新版微分積分 I 演習 解答

2 章の問題

1

$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ 　であればよい。

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \to -1}(x^2-x+1) = 3$ 　∴ 　$a = 3$

2

① は誤り。正しくは $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

② は誤り。正しくは $(c)' = 0$

③ は誤り。正しくは $\{f(x)^3\}' = 3f(x)^2 f'(x)$

④ は正しい。

⑤ は正しい。

⑥ は誤り。正しくは $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

よって，正しいものは ④ と ⑤

3

(1) $y' = e^{x^2+2x} \cdot (2x+2) = 2(x+1)e^{x^2+2x}$

(2) $y' = \frac{\cos x \cdot (x+1) - \sin x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)\cos x - \sin x}{(x+1)^2}$

(3) $y' = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{x} - \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{2x\sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}}$

(4) $y' = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}$

(5) $y' = 2x\sin(3x+5) + 3x^2\cos(3x+5)$

(6) $y' = \cos x \cdot 2^{\sin x} \log 2$

4

$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin 3x + e^{2x} \cdot 3\cos 3x = e^{2x}\big(2\sin 3x + 3\cos 3x\big)$

∴ 　$f'(0) = e^0\big(2\sin 0 + 3\cos 0\big) = 3$

5

$f(x) = \log x$ とおく。

$f'(1)$ を定義にしたがって求めると 　$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h}$

一方，$f(x)$ を微分すると 　$f'(x) = \frac{1}{x}$ 　だから，$f'(1) = 1$

よって，　$\lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$ 　を得る。

∴ 　$\lim_{x \to 0} \frac{5}{3x}\log(1+2x) = \frac{10}{3}\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+2x)}{2x} = \frac{10}{3}$

6

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)}{x^2} = \alpha$ 　とすると

$\lim_{x \to 0}\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)\right\} = \lim_{x \to 0}\left\{\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)}{x^2} \cdot x^2\right\} = \alpha \cdot 0 = 0$

一方 　$\lim_{x \to 0}\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)\right\} = \sqrt{9-0+7} - (a+0) = 4 - a$

∴ 　$4 - a = 0$ 　　∴ 　$a = 4$

同様にして

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x^2}\cdot x\right\}=\alpha\cdot 0=0$$

一方 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(9-8x+7\cos 2x)-(16+8bx+b^2x^2)}{x\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-7(1-\cos 2x)-8(b+1)x-b^2x^2}{x\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\}}=\lim_{x\to 0}\frac{-7\cdot 2\sin^2 x-8(b+1)x-b^2x^2}{x\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-14\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\sin x-8(b+1)-b^2x}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)}=\frac{-14\cdot 1\cdot 0-8(b+1)-0}{\sqrt{9+7}+4}=b+1$$

$\therefore\quad b+1=0\qquad\therefore\quad b=-1$

したがって，求める極限値は

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-14\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2}-1}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4-x)}=-\frac{15}{8}$$

7

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと　$f'(x)=2ax+b,\qquad f''(x)=2a$

$f''(x)+xf'(x)-2f(x)=x$ より　$2a+x(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)=x$

$\therefore\quad (b+1)x+2(c-a)=0\qquad\therefore\quad \begin{cases} b+1=0 & \cdots ① \\ c-a=0 & \cdots ② \end{cases}$

また，$f(1)=a+b+c=5\cdots$ ③

①，②，③ より　$a=3,\ b=-1,\ c=3\qquad\therefore\quad f(x)=3x^2-x+3$

8

(1) $y'=ae^{ax}\sin bx+e^{ax}\cdot b\cos bx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

$y''=ae^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)+e^{ax}(ab\cos bx-b^2\sin bx)=e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\}$

(2) $y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=ay+be^{ax}\cos bx\qquad\therefore\quad e^{ax}\cos bx=\dfrac{y'-ay}{b}$

$y''=(a^2-b^2)e^{ax}\sin bx+2abe^{ax}\cos bx=(a^2-b^2)y+2a\cancel{b}\cdot\dfrac{y'-ay}{\cancel{b}}=2ay'-(a^2+b^2)y$

9

(1) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　だから，点 $(a,\sqrt{a^2+1})$ における接線の方程式は

$y-\sqrt{a^2+1}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}(x-a)$

$\therefore\quad y=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}x-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}+\sqrt{a^2+1}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}x+\dfrac{-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}+1}{\sqrt{a^2+1}}$

$=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}x+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

x 切片を求めるため，$y=0$ を代入すると

$0=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}x+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\qquad\therefore\quad 0=ax+1\qquad\therefore\quad x=-\dfrac{1}{a}$

題意より，$-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{7}$ だから　$a=7\qquad\therefore$ ア：7

(2) 接点の x 座標を c とすると，接点の y 座標を考えれば，題意より $c=a^c\quad\cdots$ ①

$y=a^x$ を微分すると $y'=a^x\log a$ で，接線の傾き 1 だから，$a^c\log a=1\quad\cdots$ ②

①，②より $c\log a=\log a^c=1\qquad\therefore\ a^c=e\qquad\cdots$ ③

①，③より $c=e\qquad\cdots$ ④

①，④より $a=c^{\frac{1}{c}}=e^{\frac{1}{e}}$　　以上よりイ：$e^{\frac{1}{e}}$，ウ：e，エ：e

10

(1)　真数条件より $x>0$

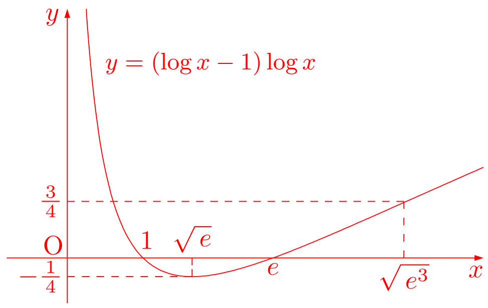
$f'(x)=\dfrac{1}{x}\log x+(\log x-1)\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}(2\log x-1)$

$\therefore\ f'(x)=0$ ならば $\log x=\dfrac{1}{2}$ すなわち $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}(2\log x-1)+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{2}{x}=-\dfrac{1}{x^2}(2\log x-3)$

$\therefore\ f''(x)=0$ ならば $\log x=\dfrac{3}{2}$ すなわち $x=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	$\sqrt{e^3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$\times$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\times$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{3}{4}$	↗



上の増減表より

$x=\sqrt{e}$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{4}$，極大値なし

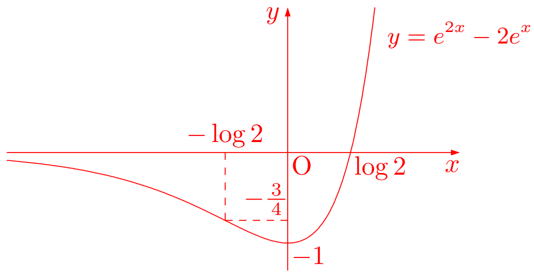
$0<x<\sqrt{e^3}$ で下に凸，$x>\sqrt{e^3}$ で上に凸

(2)　$f'(x)=2e^{2x}-2e^x=2e^x(e^x-1)$　　$\therefore\ f'(x)=0$ ならば $e^x=1$ すなわち $x=0$

$f''(x)=4e^{2x}-2e^x=2e^x(2e^x-1)$　　$\therefore\ f''(x)=0$ ならば $e^x=\dfrac{1}{2}$ すなわち $x=\log\dfrac{1}{2}=-\log 2$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}-2e^x)=0$

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\log 2$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3}{4}$	↘	-1	↗



上の増減表より

$x=0$ のとき極小値 -1，極大値なし

$x<-\log 2$ で上に凸，$x>-\log 2$ で下に凸

11

(1)　$f'(x)=e^{-x^2}+(x+c)e^{-x^2}(-2x)=-(2x^2+2cx-1)e^{-x^2}$

$x=1$ で極値をとるから $f'(1)=-(2c+1)e^{-1}=0$　　$\therefore\ 2c+1=0$　　$\therefore\ c=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-x^2}+ce^{-x^2}\right)=0$

$t=-x$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\left((-t+c)e^{-t^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-te^{-t^2}+ce^{-t^2}\right)=0$

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

上の増減表より $x<-\dfrac{1}{2}$，$x>1$ で単調減少，$-\dfrac{1}{2}<x<1$ で単調増加

(3)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が共有点を持つ k の範囲を求めればよい。

(2) の増減表から $-\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2e}$

12

(1) ［証明］

$x>0$ より

$$f(x)=(x+1)\log\frac{x+1}{x}=(x+1)\log(x+1)-(x+1)\log x$$

$$f'(x)=\log(x+1)+\frac{x+1}{x+1}-\log x-\frac{x+1}{x}=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x}=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}5=\frac{1}{x^2(x+1)}>0$$

ゆえに $f'(x)$ は増加関数であり

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right\}=0$$

よって $x>0$ において $f'(x)<0$ だから $f(x)$ は単調減少関数である。 //

(2) $f(x)=(x+1)\log\dfrac{x+1}{x}=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ だから

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\infty$$

$t=\dfrac{1}{x}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ だから

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{t}+1\right)\log(1+t)=\lim_{t\to+0}\left\{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}+\log(1+t)\right\}=1$$

(3) ［証明］

$f(x)$ は減少関数であり，$x>0$ で連続である。

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\left(\frac{1}{e^2}+1\right)\log(1+e^2)>\log e^2=2 \qquad f(1)=2\log 2<2\cdot\log e=2$$

よって，中間値の定理より $f(x)=2$ を満たす x が $\dfrac{1}{e^2}<x<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。 //