１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５

練習問題

［１］（基本）　次の関数のグラフを描きなさい。

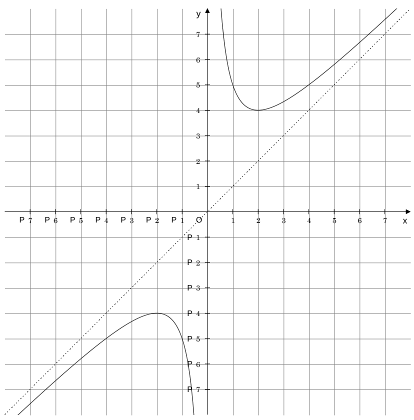
(1)　$y = x + \dfrac{4}{x}$

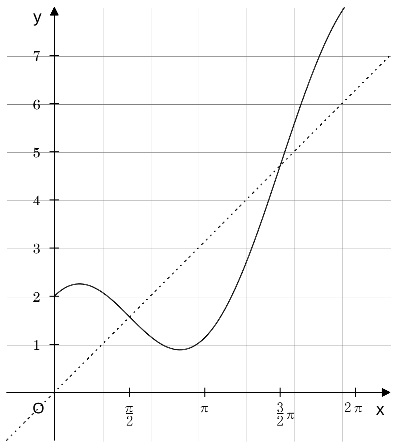
［解］　$y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2}$　より

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdot\cdot$	∞
$f'(x)$		＋	0	－		－	0	＋	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$　∞	↘	4	↗	∞

極大　　　　　　　　　　極小

漸近線　$x = 0$　,　$y = x$





(2)　$y = x + 2\cos x$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

［解］

微分して　$y' = 1 - 2\sin x$

$y' = 0$　となるのは　$\sin x = \dfrac{1}{2}$　より　$x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$

したがって、増減表は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$	$\cdots$	2π
y'		＋	0	－	0	＋	
y	0	↗	$\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗	$2\pi + 2$

［２］（標準）　次の関数の増減・極値・凹凸を調べ、グラフを描きなさい。

(1)　$y=\dfrac{x}{x^2+1}$

微分して　$y'=-\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

さらに微分して　$y''=-\dfrac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

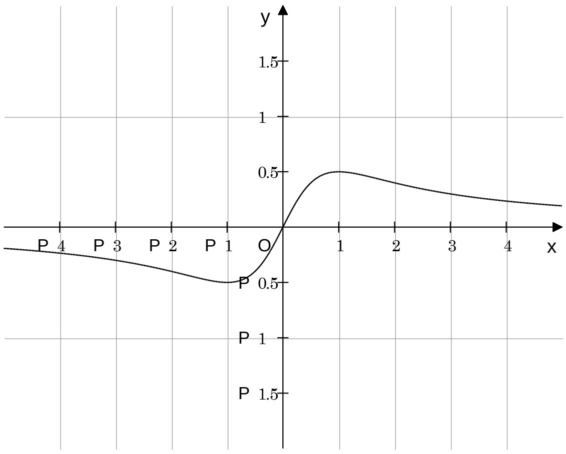
したがって、増減・凹凸表は

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1		0	$\cdots$	1	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
y'		−	−	−	0	＋		＋	0	−	−	−	
y''		−	0	＋	＋	＋	0	−	−	−	0	＋	
y	0	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	0	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	↘	0

（極小）　（極大）

$x\to\pm\infty$ のとき $y\to 0$ であるから、漸近線は $y=0$,

また、奇関数であるから原点対称である。



(2)　$y = e^{\frac{1}{x}}$

微分して　　　$y' = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0$

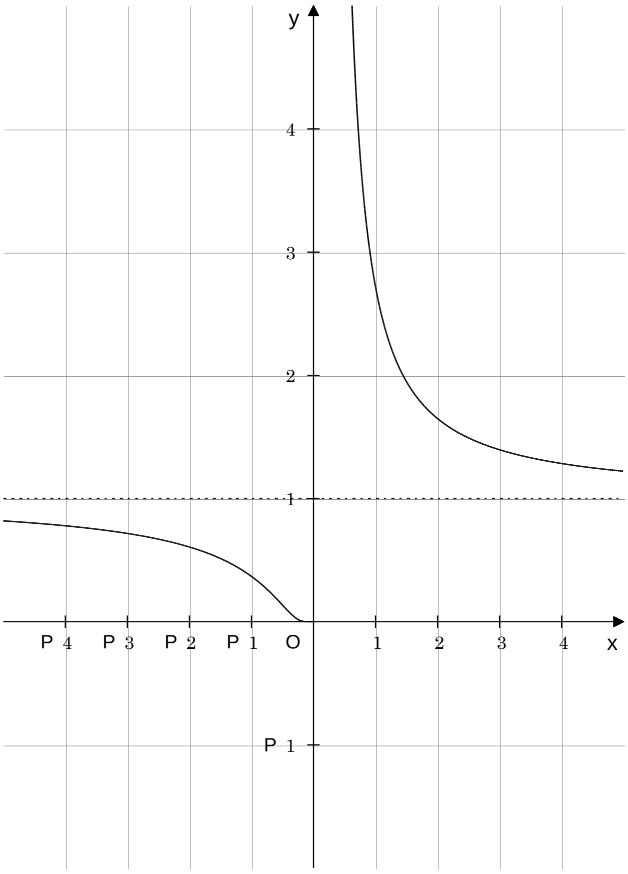
さらに微分して　$y'' = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$

したがって、増減表は

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\dfrac{1}{2}$</td><td>$\cdots$</td><td colspan="2">0</td><td>$\cdots$</td><td>∞</td></tr>
<tr><td>y'</td><td></td><td>−</td><td></td><td>−</td><td colspan="2"></td><td>−</td><td></td></tr>
<tr><td>y''</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td colspan="2"></td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>↘</td><td>$\dfrac{1}{e^2}$</td><td>↘</td><td>0</td><td>∞</td><td>↘</td><td>1</td></tr>
</table>

$x \to \pm\infty$ のとき $y \to 1$　および　$x \to +0$ のとき $y \to \infty$ であるから、

漸近線は　$y = 1$　，　$x = 0$



［３］(標準)　次の方程式の実数解の個数を、グラフを利用して求めなさい。

$$x\log x - k = 0 \qquad （k \text{ は定数}）$$

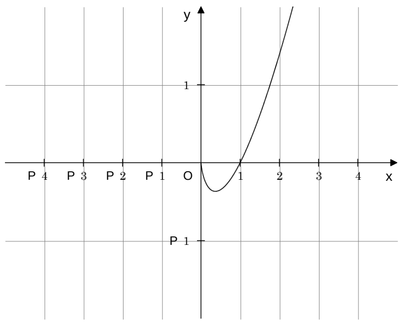
［ $x\log x - k = 0$ の実数解は、曲線 $y = x\log x$ と直線 $y = k$ の交点の x 座標である。］

変形すると　$x\log x = k$　であるから、$x\log x - k = 0$ の実数解は、曲線 $y = x\log x$ と直線 $y = k$ の交点の x 座標である。

$y = x\log x$　について

$y' = \log x + 1$　より、増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	∞
y'	／	$-$	0	$+$	
y	／	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	∞



$x \to 0$ のとき $y \to 0$

グラフより

$k < -\frac{1}{e}$ のとき　0 個　，$k = -\frac{1}{e}$ のとき 1 個，$-\frac{1}{e} < k < 0$ のとき 2 個，

$0 \leqq k$ のとき 1 個

発展問題

［３］ 次の関数のグラフを描きなさい。

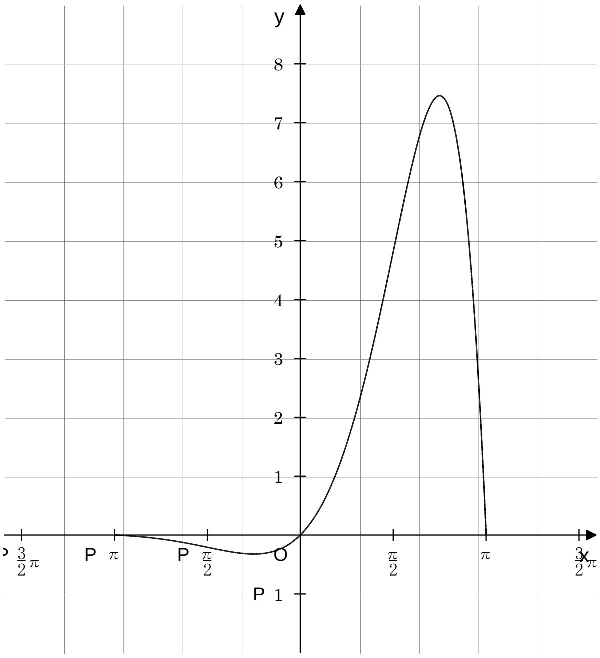
(1)　$y = e^x \sin x$ （$-\pi \leqq x \leqq \pi$）

$y' = e^x(\sin x + \cos x)$

$\sin x + \cos x = 0$ の解は $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ より　$x = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

したがって、増減表は

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}$	↘	0



(2)　$x^2y^2 = x^2 - y^2$

　グラフは x 軸、y 軸に関して対称であるから、$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分のグラフを x 軸、y 軸に関して対称に折り返したものである。

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$　のとき　$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

微分して　$y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} > 0$

よって単調増加である。

また、　$y'' = -\dfrac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -\dfrac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \leqq 0$　であるから、上に凸のグラフである。

$x \to \infty$ のとき $y \to 1$　であるから　漸近線は　$y = 1$

以上から