練習問題

［１］（基本）　次の関数のマクローリン展開を３次の項まで求めなさい。

(1) $f(x)=e^{3x}$　　　(2) $f(x)=x\sin x$

解

(1) $f'(x)=3e^{3x}$，$f''(x)=9e^{3x}$，・$f'''(x)=27e^{3x}$　より

$f(0)=1$，$f'(0)=3$，$f''(0)=9$，$f'''(0)=27$

よって

$$e^{3x}=1+3x+\frac{9x^2}{2}+\frac{9x^3}{2}+\cdots\cdots$$

(2) $f(x)=x\sin x$

$f'(x)=\sin x+x\cos x$，$f''(x)=2\cos x-x\sin x$，$f'''(x)=-3\sin x-x\cos x$

$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0)=2$，$f'''(0)=0$

よって

$$x\sin x=x^2+\cdots\cdots$$

［２］（標準）　次の関数のマクローリン展開を n 次の項まで求めなさい。

$$f(x)=xe^x$$

解

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ \cdots\cdots\ +\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

両辺に x をかけると

$$xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ \cdots\cdots\ +\frac{x^{n+1}}{n!}+\cdots\cdots$$

［３］（基本）　次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{x}$

解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4$　　(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形であるから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0$

(3) $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=1$

［４］（標準）　次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x^3}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+0}\log x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=-\infty\cdot\infty=-\infty$

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$の不定形であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{6}=\infty$

(3) 変形すると $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$

$\dfrac{0}{0}$の不定形であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$

発展問題

［５］　次の関数のマクローリン展開をn次の項まで求めなさい。

$$f(x)=x^2\sin x$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \cdots\cdots\ +\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\ \cdots\cdots$$

両辺にx^2をかけて」

$$x^2\sin x=x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}+\ \cdots\cdots\ +\frac{(-1)^m x^{2m+3}}{(2m+1)!}+\ \cdots\cdots$$

［６］　次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x\log x$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\sin x}$

(1) 変形すると $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot x\log x$

例題[6]の結果から、 $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$　また　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$　であるから

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot x\log x=1\cdot0=0$

以上から　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x\log x=0$

(2) 指数の性質から　$x^{\sin x}=e^{\sin x\log x}$　であるから

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\log x}=e^0=1$