３節　導関数の応用

A 問題

102

(1) $f\left(x\right)=x^3-2x$ とすると

$f'\left(x\right)=3x^2-2$　$f'\left(1\right)=1$

よって，接線の方程式は

$y+1=x-1$ より $y=x-2$

(2) $f\left(x\right)=-x^4+3x^2+2$ とすると

$f'\left(x\right)=-4x^3+6x$　$f'\left(-1\right)=-2$

よって，接線の方程式は

$y-4=-2\left(x+1\right)$ より $y=-2x+2$

(3) $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x-1}$ とすると

$f'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$　$f'\left(2\right)=0$

よって，接線の方程式は

$y-3=0$ より $y=3$

(4) $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-3}$ とすると

$f'\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$　$f'\left(2\right)=2$

よって，接線の方程式は

$y-1=2\left(x-2\right)$ より $y=2x-3$

(5) $f\left(x\right)=\sin x$ とすると

$f'\left(x\right)=\cos x$　$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

よって，接線の方程式は

$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$

(6) $f\left(x\right)=\tan\dfrac{x}{2}$ とすると

$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

よって，接線の方程式は

$y-1=x-\dfrac{\pi}{2}$ より

$y=x+1-\dfrac{\pi}{2}$

(7) $f\left(x\right)=e\log x$ とすると

$f'\left(x\right)=\dfrac{e}{x}$　$f'\left(e\right)=1$

よって，接線の方程式は

$y-e=x-e$ より $y=x$

(8) $f\left(x\right)=e^{2x}$ とすると

$f'\left(x\right)=2e^{2x}$　$f'\left(1\right)=2e^2$

よって，接線の方程式は

$y-e^2=2e^2\left(x-1\right)$ より $y=2e^2x-e^2$

103

(1) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}x^4-4x^2+12$

$f'\left(x\right)=x^3-8x=x\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)$

これより，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗	12	↘	-4	↗

よって

$x=0$ のとき　極大値 12

$x=\pm2\sqrt{2}$ のとき　極小値 -4

(2) $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

$$f'\left(x\right)=\frac{1\cdot\left(x^2+3\right)-\left(x+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=-\frac{\left(x+3\right)\left(x-1\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$$

これより，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{6}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘

よって

$x=1$ のとき　　極大値 $\dfrac{1}{2}$

$x=-3$のとき　　極小値 $-\dfrac{1}{6}$

(3) $f\left(x\right)=x\left(x-1\right)e^x$

$$f'\left(x\right)=\left(2x-1\right)e^x+\left(x^2-x\right)e^x=\left(x^2+x-1\right)e^x$$

$f'\left(x\right)=0$ を解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

これより，増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{2+\sqrt{5}}{e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$	↘	$\dfrac{2-\sqrt{5}}{e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}$	↗

よって

$x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき　　極大値 $\dfrac{2+\sqrt{5}}{e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき　　極小値 $\dfrac{2-\sqrt{5}}{e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$

(4) $f\left(x\right)=x^2e^{-2x}$

$$f'\left(x\right)=2xe^{2x}+x^2\cdot\left(-2e^{-2x}\right)=-2x\left(x-1\right)e^{-2x}$$

これより，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{1}{e^2}$	↘

よって

$x=1$ のとき　　極大値 $\dfrac{1}{e^2}$

$x=0$ のとき　　極小値　0

(5) $f(x)=\dfrac{1+\log x}{x}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\log x)\cdot 1}{x^2}=-\frac{\log x}{x^2}$$

これより，増減表は下のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	1	↘

よって　$x=1$ のとき　　極大値 1

(6) $f(x)=x^3\log x$

$$f'(x)=3x^2\log x+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\left(\log x+\frac{1}{3}\right)$$

これより，増減表は下のようになる。

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$-\dfrac{1}{3e}$	↗

よって　$x=e^{-\frac{1}{3}}$ のとき　　極小値 $-\dfrac{1}{3e}$

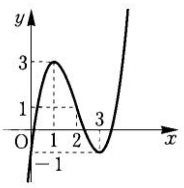
104

(1) $y=x^3-6x^2+9x-1$

$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$y''=6x-12=6(x-2)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	3	↘	1	↘	-1	↗

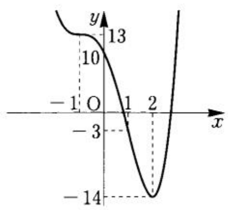


(2) $y=x^4-6x^2-8x+10$

$y'=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$y''=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	13	↘	-3	↘	-14	↗

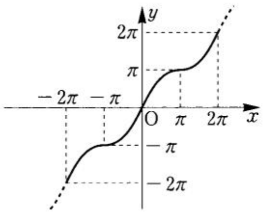


(3) $y = x + \sin x$

$y' = 1 + \cos x$

$y'' = -\sin x$

x	-2π	$\cdots$	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
y'	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
y''	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	-2π	↱	$-\pi$	⤴	0	↱	π	⤴	2π

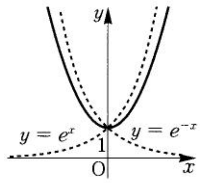


(4) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y'' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	⤥	1	⤴



(5) $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ の定義域は $x = \pm 1$

を除く実数全体である。

$y' = \dfrac{-4x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

$y'' = \dfrac{4\left(3x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}$

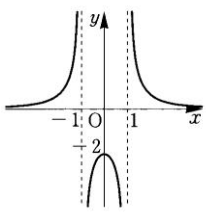
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$
y	⤴		↱	-2	⤵		⤥

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{2}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{2}{x^2 - 1} = \infty$$

以上のことから，グラフは次の図のようになる。



(6) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$

$y' = \dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2}{(x + 1)^3}$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↱	-1	⤵		⤥	3	⤴

$$\lim_{x \to -1+0} y = \lim_{x \to -1+0} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1}\right) = \infty$$

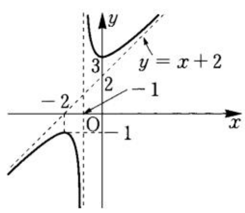
$$\lim_{x \to -1-0} y = \lim_{x \to -1-0} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1}\right) = -\infty$$

より，直線 $x = -1$ は漸近線である。

$$\lim_{x \to \pm\infty} \{y - (x + 2)\} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$$

より，直線 $y = x + 2$ も漸近線である。

以上のことから，グラフは下図のようになる。



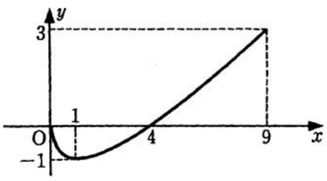
105

(1) $y = x - 2\sqrt{x}$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

増減表をつくると

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	9
y'	／	$-$	0	$+$	$+$
y	0	↘	-1	↗	3



よって　$x = 9$ のとき最大値 3

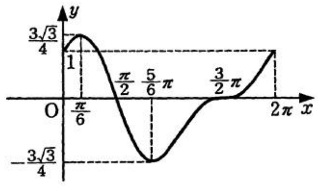
$x = 1$ のとき最小値 -1

(2) $y = \cos x(1 + \sin x)$

$$y' = -\sin x(1 + \sin x) + \cos^2 x$$
$$= -\sin x - \sin^2 x + (1 - \sin^2 x)$$
$$= -2\sin^2 x - \sin x + 1 = -(2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

増減表をつくると

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$
y	1	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0	↗	1



よって　$x = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = \frac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

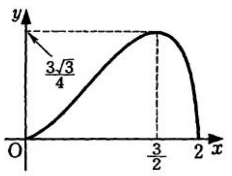
(3) $y = x\sqrt{2x - x^2}$　の定義域は

$2x - x^2 \geqq 0$　より　$0 \leqq x \leqq 2$

$$y' = \sqrt{2x - x^2} + x \cdot \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}$$
$$= -\frac{x(2x - 3)}{\sqrt{2x - x^2}}$$

増減表をつくると

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
y'	／	$+$	0	$-$	／
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0



よって　$x = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = 0,\ 2$ のとき最小値 0

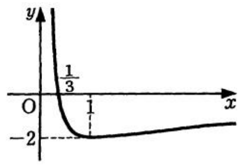
(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}}$　の定義域は

$x^3 > 0$　かつ　$x > 0$　より　$x > 0$

$$y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}} = \frac{3(x - 1)}{2x^2\sqrt{x}}$$

増減表をつくると

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	-2	↗



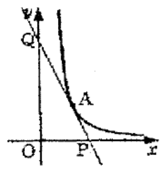
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{1 - 3x}{x\sqrt{x}} = \infty$$

よって $x = 1$ のとき最小値 -2,　最大値なし

106

$y' = -\dfrac{2}{x^3}$ より，点 $\mathrm{A}\left(t,\ \dfrac{1}{t^2}\right)$ における接線の方程式は



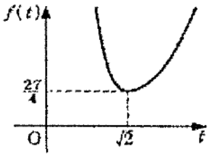
$y - \dfrac{1}{t^2} = -\dfrac{2}{t^3}(x - t)$ すなわち $y = -\dfrac{2}{t^3}x + \dfrac{3}{t^2}$

よって，P，Qの座標は $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2}t,\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{3}{t^2}\right)$

ここで，$\mathrm{PQ}^2 = f(t)$とすると$(t > 0)$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	／	$-$	0	$+$
$f(t)$	／	↘	$\frac{27}{4}$	↗

$f(t) = \left(\dfrac{3}{2}t\right)^2 + \left(\dfrac{3}{t^2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}\left(t^2 + \dfrac{4}{t^4}\right)$



$f'(t) = \dfrac{9}{4}\left(2t - \dfrac{16}{t^5}\right) = \dfrac{9\left(t^6 - 8\right)}{2t^5}$

$f'(t) = 0$ を解くと $t^6 = 8 = 2^3$ より $t^2 = 2$

$t > 0$ から $t = \sqrt{2}$

よって，増減表より $t = \sqrt{2}$ のとき 最小値 $\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

107

$f(x) = \sqrt{1+x} - \left(1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2\right)$ とおくと

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}x$

$f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}\right)$

$x > 0$ のとき $\sqrt{(1+x)^3} > 1$ より $f''(x) > 0$ だから $f'(x)$ は $x \geqq 0$ で増加する。

したがって，$x > 0$ のとき $f'(x) > f'(0)$

$f'(0) = 0$ より $f'(x) > 0$ だから $f(x)$ も $x \geqq 0$ で増加する。

したがって，$x > 0$ のとき $f(x) > f(0)$

$f(0) = 0$ より $f(x) > 0$ よって，$\sqrt{1+x} > 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$ （証明終）

108

方程式より $-2\log x-\dfrac{1}{2}x^2+3x=a$

$y=-2\log x-\dfrac{1}{2}x^2+3x$ と $y=a$ のグラフで考える。

$y'=-\dfrac{2}{x}-x+3=-\dfrac{(x-2)(x-1)}{x}$

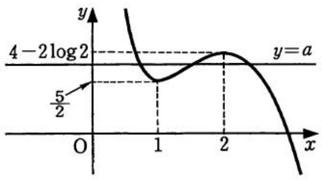
これより，増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\searrow$	$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$4-2\log 2$	$\searrow$

$$\lim_{x\to+0}\left(-2\log x-\frac{1}{2}x^2+3x\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-2\log x-\frac{1}{2}x^2+3x\right)=-\infty$$

以上より，グラフは右図のようになる。



右のグラフから，異なる実数解の個数は

$a<\dfrac{5}{2}$，$4-2\log 2<a$ のとき1個

$a=\dfrac{5}{2}$，$4-2\log 2$ のとき2個

$\dfrac{5}{2}<a<4-2\log 2$ のとき3個

109

(1) $f(x)=x^3$ とおくと $f'(x)=3x^2$

$f(2+0.05)\fallingdotseq f(2)+f'(2)\times 0.05$ より

$2.05^3\fallingdotseq 2^3+3\times 2^2\times 0.05=8.6$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ とおくと $f'(x)=-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

$f(8+0.3)\fallingdotseq f(8)+f'(8)\times 0.3$ より

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{8.3}}\fallingdotseq\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}-\dfrac{1}{3\cdot 8\sqrt[3]{8}}\times 0.3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{160}\fallingdotseq 0.494$

(3) $f(x)=\sin x$ とおくと $f'(x)=\cos x$

$58^\circ=60^\circ-2^\circ=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{90}$ だから

$f\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{90}\right)\fallingdotseq f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\times\left(-\dfrac{\pi}{90}\right)$ より

$\sin 58^\circ\fallingdotseq\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{3}\times\left(-\dfrac{\pi}{90}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3.1416}{90}\fallingdotseq 0.849$

(4) $f(x)=\sqrt{x}$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$6+e=6+2.7182=8.7182=9-0.2818$

$f(9-0.2818)\fallingdotseq f(9)+f'(9)\times(-0.2818)$ より

$\sqrt{6+e}\fallingdotseq 3+\dfrac{1}{2\cdot 3}\times(-0.2818)\fallingdotseq 2.953$

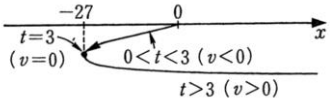
110

(1) $x = t^3 - 3t^2 - 9t$ より

速度 v は　$v = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9$

加速度 α は　$\alpha = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 6t - 6$

(2) $v = 3(t+1)(t-3)$　$(t > 0)$ より



$t = 3$ のとき　$v = 0$

$3 < t$ のとき　$v > 0$

$0 < t < 3$ のとき　$v < 0$

よって，P が運動の向きを変える t の値は　$t = 3$

B 問題

111

$f(x) = x^2 + ax + b + 6\log(1+x)$ より

$f'(x) = 2x + a + \dfrac{6}{1+x}$

$f(0) = 3$ より $b = 3$

$f'(0) = 0$ より $a + 6 = 0$ だから $a = -6$

このとき　$f(x) = x^2 - 6x + 3 + 6\log(1+x)$

$f'(x) = 2x - 6 + \dfrac{6}{1+x} = \dfrac{2x(x-2)}{1+x}$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	3	↘		↗

上の増減表より，$x = 0$ で極大値 3 をとり，条件をみたす。

よって　$a = -6,\ b = 3$

112

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2-x+1}\ \text{より}$$

$$f'(x)=\frac{a(x^2-x+1)-(ax+b)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-ax^2-2bx+a+b}{(x^2-x+1)^2}$$

$f(2)=1$ より $2a+b=3$

$f'(2)=0$ より $a+b=0$

これを解いて $a=3,\ b=-3$

このとき，$f(x)=\dfrac{3x-3}{x^2-x+1}$

$$f'(x)=\frac{-3x^2+6x}{(x^2-x+1)^2}=-\frac{3x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘

上の増減表より，$x=2$ で極大値 1 をとり，条件をみたす。

よって $a=3,\ b=-3$

また，極小値は -3 $(x=0$ のとき$)$

113

$y=x\sin x$ より $y'=\sin x+x\cos x$

接点の座標を $(a,\ a\sin a)$ とすると，接線の方程式は

$y-a\sin a=(\sin a+a\cos a)(x-a)$ …①

点 $(0,\ 0)$ を通るから

$-a\sin a=(\sin a+a\cos a)(-a)$

$a^2\cos a=0$　$0<a\leqq\pi$ より $a=\dfrac{\pi}{2}$

これを①に代入して $y=x$

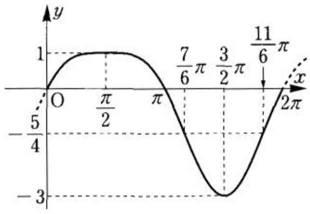
114

(1) $y'=2\cos x-2\sin x\cos x=2\cos x(1-\sin x)$

$y''=-2\sin x-2\cos^2 x+2\sin^2 x=2(2\sin x+1)(\sin x-1)$

これより，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で増減表は下記のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	↗	1	↘	0	↘	$-\frac{5}{4}$	↘	-3	↗	$-\frac{5}{4}$	↗	0



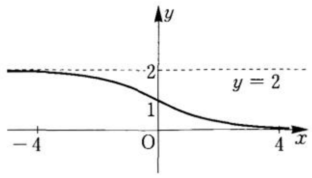
(2) $y = \dfrac{2}{1+e^x}$

$$y' = -\frac{2e^x}{\left(1+e^x\right)^2} < 0$$

$$y'' = -2 \cdot \frac{e^x\left(1+e^x\right)^2 - e^x 2\left(1+e^x\right)e^x}{\left(1+e^x\right)^4}$$

$$= \frac{2e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$
y	↘	1	↘



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+e^x} = 2$$

115

$y = |x|e^x$

(i) $x \geqq 0$ のとき $y = xe^x$

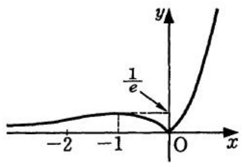
$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

(ii) $x < 0$ のとき $y = -xe^x$

$$y' = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

増減表をつくると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$+$
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗



$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(-xe^x\right) = 0$$

よって　$x = 0$ のとき最小値 0，最大値なし

116

(1) 台形 PABQ は　AP＝BQ の等脚台形であり，

上底 $\mathrm{PQ} = 2a\cos\theta$，下底 $\mathrm{AB} = 2a$，高さは $a\sin\theta$ であるから，面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left(2a\cos\theta + 2a\right)\cdot a\sin\theta = a^2\left(\cos\theta + 1\right)\sin\theta$$

（別解）　$S = 2\triangle\mathrm{OAP} + \triangle\mathrm{OPQ}$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}a^2\sin\theta + \frac{1}{2}a^2\sin\left(\pi - 2\theta\right) = a^2\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

(2)　$S' = a^2\left\{-\sin^2\theta + (\cos\theta + 1)\cos\theta\right\}$

$= a^2\left(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1\right) = a^2(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$

ここで　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$　より増減表をつくると

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'	／	$+$	0	$-$	／
S	／	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	↘	／

よって，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき　最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

117

$f(x) = e^x$，$g(x) = \sqrt{x+k}$　とすると

$f'(x) = e^x$，$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+k}}$

点 P の x 座標を α とすると

$f(\alpha) = g(\alpha)$　かつ　$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるから

$e^\alpha = \sqrt{\alpha + k}$ $\cdots$①　かつ　$e^\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha+k}}$ $\cdots$②

①，② より　$e^\alpha = \dfrac{1}{2e^\alpha}$　すなわち　$e^{2\alpha} = \dfrac{1}{2}$

$e^\alpha > 0$ より　$e^\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\alpha = \log\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}\log 2$

①より　$k = e^{2\alpha} - \alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log 2$

このとき，求める接線の方程式は

$y - e^\alpha = e^\alpha(x - \alpha)$　であるから　$y - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \dfrac{1}{2}\log 2\right)$

すなわち　$y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\log 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

118

（ⅰ） $f(x)=x-\sin x$ とおくと $f'(x)=1-\cos x$

$x>$ のとき $f'(x)\geqq 0$ より $x\geqq 0$ で $f(x)$ は増加する。

よって $f(x)>f(0)$

$f(0)=0$ より $f(x)>0$ すなわち $\sin x<x$

（ⅱ） $g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ とおくと

$$g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$$

$$g''(x)=-\sin x+x=f(x)$$

$x>0$ のとき $g''(x)\geqq 0$ より $x\geqq 0$ で $g'(x)$ は増加する。

よって $g'(x)>g'(0)$

$g'(0)=0$ より $g'(x)>0$ すなわち $g(x)$ も $x\geqq 0$ で増加する。

したがって $g(x)>g(0)$, $g(0)=0$ より $g(x)>0$ すなわち $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x$

（ⅰ），（ⅱ）より $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$ （証明終）

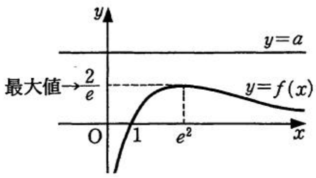
119

$a\sqrt{x}>\log x$ より $a>\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ …①

$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと $f'(x)=\dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$

$x>0$ における増減表は

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{2}{e}$	↘



これから，$f(x)$ の最大値は $f(e^2)=\dfrac{2}{e}$

よって，$x>0$ について①が成り立つ条件は $a>\dfrac{2}{e}$

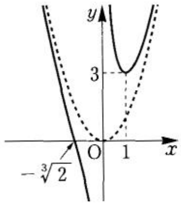
120

(1) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

$$y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2\left(x^3 - 1\right)}{x^2} = \frac{2(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{x^2}$$

増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↘	／	↘	3	↗



$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = \infty,\quad \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} y = \infty,\quad \lim_{x\to-0} y = -\infty$

以上のことより，グラフは右図のようになる。

(2) $x = 0$ は，$x^3 - ax + 2 = 0$ の解ではないから

$x^2 + \dfrac{2}{x} = a$ と変形し，$y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ と $y = a$

のグラフの共有点の個数を調べる。(1) のグラフを利用して

$a < 3$ のとき 1 個

$a = 3$ のとき 2 個

$a > 3$ のとき 3 個

121

t 秒後の半径を r cm， 表面積を S cm^2， 体積を V cm^3 とすると

$S = 4\pi r^2$， $V = \dfrac{4}{3}\pi r^2$ 時間 t で微分すると

$\dfrac{dS}{dt} = 8\pi r\dfrac{dr}{dt}$， $\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$ より $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{r}{2} \times \dfrac{dS}{dt}$

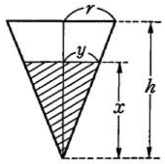
$\dfrac{dS}{dt} = 4\pi$ で $r = 10$ のときであるから $\dfrac{dV}{dt} = 20\pi$ よって 20π［cm^3 / 秒］

発展問題

122

t 秒後の水面の高さを x cm，水面の面積を S cm^2，水の量を V cm^3 とすると,

このときの水面の半径は $\dfrac{r}{h}x$ cm であるから



$$S=\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2 \cdots ①$$

$$V=\frac{1}{3}Sx=\frac{\pi r^2}{3h^2}x^3 \qquad \cdots ②$$

②の両辺を t で微分すると

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi r^2}{3h^2}\cdot 3x^2\frac{dx}{dt} \qquad ②より \ \frac{\pi r^2}{3h^2}=\frac{V}{x^3} \ を代入すると$$

$$=\frac{V}{x^3}\cdot 3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{3V}{x}\frac{dx}{dt}$$

ここで，$V=wt$ より $\dfrac{dV}{dt}=w$ であるから

$$w=\frac{3V}{x}\frac{dx}{dt} \quad すなわち \quad \frac{dx}{dt}=\frac{w}{3V}x \cdots ③$$

水の量が v cm^3 になったときの水面の高さを x_0 cm とすると

$$v=\frac{\pi r^2}{3h^2}{x_0}^3 \quad より \quad x_0=\left(\frac{3h^2v}{\pi r^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

よって，このときの水面の上昇する速度は，③より

$$\frac{dx}{dt}=\frac{w}{3v}x_0=\frac{w}{3v}\left(\frac{3h^2v}{\pi r^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{3h^2}{\pi r^2v^2}\right)^{\frac{1}{3}}w$$

また，①の両辺を t で微分すると

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot 2x\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{3V}{x^3}\cdot 2x\frac{w}{3V}x=\frac{2w}{x}$$

よって，水の量が v cm^3 になったときの水面の広がる速度は

$$\frac{dS}{dt}=\frac{2w}{x_0}=2\left(\frac{\pi r^2}{3h^2v}\right)^{\frac{1}{3}}w$$

２章の問題

1

$\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$ であればよい。

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

$\therefore\ a=3$

2

①は誤り。正しくは $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

②は誤り。正しくは $(c)' = 0$

③は誤り。正しくは $\{f(x)^3\}' = 3f(x)^2 f'(x)$

④は正しい。

⑤は正しい。

⑥は誤り。正しくは $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

よって，正しいものは④と⑤

3

(1) $y' = e^{x^2+2x} \cdot (2x+2) = 2(x+1)e^{x^2+2x}$

(2) $y' = \dfrac{\cos x \cdot (x+1) - \sin x \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)\cos x - \sin x}{(x+1)^2}$

(3) $y' = \dfrac{-\sin x \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{2x\sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}}$

(4) $y' = \dfrac{1}{\log x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\log x}$

(5) $y' = 2x\sin(3x+5) + 3x^2\cos(3x+5)$

(6) $y' = \cos x \cdot 2^{\sin x}\log 2$

4

$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin 3x + e^{2x} \cdot 3\cos 3x = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$

$\therefore \ f'(0) = e^0(2\sin 0 + 3\cos 0) = 3$

5

$f'(x) = \log x$ とおく。

$f'(1)$を定義にしたがって求めると $f'(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\log(1+h)}{h}$

一方， $f(x)$を微分すると $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ だから，$f'(1) = 1$

よって， $\lim_{h \to 0} \dfrac{\log(1+h)}{h} = 1$ を得る。

$\therefore \ \lim_{x \to 0} \dfrac{5}{3x}\log(1+2x) = \dfrac{10}{3}\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(1+2x)}{2x} = \dfrac{10}{3}$

6

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}=\alpha$ とすると

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}\cdot x^2\right\}=\alpha\cdot 0=0$

一方 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)\right\}=\sqrt{9-0+7}-(a+0)=4-a$

$\therefore\ 4-a=0\quad\therefore\ a=4$

同様にして

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x^2}\cdot x\right\}=\alpha\cdot 0=0$

一方 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(9-8x+7\cos 2x)-(16+8bx+b^2x^2)}{x\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\right\}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{-7(1-\cos 2x)-8(b+1)x-b^2x^2}{x\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\right\}}=\lim_{x\to 0}\frac{-7\cdot 2\sin^2 x-8(b+1)x-b^2x^2}{x\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\right\}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{-14\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x-8(b+1)-b^2x}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)}=\frac{-14\cdot 1\cdot 0-8(b+1)-0}{\sqrt{9+7}+4}=b+1$

$\therefore\ b+1=0\quad\therefore\ b=-1$

したがって，求める極限値は

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-14\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}-1}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4-x)}=-\frac{15}{8}$

$a=4,\ b=-1$ のとき極限値は $-\dfrac{15}{8}$

7

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと $f'(x)=2ax+b,\quad f''(x)=2a$

$f''(x)+xf'(x)-2f(x)=x$ より $2a+x(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)=x$

$\therefore\ (b+1)x+2(c-a)=0$ xについての恒等式となるためには，$\begin{cases} b+1=0 & \cdots① \\ c-a=0 & \cdots② \end{cases}$

また，$f(1)=a+b+c=5\ \cdots③$

①，②，③より $a=3,\ b=-1,\quad c=3\quad\therefore\ f(x)=3x^2-x+3$

8

(1) $y'=ae^{ax}\sin bx+e^{ax}\cdot b\cos bx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

$y''=ae^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)+e^{ax}(ab\cos bx-b^2\sin bx)$

$=e^{ax}\left\{(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\right\}$

(2) $y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=ay+be^{ax}\cos bx\quad\therefore\ e^{ax}\cos bx=\dfrac{y'-ay}{b}$

$y''=(a^2-b^2)e^{ax}\sin bx+2abe^{ax}\cos bx=(a^2-b^2)y+2ab\cdot\dfrac{y'-ay}{b}$

$=2ay'-(a^2+b^2)y$

9

(1)　$y=\sqrt{x^2+1}$ より $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

接線の方程式は

$$y-\sqrt{a^2+1}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}(x-a)$$

$$y=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}x+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

点 $\left(-\dfrac{1}{7},\ 0\right)$ を通るから

$$0=-\frac{a}{7\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\quad よって\quad a=7$$

(2)　$y=a^x$ より $y'=a^x\log a$

点 $(t,\ a^t)$ における接線の方程式は

$y-a^t=(a^t\log a)(x-t)\quad \therefore\ y=(a^t\log a)x+a^t(1-t\log a)\Leftrightarrow y=x$

$a^t\log a=1\ \cdots$①　$t\log a=1\ \cdots$②

②より　$\log a=\dfrac{1}{t}\quad \therefore\ a=e^{\frac{1}{t}}$

①に代入して　$\left(e^{\frac{1}{t}}\right)^t\log e^{\frac{1}{t}}=1\quad e\cdot\dfrac{1}{t}\log e=1\quad \therefore\ t=e$

よって　$a=e^{\frac{1}{e}}$，接点は $(e,\ e)$

10

(1)　$f(x)=(\log x-1)\log x$　まず，真数条件より $x>0$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\log x+(\log x-1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\log x-1}{x}$$

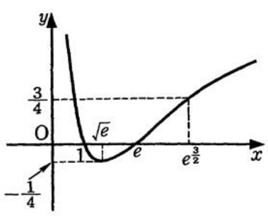
$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\log x-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{3-2\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ は $2\log x-1=0$ より $\log x=\dfrac{1}{2}\quad \therefore\ x=\sqrt{e}$

$f''(x)=0$ は $3-2\log x=0$ より $\log x=\dfrac{3}{2}\quad \therefore\ x=e^{\frac{3}{2}}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	/	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	↘	極小	↗	変曲点	↗



極小値　$f\left(\sqrt{e}\right)=-\dfrac{1}{4}$

$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{3}{4}$ より　変曲点 $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{4}\right)$　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to+0}f(x)=\infty$

これより，グラフは右図のようになる。

(2) $f(x)=e^{2x}-2e^{x}$

$f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}=2e^{x}\left(e^{x}-1\right)$

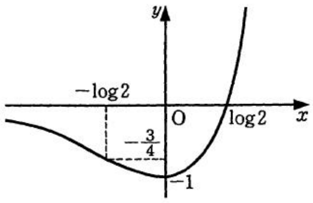
$f''(x)=4e^{2x}-2e^{x}=2e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$

$f'(x)=0$ は $e^{x}-1=0$ より $x=0$

$f''(x)=0$ は $2e^{x}-1=0$ より $e^{x}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $x=-\log 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\log 2$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	変曲点	↘	極小	↗



極小値 $f(0)=-1$

$f(-\log 2)=-\dfrac{3}{4}$ より，変曲点 $\left(-\log 2,\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

これより，グラフは右図のようになる。

11

(1) $f(x)=(x+c)e^{-x^{2}}$

$f'(x)=e^{-x^{2}}+(x+c)(-2x)e^{-x^{2}}=\left(1-2cx-2x^{2}\right)e^{-x^{2}}$

$x=1$ で極値をとるので

$f'(1)=(1-2c-2)e^{-1}=0$ $\therefore$ $c=-\dfrac{1}{2}$

(2) $c=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^{2}}$

$f'(x)=\left(1+x-2x^{2}\right)e^{-x^{2}}=-(2x+1)(x-1)e^{-x^{2}}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$\lim_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^{2}}=0$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^{2}}=0$

極小値 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-e^{-\frac{1}{4}}=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$

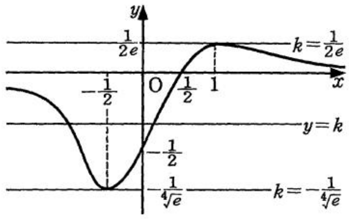
極大値 $f(1)=\dfrac{1}{2}e^{-1}=\dfrac{1}{2e}$

(3)　$x-\dfrac{1}{2}=ke^{x^2}$　は　$k=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$　と同値である。

$y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$　と　$y=k$　との共有点をもつ範囲だから

(2) をもとに　$y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$　のグラフをかく。

右のグラフより　$-\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2e}$



12

(1)　$x>0$　より

$$f(x)=(x+1)\log\frac{x+1}{x}$$
$$=(x+1)\log(x+1)-(x+1)\log x$$
$$f'(x)=\log(x+1)+\frac{x+1}{x+1}-\log x-\frac{x+1}{x}$$
$$=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x}=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$$
$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2(x+1)}>0$$

ゆえに，　$f'(x)$ は増加関数であり　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right\}=0$

よって　$x>0$　において　$f'(x)<0$　だから　$f(x)$ は単調減少関数である。(証明終)

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=1$

(3)　$f(x)$ は減少関数であり，$x>0$ で連続である。

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\left(\frac{1}{e^2}+1\right)\log\left(1+e^2\right)>\log e^2=2$$
$$f(1)=2\log 2<2\cdot\log e=2$$

よって，中間値の定理より　$f(x)=2$ を満たす x が

$\dfrac{1}{e^2}<x<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。(証明終)