第２章　微分法まとめの問題

［１］　次の関数を微分しなさい。

(1)　$y = e^{-2x}\sin 3x$

$$y' = -2e^{-2x}\sin 3x + 3e^{-2x}\cos 3x = e^{-2x}(-2\sin 3x + 3\cos 3x)$$

(2)　$y = \log\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{x}}$

$$y' = \frac{1+e^{x}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{e^{-x}(1+e^{x})-(1-e^{-x})e^{x}}{(1+e^{x})^{2}} = \frac{e^{-x}-e^{x}+2}{(1-e^{-x})(1+e^{x})}$$

(3)　$y = \log\left(\sin(e^{x^2})\right)$

$$y' = \frac{1}{\sin(e^{x^2})}\cdot\cos(e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot 2x = \frac{2xe^{x^2}}{\tan(e^{x^2})}$$

(4)　$y = x^{\sin x}$　（$x>0$）

（解 1）　$\log y = \sin x \log x$

$$\frac{y'}{y} = \cos x\log x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

（解２）　$y = e^{\sin x\log x}$

$$y' = e^{\sin x\log x}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

［２］　次の関数の第n次導関数を求めなさい。

(1)　$f(x)=\log(2x+1)$

（解１）　$f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}=2(2x+1)^{-1}$，　$f''(x)=2^2(-1)(2x+1)^{-2}$，　$f'''(x)=2^3(-1)(-2)(2x+1)^{-3}$

$\cdots\cdots$

したがって　$f^{(n)}(x)=2^n(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)(2x+1)^{-n}=\dfrac{2^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2x+1)^n}$

（解２）　$f(x)=\log 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\log\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\log 2$

$$f'(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1},\quad f''(x)=(-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-2},\quad f'''(x)=(-1)(-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$\cdots\cdots$

したがって

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{2^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2x+1)^n}$$

(2)　$f(x)=\sin 2x$

$$y'=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=2^2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2^2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2^2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\times 2\right)$$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

［３］　曲線$y=\tan^2 x$上の点$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{3}\right)$における接線の方程式を求めなさい。

$y'=2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$　より　接線の傾きは　$2\tan\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

よって、接線の方程式は　　$y=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{3}$

［4］　関数　$y = xe^{-x}$　増減・極値・凹凸調べて、グラフを描きなさい。

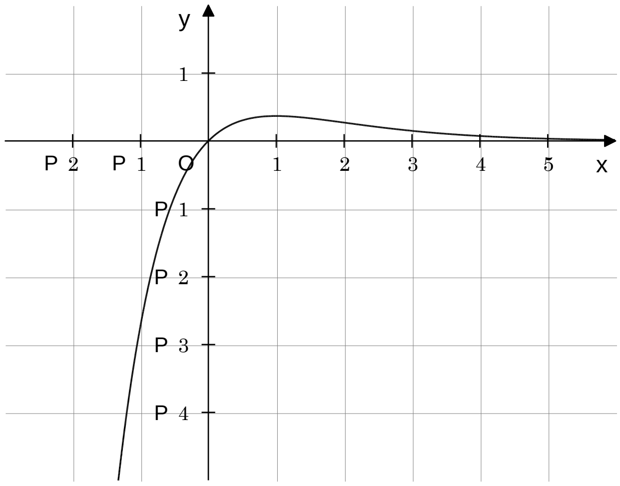
$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = -(x-1)e^{-x}$$

$$y'' = (x-2)e^{-x}$$

よって、増減、極値は次の通りとなる。

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
y'		＋	0	−	−	−	
y''		−	−	−	0	＋	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{e}$ （極小）	↘	$\dfrac{2}{e^2}$	↘	0

$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$　より漸近線　$y = 0$



［5］　次の関数のテイラー展開を（　）内の項まで求めなさい。

(1)　$f(x) = \log(1+x)$　（3次）

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$，　$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$，　$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$　であるから

$f(0) = 0$，　$f'(0) = 1$，　$f''(0) = -1$，　$f'''(0) = 2$

よって　$\log(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \cdots\cdots$

(2)　$f(x)=x\sin x$　（n 次）

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \cdots\cdots\ +\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\ \cdots\cdots$$

の両辺に x をかけると

$$x\sin x = x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}+\ \cdots\cdots\ +\frac{(-1)^m x^{2m+2}}{(2m+1)!}+\ \cdots\cdots$$

［８］　次の極限値を求めなさい。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x-x\sin x}$

$\dfrac{0}{0}$ の不定形なので

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x-x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\sin x-x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-\cos-\cos x+x\sin x}=0$$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\log x}$$

ところが　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$　（ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形 ）

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\log x}=e^0=1$