 3，公差が－2 だから

一般項　$a_n = 3 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 5$

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot (-2)\}}{2}$$

$$= \frac{n(-2n + 8)}{2} = -n(n-4)$$

(2)　初項が $\frac{1}{2}$，公差が $\frac{3}{4}$ だから

一般項　$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$

$$S_n = \frac{n\left\{2 \cdot \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{3}{4}\right\}}{2}$$

$$= \frac{n\left(1 + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{n(3n+1)}{8}$$

4

(1) $a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n-1$ だから

$3n-1 = 296$ より $n = 99$

よって，第 99 項

その項までの和は

$$S_{99} = \frac{99}{2}\{2\cdot 2 + (99-1)\cdot 3\} = \frac{99}{2}\cdot 298 = 14751$$

(2) $\dfrac{n(5-55)}{2} = -525$

$-50n = -1050$ より $n = 21$

よって，項数は21個

$a_{21} = 5 + 20d = -55 \quad \therefore\ d = -3$

よって，公差は -3

(3) $a_n = 1000 + (n-1)\cdot(-15) = -15n + 1015$

$-15n + 1015 < 0$ を解いて $n > 67.6\cdots\cdots$

よって，初めて負になるのは第 68 項目から。

負になる前の項までの和を求めればよいから

$$\frac{67}{2}\{2\cdot 1000 + (67-1)\cdot(-15)\} = \frac{67}{2}(2000-990) = 33835$$

よって，最大値は 33835

5

(1) $a_n = 2\cdot 3^{n-1}$，$a_6 = 2\cdot 3^5 = 2\cdot 243 = 486$

(2) $a_n = 3\cdot(-2)^{n-1}$，$a_6 = 3\cdot(-2)^5 = 3\cdot(-32) = -96$

(3) 初項が 10，公比が $20 \div 10 = 2$ だから

$a_n = 10\cdot 2^{n-1}$，$a_6 = 10\cdot 2^5 = 10\cdot 32 = 320$

(4) 初項が 81，公比が $(-27)\div 81 = -\dfrac{1}{3}$ だから

$$a_n = 81\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},\ a_6 = 81\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^5 = 3^4\cdot\left(-\frac{1}{3^5}\right) = -\frac{1}{3}$$

6

初項を a，公比を r とすると

(1) $a_3 = ar^2 = 6 \quad \cdots①$

$a_6 = ar^5 = 48 \quad \cdots②$

②÷①より $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{48}{6} = 8 \quad \therefore\ r^3 = 8$ より $r = 2$

①に代入して，$a = \dfrac{3}{2} \qquad a_n = \dfrac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$

(2) $ar = -6 \qquad \cdots①$

$ar^5 = -486 \quad \cdots②$

②÷①より $\dfrac{ar^5}{ar} = \dfrac{-486}{-6} = 81 \quad \therefore\ r^4 = 81$

$(r-3)(r+3)(r^2+9) = 0 \quad \therefore\ r = 3,\ -3$ 　これを①に代入して

$r = 3$ のとき，$a = -2$，$a_n = -2 \cdot 3^{n-1}$

$r = -3$ のとき，$a = 2$，$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

7

(1) $a_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

(2) $a_n = 8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$S_n = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(3) 初項が 2，公比が $\dfrac{4}{3} \div 2 = \dfrac{2}{3}$ だから

$a_n = 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n = \frac{2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}} = 6\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

(4) 初項が 1，公比が －1 だから

$a_n = 1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$

$$S_n = \frac{1 \cdot \{1-(-1)^n\}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^n}{2} \quad \left(= \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \right)$$

8

(1) 一般項は $a_n = a\cdot 3^{n-1}$ とおける。

$a_4 = a\cdot 3^3 = 135,\quad 27a = 135 \quad \therefore\ a = \boxed{5}$

$a_n = 5\cdot 3^{n-1} > 2000$ より $3^{n-1} > 400$

$3^5 = 243,\quad 3^6 = 729$ だから 第$\boxed{7}$項

(2) $S_n = \dfrac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = 1-(-2)^n = 129$

$(-2)^n = -128 = (-2)^7$ より 第$\boxed{7}$項

(3) $a + ar + ar^2 = 3 \quad \cdots①$

$ar^3 + ar^4 + ar^5 = -24 \quad \cdots②$

②÷①より $\dfrac{ar^3(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \dfrac{-24}{3} = -8$

$\therefore\ r^3 = -8$ より $r = -2$

①に代入して $a - 2a + 4a = 3$ より $a = 1$

よって，その次の3項の和は

$$ar^6 + ar^7 + ar^8 = (-2)^6 + (-2)^7 + (-2)^8$$
$$= (-2)^6\cdot\{1-2+(-2)^2\} = \boxed{192}$$

9

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n = \frac{1}{2}n(3n+5)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2\times\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1-6) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n-5)$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^3 - \sum_{k=1}^{n}k = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\} = \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^k = \frac{3\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3(3^{n-1}-1)}{2}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{k-1} = \frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1} = \frac{3^n-1}{2}$

10

(1)　第 n 項は　$a_n = n(2n+1) = 2n^2 + n$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k) = 2\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$$

$$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n+2+3)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$$

(2)　第 n 項は　$a_n = (2n)^2 = 4n^2$

$$\sum_{k=1}^{n}4k^2 = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 = 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

(3)　第 n 項は　$a_n = (2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1$

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^2-1) = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - n$$

$$= \frac{n}{3}\{2(n+1)(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{n}{3}(4n^2 + 6n - 1)$$

(4)　一般項は　$a_n = n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k) = \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1) + (2n+1) + 2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

11

(1) $a_k = \dfrac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-1} - \dfrac{1}{3k+2}\right)$ だから

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{n}{2(3n+2)}$$

(2) $a_k = \dfrac{1}{2k(2k+2)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{4(n+1)}$$

(3) $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+2}\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{1} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{4}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right) + \cdots\cdots + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} - 1\right)$$

12

(1) $a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$

$a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7$

$a_4 = a_3 + 3 = 7 + 3 = 10$

$a_5 = a_4 + 3 = 10 + 3 = 13$

(2) $a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_5 = 2a_4 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$

(3) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$

$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 8$

$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 16$

13

(1) $n \geqq 2$ のとき

$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3 = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$ $\left(n = 1 \text{ のときも成り立つ}\right)$

$\therefore\ a_n = 3n - 2$

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) = n^2 - n + 1 \quad (n = 1 \text{のときも成り立つ})$$

$\therefore \ a_n = n^2 - n + 1$

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 \quad (n = 1 \text{のときも成り立つ})$$

$\therefore \ a_n = 2^n - 1$

14

(1) $2 + 5 + 8 + \cdots\cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ $\cdots$① とする。

〔Ⅰ〕 $n = 1$ のとき

$(\text{左辺}) = 2, \quad (\text{右辺}) = 2$ よって，①は成り立つ。

〔Ⅱ〕 $n = k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$2 + 5 + 8 + \cdots\cdots + (3k - 1) = \frac{k(3k+1)}{2} \quad \cdots②$$

$n = k + 1$ のとき，①の左辺を，②を用いて変形すると

$$2 + 5 + 8 + \cdots\cdots + (3k - 1) + (3k + 2)$$

$$= \frac{k(3k+1)}{2} + (3k + 2) = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ。

〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕より，①はすべての自然数 n について成り立つ。

(2) $1 + 3 + 3^2 + \cdots\cdots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$ $\cdots$① とする。

〔Ⅰ〕 $n = 1$ のとき

$(\text{左辺}) = 3^0 = 1, \quad (\text{右辺}) = \dfrac{3-1}{2} - 1$ よって，①は成り立つ。

〔Ⅱ〕 $n = k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots\cdots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2} \quad \cdots②$$

$n = k + 1$ のとき，①の左辺を，②を用いて変形すると

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots\cdots + 3^{k-1} + 3^k$$

$$= \frac{3^k - 1}{2} + 3^k = \frac{(1+2)3^k - 1}{2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

よって，$n = k + 1$ のときも成り立つ。

〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕より，①はすべての自然数 n について成り立つ。

15

(1) $1+2+3+\cdots\cdots+n<n^2$ …① とする。

〔Ⅰ〕$n=2$ のとき $\left(\text{左辺}\right)=1+2=3$, $\left(\text{右辺}\right)=2^2=4$

よって, $\left(\text{左辺}\right)<\left(\text{右辺}\right)$ となり①は成り立つ。

〔Ⅱ〕$n=k\left(k\geqq 2\right)$ のとき, ①が成り立つと仮定すると

$1+2+3+\cdots\cdots+k<k^2$ …②

$n=k+1$ のとき, ①の左辺を, ②を用いて変形すると

$1+2+3+\cdots\cdots+k+\left(k+1\right)<k^2+k+1$

ここで $\left(k+1\right)^2-\left(k^2+k+1\right)=k>0$ だから, $k^2+k+1<\left(k+1\right)^2$

したがって $1+2+3+\cdots\cdots+k+\left(k+1\right)<k^2+k+1<\left(k+1\right)^2$

ゆえに $1+2+3+\cdots\cdots+k+\left(k+1\right)<\left(k+1\right)^2$ が成り立つ。

よって, $n=k+1$ のときも①は成り立つ。

〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕より, ①は $n\geqq 2$ の自然 n について成り立つ。

(2) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{2n}{n+1}$ …① とする。

〔Ⅰ〕 $n=2$ のとき

$\left(\text{左辺}\right)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, $\left(\text{右辺}\right)=\dfrac{2\cdot 2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

$\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{6}>0$

よって, $\left(\text{左辺}\right)>\left(\text{右辺}\right)$ となり①は成り立つ。

〔Ⅱ〕 $n=k\left(k\geqq 2\right)$ のとき①が成り立つと仮定すると

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}>\dfrac{2k}{k+1}$ …②

$n=k+1$ のとき, ①の左辺を, ②を用いて変形すると

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2k+1}{k+1}$

ここで $\dfrac{2k+1}{k+1}-\dfrac{2\left(k+1\right)}{k+2}=\dfrac{\left(2k+1\right)\left(k+2\right)-2\left(k+1\right)^2}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$

$=\dfrac{k}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}>0$ より $\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2\left(k+1\right)}{k+2}$

したがって $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2\left(k+1\right)}{k+2}$

ゆえに $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2\left(k+1\right)}{k+2}$ が成り立つ。

よって, $n=k+1$ のときも①は成り立つ。

〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕により, ①は $n\geqq 2$ の自然数 n について成り立つ。

B 問題

16

3 数を $a-d,\ a,\ a+d$ とおくと

(1) $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15 & \cdots ① \\ (a-d)a(a+d)=80 & \cdots ②\end{cases}$

①，②を解いて $a=5,\ d=\pm 3$

よって，3 数は $2,\ 5,\ 8$

(2) $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=12 & \cdots ① \\ (a-d)^2+a^2+(a+d)^2=120 & \cdots ②\end{cases}$

①，②を解いて $a=4,\ d=\pm 6$

よって，3 数は $-2,\ 4,\ 10$

17

(1) $2\cdot 1+2\cdot 2+\cdots\cdots+2\cdot 50=\dfrac{50(2+100)}{2}=2550$

(2) $7\cdot 1+7\cdot 2+\cdots\cdots+7\cdot 14=\dfrac{14(7+98)}{2}=735$

(3) 2 かつ 7 の倍数は 14 の倍数だから　$14\cdot 1+14\cdot 2+\cdots\cdots+14\cdot 7=\dfrac{7(14+98)}{2}=392$

(4) $(2\text{の倍数})+(7\text{の倍数})-(14\text{の倍数})$　より　$2550+735-392=2893$

18

(1) 題意より $4n+2=6m+2$

$n=\dfrac{3}{2}m$ で，$m,\ n$ が自然数だから　$m=2k\ (k\text{は自然数})$ と表せる。

求める数を a_k とすると　$a_k=6\cdot 2k+2=12k+2$

条件より　$100\leqq 12k+2\leqq 999$　$\therefore\ 9\leqq k\leqq 83$

よって，求める和は

初項 $a_9=110$，　末項 $a_{83}=998$，　項数 75 の等差数列の和だから　$\dfrac{75(110+998)}{2}=41550$

(2) 題意より $4n+1=6m+3$

$n=\dfrac{3m+1}{2}$ で，$m,\ n$ が自然数だから　$m=2k-1\ (k\text{は自然数})$ と表せる。

求める数を a_k とすると　$a_k=6\cdot(2k-1)+3=12k-3$

条件より　$100\leqq 12k-3\leqq 999$　$\therefore\ 9\leqq k\leqq 83$

よって，求める和は

初項 $a_9=105$，　末項 $a_{83}=993$，　項数 75 の等差数列の和だから　$\dfrac{75(105+993)}{2}=41175$

19

初項 a，公比を r とすると

$$\begin{cases} a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=4 & \cdots ① \\ a+ar+\cdots\cdots+ar^9=132 & \cdots ② \end{cases}$$

②－①より　$ar^5+ar^6+ar^7+ar^8+ar^9=128$

$r^5\left(a+ar+ar^2+ar^3+ar^4\right)=128$

①を代入して　$r^5=32$　r は実数だから　$\therefore\ r=2$

$S_{15}=a+ar+\cdots\cdots+ar^{14}$

$=132+\left(ar^{10}+ar^{11}+ar^{12}+ar^{13}+ar^{14}\right)$

$=132+r^{10}\left(a+ar+ar^2+ar^3+ar^4\right)$

$=132+32^2\times 4=4228$

（別解）

$S_5=\dfrac{a\left(1-r^5\right)}{1-r}=4$　$\cdots ①$

$S_{10}=\dfrac{a\left(1-r^{10}\right)}{1-r}=132$　$\cdots ②$

②÷①より　$\dfrac{a\left(1-r^{10}\right)}{1-r}\times\dfrac{1-r}{a\left(1-r^5\right)}=\dfrac{132}{4}$

$\dfrac{\left(1-r^5\right)\left(1+r^5\right)}{1-r^5}=33$

$r^5=32$　より　$r=2$

①に代入して　$a=\dfrac{4}{31}$

$S_{15}=\dfrac{\frac{4}{31}\left(2^{15}-1\right)}{2-1}=\dfrac{4}{31}\times 32767=4228$

20

1,　a,　b, が等差数列をなすから　$2a=b+1$　$\cdots ①$

1,　a^2,　b^2 が等比数列をなすから　$a^4=b^2$　$\cdots ②$

②より　$b=\pm a^2$

$b=a^2$ のとき　①に代入して　$a^2-2a+1=0$

$\left(a-1\right)^2=0$　$\therefore\ a=1,\ \ b=1$

$b=-a^2$ のとき　①に代入して　$a^2+2a-1=0$

$a=-1\pm\sqrt{2}$，$b=-3\pm 2\sqrt{2}$

$\left(a,\ b\right)=\left(1,\ 1\right)$，$\left(-1\pm\sqrt{2},\ -3\pm 2\sqrt{2}\right)$（複号同順）

21

$a_n=1+\left(n-1\right)d$，$b_n=a\cdot 2^{n-1}$　とおくと

(1)　$c_n=a_n+b_n=1+\left(n-1\right)d+a\cdot 2^{n-1}$

$c_2=1+d+a\cdot 2=11$　$\therefore\ 2a+d=10\ \cdots ①$

$c_4=1+3d+a\cdot 2^3=37$　$\therefore\ 8a+3d=36\ \cdots ②$

①，②を解いて　$a=3,\ \ d=4$　$\therefore\ c_n=1+\left(n-1\right)\cdot 4+3\cdot 2^{n-1}$

よって　$c_n=-3+4n+3\cdot 2^{n-1}$

(2)　$d_n=a_nb_n=\left\{1+\left(n-1\right)d\right\}a\cdot 2^{n-1}$

$d_2=a_2b_2=\left(1+d\right)\cdot 2a=40$　$\therefore\ a\left(1+d\right)=20\ \cdots ①$

$d_3=a_3b_3=\left(1+2d\right)\cdot 4a=140$　$\therefore\ a\left(1+2d\right)=35\ \cdots ②$

①，②を解いて　$a=5,\ \ d=3$

$\therefore\ d_n=\left\{1+\left(n-1\right)\cdot 3\right\}\cdot 5\cdot 2^{n-1}$

よって　$d_n=5\left(3n-2\right)\cdot 2^{n-1}$

22

(1) $3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ 65,\ \cdots\cdots\{a_n\}$

$\quad 2\quad 4\quad 8\quad 16\quad 32\quad \cdots\cdots\{b_n\}$

$b_n = 2^n$ だから $n \geqq 2$ のとき $\quad a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$$= 3 + \frac{2\left(2^{n-1} - 1\right)}{2-1} = 2^n + 1 \quad \left(n = 1 \text{ のときにも成り立つ} \right)$$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(2^k + 1\right) = \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$$= \frac{2\left(2^n - 1\right)}{2-1} + n = 2^{n+1} + n - 2$$

23

(1) $a_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots\cdots + (2n-1)^2$

$$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= n\left\{\frac{2}{3}\left(2n^2 + 3n + 1\right) - 2n - 2 + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{3}n\left(4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3\right) = \frac{1}{3}n\left(4n^2 - 1\right)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}k\left(4k^2 - 1\right) = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{4}{3}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\left(2n^2 + 2n - 1\right)$$

(2) $a_n = 1 + 10 + 10^2 + \cdots\cdots + 10^{n-1} = \dfrac{1\cdot\left(10^n - 1\right)}{10-1} = \dfrac{10^n - 1}{9}$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 10\cdot 10^{k-1} - \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{10\left(10^n - 1\right)}{10-1} - \frac{n}{9} = \frac{1}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)$$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2\sum_{k=1}^{n} k$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - 2(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= n(n+1)^2\left\{\frac{1}{4}n - \frac{1}{3}(2n+1) + \frac{1}{2}(n+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)^2(3n - 8n - 4 + 6n + 6)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

(4)　第 k 項は　$a_k = \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \dfrac{2}{k(k+1)} = 2\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$$

(5)　第 k 項は　$a_k = \dfrac{1}{(k+1)^2-1} = \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$

$$\therefore\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

24

(1)　$a_{n+1} + 4 = 2(a_n + 4)$ と変形できる。

$b_n = a_n + 4$　とおくと　$b_{n+1} = 2b_n$　だから

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 + 4 = 5$,

公比 2 の等比数列　$\therefore$　$b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

より　$a_n + 4 = 5 \cdot 2^{n-1}$

よって　$a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 4$

（別解）

$$\begin{array}{rl} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 4 \\ -)\ a_{n+1} &= 2a_n + 4 \\ \hline \end{array}$$

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

$b_n = a_{n+1} - a_n$　とおくと，数列 $\{b_n\}$ は

初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 1 = 5$,

公比 2 の等比数列

$\therefore$　$b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$　より

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 5 \cdot 2^{k-1} = 1 + \frac{5(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$= 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \quad (n = 1 \text{ のときにも成り立つ})$$

(2) $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$ と変形できる。

$b_n=a_n-2$ とおくと $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ だから

数列 $\{b_n\}$ は 初項 $b_1=a_1-2=1$,

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore\ b_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より $a_n-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって $a_n=2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

（別解）

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+2} &=& \frac{1}{2}a_{n+1}+1 \\ -) & a_{n+1} &=& \frac{1}{2}a_n+1 \\ \hline \end{array}$$

$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は

初項 $b_1=a_2-a_1=\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{2}$,

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore\ b_n=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=3-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=3-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad(n=1\text{ のときにも成り立つ})$$

(3) $a_{n+1}-\frac{3}{4}=5\left(a_n-\frac{3}{4}\right)$ と変形できる。

$b_n=a_n-\frac{3}{4}$ とおくと $b_{n+1}=5b_n$ だから

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_1-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$,

公比 5 の等比数列

$\therefore\ b_n=\frac{5}{4}\cdot 5^{n-1}$ より $a_n-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\cdot 5^{n-1}$

よって $a_n=\frac{1}{4}(5^n+3)$

（別解）

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+2} &=& 5a_{n+1}-3 \\ -) & a_{n+1} &=& 5a_n-3 \\ \hline \end{array}$$

$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は

初項 $b_1=a_2-a_1=7-2=5$,

公比 5 の等比数列

$\therefore\ b_n=5\cdot 5^{n-1}=5^n$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5^k=2+\frac{5(5^{n-1}-1)}{5-1}$$

$$=\frac{5^n+3}{4}\quad(n=1\text{ のときも成り立つ})$$

(4) $a_{n+1}-\frac{1}{4}=-3\left(a_n-\frac{1}{4}\right)$ と変形できる。

$b_n=a_n-\frac{1}{4}$ とおくと $b_{n+1}=-3b_n$ だから

数列 $\{b_n\}$ は, 初項 $b_1=a_1-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$,

公比 -3 の等比数列

$\therefore\ b_n=-\frac{5}{4}\cdot(-3)^{n-1}$ より $a_n-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}\cdot(-3)^{n-1}$

よって $a_n=\frac{1}{4}\left\{1-5\cdot(-3)^{n-1}\right\}$

（別解）

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+2}+3a_{n+1} & =1 \\ -) & a_{n+1}+3a_n & =1 \\ \hline \end{array}$$

$a_{n+2}-a_{n+1}=-3\left(a_{n+1}-a_n\right)$

$b_n=a_{n+1}-a_n$　とおくと，数列 $\left\{b_n\right\}$ は

初項 $b_1=a_2-a_1=4-(-1)=5,$

公比 -3 の等比数列

$\therefore\ b_n=5\cdot(-3)^{n-1}$　より

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot(-3)^{k-1}=-1+\frac{5\left\{1-(-3)^{n-1}\right\}}{1-(-3)}$$

$$=-1+\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\cdot(-3)^{n-1}=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\cdot(-3)^{n-1}$$

$\left(n=1\right.$ のときも成り立つ$\left.\right)$

25

$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$　$\cdots$ ①とする。

〔Ⅰ〕　$n=2$ のとき

$(\text{左辺})=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$，$(\text{右辺})=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{6}{4}$

よって, $(\text{左辺})<(\text{右辺})$ となり①は成り立つ。

〔Ⅱ〕　$n=k\,(\geqq 2)$ のとき①が成り立つと仮定すると

$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}<2-\dfrac{1}{k}\cdots$ ②

$n=k+1$ のとき，①の左辺を，②を用いて変形すると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

ここで，$2-\dfrac{1}{k+1}-\left\{2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\right\}=-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{(k+1)^2}$

$$=\frac{-k(k+1)+(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$

$$\therefore\ 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$

したがって　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$　が成り立つ。

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕より，①は $n \geqq 2$ の自然数について成り立つ。

26

「n が自然数のとき，$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。」…① とおく。

〔Ⅰ〕$n=1$ のとき $3^2+4^1=13$ で①は成り立つ。

〔Ⅱ〕$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$3^{k+1}+4^{2k-1}=13N$ (N は自然数) …②と表せる。

$n=k+1$のとき, $3^{k+2}+4^{2k+1}$ を②を用いて変形すると

$$3^{k+2}+4^{2k+1}=3\cdot 3^{k+1}+4^2\cdot 4^{2k-1}=3\left(3^{k+1}+4^{2k-1}\right)+13\cdot 4^{2k-1}$$

$$=3\cdot 13N+13\cdot 4^{2k-1}=13\left(3N+4^{2k-1}\right)$$

となり，13 の倍数になるので①は成り立つ。

よって，〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕より，①はすべての自然数で成り立つ。

（別解）

$n=k+1$ のときの変形は, 次のようにしてもよい。

$3^{k+2}+4^{2k+1}=3\cdot 3^{k+1}+4^{2k+1}$

②より $3^{k+1}=13N-4^{2k-1}$ を代入して

$$=3\left(13N-4^{2k-1}\right)+4^{2k+1}$$

$$=3\cdot 13N-3\cdot 4^{2k-1}+4^2\cdot 4^{2k-1}$$

$$=3\cdot 13N+4^{2k-1}\left(16-3\right)$$

$$=13\left(3N+4^{2k-1}\right)$$

27

(1) $a_2=\dfrac{a_1}{a_1+1}=\dfrac{3}{3+1}=\dfrac{3}{4}$

$$a_3=\frac{a_2}{a_2+1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+1}=\frac{3}{7}$$

$$a_4=\frac{a_3}{a_3+1}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{7}+1}=\frac{3}{10}$$

(2) $a_1=3=\dfrac{3}{1}$ と考えて $a_n=\dfrac{3}{3n-2}$ …① と推定する。

〔Ⅰ〕$n=1$ のとき $a_1=3$ で成り立つ。

〔Ⅱ〕$n=k$ のとき $a_k=\dfrac{3}{3k-2}$ が成り立つと仮定すると

$n=k+1$のとき $a_{k+1}=\dfrac{a_k}{a_k+1}=\dfrac{\frac{3}{3k-2}}{\frac{3}{3k-2}+1}=\dfrac{3}{3+3k-2}$

$$=\frac{3}{3k+1}=\frac{3}{3\left(k+1\right)-2}$$ となり成り立つ。

よって，〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕より，①はすべての自然数 n で成り立つ。

発展問題

28

等差数列の初めの m 項の和に等しいとすると

$$\frac{a\left(9^n-1\right)}{9-1}=\frac{m}{2}\{2a+(m-1)a\}\quad \text{より}\quad a\left(9^n-1\right)=4m(m+1)a$$

$a\neq 0$ であるから $4m^2+4m-9^n+1=0$

$(2m+1)^2-\left(3^n\right)^2=0$

$\left(2m+1+3^n\right)\left(2m+1-3^n\right)=0$

$$\therefore\ m=-\frac{3^n+1}{2},\ \frac{3^n-1}{2}$$

$m>0$ より $m=\dfrac{3^n-1}{2}$ $\left(\text{ここで, } 3^n-1 \text{は偶数なので，} m \text{は自然数となり適する}\right)$

29

求める和を S とおくと

$\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)\}^2=1^2+3^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2+2S$ より

$$S=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right\}^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=\frac{4}{3}n^3-\frac{1}{3}n$$

よって $S=\dfrac{1}{2}\left\{\left(n^2\right)^2-\left(\dfrac{4}{3}n^3-\dfrac{1}{3}n\right)\right\}=\dfrac{1}{6}n(n-1)\left(3n^2-n-1\right)$

30

$$\begin{aligned}
S_n&=2x+4x^3+6x^5+\cdots\cdots+2nx^{2n-1}\\
-)\ x^2S_n&=\qquad\ 2x^3+4x^5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+2nx^{2n+1}\\
\hline
\left(1-x^2\right)S_n&=2x+2x^3+2x^5+\cdots\cdots+2x^{2n-1}-2nx^{2n+1}
\end{aligned}$$

$x\neq\pm1$ のとき

$$\left(1-x^2\right)S_n=\frac{2x\left\{1-\left(x^2\right)^n\right\}}{1-x^2}-2nx^{2n+1}\qquad \therefore\ S_n=\frac{2x\left\{1-(n+1)x^{2n}+nx^{2n+2}\right\}}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$x=1$ のとき $S_n=2+4+6+\cdots\cdots+2n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1)$

$x=-1$ のとき $S_n=-2-4-6-\cdots\cdots-2n=-n(n+1)$

よって $x\neq\pm1$ のとき $S_n=\dfrac{2x\left\{1-(n+1)x^{2n}+nx^{2n+2}\right\}}{\left(1-x^2\right)^2}$

$x=1$ のとき $S_n=n(n+1)$

$x=-1$ のとき $S_n=-n(n+1)$