１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５

練習問題

［１］（基本）　次の関数の増減・極値を求めなさい。

(1)　$f(x)=x^5-5x-2$

$f'(x)=5x^4-5=5(x+1)(x-1)(x^2+1)$　より　$f'(x)=0$　の解は　$x=\pm 1$

よって、増減および極値は次の表のとおりとなる。

x		-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	−	0	＋
$f(x)$	↗	2（極大）	↘	−6（極小）	↗

(2)　$f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}-1$

$f'(x)=1-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$　より増減および極値は次の表のとおりとなる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdot\cdot$
$f'(x)$	＋		−	0	＋
$f(x)$	↗		↘	2（極小）	↗

［２］（標準）　次の関数の増減・極値を求めなさい。

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$　より増減および極値は次の表のとおりとなる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	−
$f(x)$	↗	1（極大）	↘

(2)　$f(x)=xe^{-x^2}$

$f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=-2\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$　より増減および極値は次の表のとおりとなる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	↘
		極小		極大	

［３］（標準）次の関数の最大値、最小値を求めなさい。

(1)　$f(x)=x\cos x-\sin x\quad(0\leqq x\leqq\pi)$

$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$　より増減および極値は次の表のとおりとなる。

x	0	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\pi$

$x=0$　のとき最大値　0　，　$x=\pi$ のとき最小値　$-\pi$

(2)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}\quad(1\leqq x\leqq4)$

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$　より増減および極値は次の表のとおりとなる。

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{\log 4}{4}$

$x=e$　のとき最大値　$\dfrac{1}{e}$　，　$x=1$ のとき最小値　0

［4］（標準）次の不等式を証明しなさい。

(1)　$x > \sin x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

$f(x) = x - \sin x$ とおくと　$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき　$f'(x) = 1 - \cos x > 0$

したがって、$f(x)$ は単調増加

よって　$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき　$f(x) > f(0) = 0$

したがって　$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき　$x > \sin x$

(2)　$\log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

定義域は　$x > -1$

$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log(1+x)$ とおくと　$f'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x}$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		－	0	＋
$f(x)$		↘	0	↗

増減表より　$f(x) \geqq 0$　よって　$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geqq \log(1+x)$

すなわち　$\log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

発展問題

［5］次の関数の極値を、第２次導関数を用いて求めなさい。

$$f(x) = \sin 2x + 2\cos x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x = -2(2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

極値をとる x の値は、$f'(x) = 0$ より　$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

ところで、$f''(x) = -4\sin 2x - 2\cos x$ より

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -3\sqrt{3} < 0$　よって、$x = \frac{\pi}{6}$ のとき極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -4\sin\frac{5\pi}{3} - 2\cos\frac{5\pi}{6} = 3\sqrt{3} > 0$　よって、$x = \frac{5\pi}{6}$ のとき極小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$