練習問題

［１］(基本)　関数 $f(x)=x^3$ について、次の値を求めなさい。

(1)　$x=1$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率

(2)　$x=1$ における微分係数 $f'(1)$

(1)　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{2^3-1^3}{2-1}=7$

(2)　$f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1^3}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+3)=3$

［２］(標準)　次の関数の導関数を定義から求めなさい。

(1)　$f(x)=x^3+x$　　　　(2)　$f(x)=\sqrt{x}$

(1)　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\left\{(x+h)^3+(x+h)\right\}-(x^3+x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2+1\right)=3x^2+1$

(2)　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

［３］(基本)　次の関数の導関数を求めなさい。

(1)　$f(x)=3x^4-2x^3+5x-4$

$f'(x)=12x^3-6x^2+5$

(2)　$f(x)=\sqrt[3]{x}$

$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$　より

$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(3)　$f(x)=x\sin x$

$f'(x)=\sin x+x\cos x$

(4)　$f(x)=x^3e^x$

$f'(x)=3x^2e^x+x^3e^x=x^2(x+3)e^x$

(5)　$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=-\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$

(6)　$f(x)=\dfrac{1}{\log x}$

$f(x)=-\dfrac{1}{(\log x)^2}\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

［４］（標準）　次の関数の導関数を求めなさい。

(1)　$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$

$$f'(x)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{2(x^4-1)}{x^3}$$

(2)　$f(x)=e^x\cos x$

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$$

$$=e^x(\cos x-\sin x)$$

(3)　$f(x)=\dfrac{1}{\tan x}$

$f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ であるから

$$f'(x)=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

(4)　$f(x)=\dfrac{\sin x}{\log x}$

$$f'(x)=\frac{\cos x\log x-\sin x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$=\frac{x\cos x\log x-\sin x}{x(\log x)^2}$$

［５］(標準)　関数 $y=x^3+1$ のグラフについて
(1)　曲線上の点Ａ$(1,2)$における接線の方程式を求めなさい。
(2)　点Ａ$(1,2)$において接線と垂直な直線の方程式を求めなさい。

(1)　$y'=3x^2$　より　点Ａにおける接線の傾きは　３
よって、接線の方程式は　$y=3(x-1)+2$

(2)　点Ａ$(1,2)$において接線と垂直な直線の傾きは　$-\dfrac{1}{3}$

よって、求める直線の方程式は　$y=-\dfrac{1}{3}(x-1)+2$

発展問題

［６］　関数 $y=x\log x$ のグラフの接線について、点Ａ$(0,-5)$を通る接線の方程式および接点の座標を求めなさい。

接点の座標を$(t,t\log x)$とおく。
$y'=\log x+1$　より　接線の方程式は　$y=(\log t+1)(x-t)+t\log t$

点Ａ$(0,-5)$を通ることから　$-5=-t\log t-t+t\log t$　よって　$t=5$

ゆえに　接点の座標は$(5,5\log 5)$
接線の方程式　$y=(\log 5+1)(x-5)+5\log 5$　すなわち　$y=(\log 5+1)x-5$

［７］（発展）　関数 $f(x)=|x|(x-1)$ の $x=0$ での微分可能性を調べなさい。

$x=0$ における微分係数は、定義から

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|(h-1)}{h}$$

ところが　$\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{|h|(h-1)}{h}=\lim_{h\to +0}(h-1)=-1$　，$\displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{|h|(h-1)}{h}=\lim_{h\to -0}-(h-1)=1$　であるから

極限値 $f'(0)$ は存在しない。したがって $x=0$ では微分可能でない。