9 講　不定積分と定積分

練習問題

［1］（1） $\displaystyle\int xdx=\int x^1dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}=\frac{1}{2}x^2$

（2） $\displaystyle\int 3^xdx=\frac{1}{\log 3}3^x$

［2］（1） $\displaystyle\int x^4dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}=\frac{1}{5}x^5$

（2） $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}=-\frac{1}{2}x^{-2}=-\frac{1}{2x^2}$

［3］（1） $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+\cos x\right)dx=\int\frac{dx}{x}+\int\cos xdx=\log|x|+\sin x$

（2） $\displaystyle\int 3\sin xdx=3\int\sin xdx=-3\cos x$

［4］（1） $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{1}{x^4}\right)dx=2\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int x^{-4}dx=2\tan x$

$\displaystyle-\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}=2\tan x+\frac{1}{3x^3}$

（2） $\displaystyle\int\left(2^x+3x^4\right)dx=\int 2^x+3\int x^4dx=\frac{1}{\log 2}2^x+3\cdot\frac{1}{4+1}x^{4+1}$

$\displaystyle=\frac{1}{\log 2}2^x+\frac{3}{5}x^5$

［5］（1） $\displaystyle\int_{-1}^{2}dx=\int_{-1}^{2}1dx=[x]_{-1}^{2}=2-(-1)=3$

（2） $\displaystyle\int_0^1 2^xdx=\left[\frac{1}{\log 2}2^x\right]_0^1=\frac{1}{\log 2}\cdot 2^1-\frac{1}{\log 2}\cdot 2^0=\frac{1}{\log 2}$

［6］（1） $\displaystyle\int_1^0 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^0=\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{1}{4}\cdot 1^4=-\frac{1}{4}$

（2） $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x^3}=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2=-\frac{1}{2\cdot 2^2}-\left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)=\frac{3}{8}$

［7］（1） $\displaystyle\int_1^2\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx=[e^x]_1^2-[\log x]_1^2=(e^2-e^1)-(\log 2-\log 1)$

$=e^2-e-\log 2$

（2） $\displaystyle\int_0^1(\log 2)2^xdx=\left[\log 2\cdot\frac{1}{\log 2}2^x\right]_0^1=2^1-2^0=1$

［8］（1） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+3\sin x\right)dx=[2\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-3\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle=\left(2\tan\frac{\pi}{4}-2\tan 0\right)+\left(-3\cos\frac{\pi}{4}+3\cos 0\right)=2-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+3$

$$= 5 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

（2） $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx = [2\log x]_1^2 + \left[3 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^2$

$$= (2\log 2 - 2\log 1) + \left(-\frac{3}{2} + 3\right) = 2\log 2 + \frac{3}{2}$$

［9］（1） $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1}$

$$+ \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$$

よって、$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 + \left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot 1\sqrt{1}\right)$

$$+ \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}\right) = \frac{10\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3}$$

（2） $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1}$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + \frac{3}{5} x\sqrt[3]{x^2}$$

よって、 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_1^2 + \left[\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}\right]_1^2$

$$= \left(\frac{3}{4} \cdot 2\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4} \cdot 1\sqrt[3]{1}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot 2\sqrt[3]{2^2} - \frac{3}{5} \cdot 1\sqrt[3]{1^2}\right) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$+ \frac{6\sqrt[3]{4}}{5} - \frac{27}{20}$$

［１０］（１） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = [-\cos x + \sin x + \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) - (-\cos 0 + \sin 0 + \tan 0) = 2$$

（2） $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^2 dx = \int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^1$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0^2 + 0\right) = \frac{7}{3}$$

10 講　積分の性質

練習問題

［1］（1） $t = 3x - 1$ とおくと、$dt = 3dx$ だから、$dx = \dfrac{1}{3}dt$

よって、$\displaystyle\int (3x-1)^5 dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{18} t^6 = \frac{1}{18}(3x-1)^6$

（2） $t = ax$ とおくと、$dt = adx$ だから、$dx = \dfrac{1}{a}dt$

よって、$\int \sin ax dx = \int (\sin t)\frac{1}{a}dt = -\frac{1}{a}\cos t = -\frac{1}{2}\cos ax$

（3）$\int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int x' \sin x dx = x\sin x$

$- \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$

（4）$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int x' e^x dx = xe^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x$

［2］（1）$t = 2x-3$ とおくと、$dt = 2dx$ だから、$dx = \frac{1}{2}dt$

よって、$\int \sqrt[3]{2x-3}dx = \int t^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}+1}t^{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{8}t^{\frac{4}{3}}$

$= \frac{3}{8}(2x-3)^{\frac{4}{3}}$

（2）$\int \log x dx = \int x' \log x dx = x\log x - \int x(\log x)' dx = x\log x$

$- \int x(\log x)' dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\log x - \int dx = x\log x - x$

［3］（1）$t = 2x+1$ とおくと、$dt = 2dx$ だから、$dx = \frac{1}{2}dt$

また、$x = 0$ のとき $t = 1$ で、$x = 1$ のとき $t = 3$

よって、$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} = \int_1^3 \frac{dt}{2t} = \left[\frac{1}{2}\log t\right]_1^3 = \frac{1}{2}\log 3$

（2）$t = ax$ とおくと、$dt = adx$ だから、$dx = \frac{1}{a}dt$

また、$x = 0$ のとき $t = 0$ で、$x = \pi$ のとき $t = a\pi$

よって、$\int_0^{\pi} \cos ax dx = \int_0^{a\pi} (\cos t)\frac{1}{a}dt = \left[\frac{1}{a}\sin t\right]_0^{a\pi} = \frac{1}{a}\sin a\pi$

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)(-\cos x)' dx = [-(x+1)\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)'(-\cos x)dx = 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1+1$

$= 2$

（4）$\int_0^1 x2^x dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{\log 2}2^x\right)' dx = \left[\frac{x}{\log 2}2^x\right]_0^1 - \int_0^1 x'\cdot\frac{1}{\log 2}2^x dx$

$= \frac{2}{\log 2} - \int_0^1 \frac{1}{\log 2}2^x dx = \frac{2}{\log 2} - \left[\frac{1}{(\log 2)^2}2^x\right]_0^1 = \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{(\log 2)^2}$

［4］（1）$t = 2-x$ とおくと、$dt = -dx$ だから、$dx = -dt$

また、$x = 0$ のとき $t = 2$ で、$x = 1$ のとき $t = 1$

よって、$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x}dx = \int_2^1 \sqrt{t}(-dt) = \left[-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_2^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

（2）$\displaystyle\int_1^2 x^2\log x dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x dx = \left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_1^2$

$\displaystyle -\int_1^2 \frac{1}{3}x^3(\log x)'dx = \frac{8}{3}\log 2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{8}{3}\log 2$

$\displaystyle -\int_1^2 \frac{1}{3}x^2dx = \frac{8}{3}\log 2 - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{7}{9}$

［5］$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

［6］$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1}}{n\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{3}}{n\sqrt{n}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

$\displaystyle = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

11 講　積分法の応用（1）

練習問題

［1］（1）求める面積は $\displaystyle\int_0^1(x^2+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3+1 = \frac{4}{3}$

（2）求める面積は $\displaystyle\int_{-1}^2(-x^2+5)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2 + [5x]_{-1}^2$

$\displaystyle = -\frac{1}{3}\cdot\{2^3-(-1)^3\}+5\cdot\{2-(-1)\} = 12$

［2］（1）求める面積は $\displaystyle\int_{-1}^2\{x-(x^2-6)\}dx = \int_{-1}^2(-x^2+x+6)dx$

$\displaystyle = \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2 + [6x]_{-1}^2 = -\frac{1}{3}\cdot\{2^3-(-1)^3\}$

$\displaystyle +\frac{1}{2}\cdot\{2^2-(-1)^2\}+6\cdot\{2-(-1)\} = \frac{33}{2}$

（2）求める面積は $\displaystyle\int_0^1(e^x-x)dx = \left[e^x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = e-\frac{1}{2}-1$

$\displaystyle = e-\frac{3}{2}$

［3］（1）求める体積は $\displaystyle\int_1^2\pi(2x)^2dx = 4\pi\int_1^2 x^2dx = 4\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$

$= 4\pi\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) = \frac{28}{3}\pi$

（2）求める体積は $\int_0^1 \pi(x+1)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^2+2x+1)dx$

$= \pi\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1^2 + 1\right) = \frac{7}{3}\pi$

［4］（1）求める体積は $\int_0^1 \pi\left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 e^{-2x}dx = \pi\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$

$= \frac{-e^{-2}+1}{2}\pi = \frac{e^2-1}{2e^2}\pi$

（2）求める体積は $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos^2 x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$= \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$

［5］$x' = e^t(\cos t - \sin t),\ y' = e^t(\sin t + \cos t)$ だから、求める長さは

$\int_0^1 \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2}dt = \int_0^1 \sqrt{2}e^t dt$

$= \sqrt{2}[e^t]_0^1 = \sqrt{2}(e-1)$

［6］$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ だから、求める長さは $\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}dx$

$= \int_0^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1$

$= \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{e^2-1}{2e}$

［7］（1）あたえられた直線と曲線の交点の x 座標は $x = x^2 - 2$ を解いて、

$x = -1, 2$

よって、求める面積は $\int_{-1}^2 \{x - (x^2-2)\}dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2 + [2x]_{-1}^2 = -\frac{1}{3}\cdot\{2^3 - (-1)^3\}$

$+\frac{1}{2}\cdot\{2^2 - (-1)^2\} + 2\cdot\{2 - (-1)\} = \frac{9}{2}$

（2）あたえられた二つの曲線の交点の x 座標は $x^2 + x = 2x^2$ を解いて、$x = 0, 1$

よって、求める面積は $\int_0^1 (x^2 + x - 2x^2)dx = \int_0^1 (-x^2 + x)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

12 講　積分法の応用（2）
練習問題

［1］（1）まず、定数関数 $y=0$ は解 (←本ではこれが抜けています)

$y \neq 0$ とすると、$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$

C を定数とすると、$\displaystyle -\frac{1}{y} = x + C$

よって、$\displaystyle y = -\frac{1}{x+C}$

（2）まず、$\displaystyle\int e^{-y}dy = \int dx$

C を定数とすると、$-e^{-y} = x + C$

$y(0) = 0$ だから、$C = -1$

よって、$y = -\log(-x+1)$

［2］（1）まず、定数関数 $y=0$ は解

$y \neq 0$ とすると、$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \sin x dx$

C を定数とすると、$\log|y| = -\cos x + C$

$\pm e^C$ を改めて C とおくと、$C \neq 0$ で $y = Ce^{-\cos x}$

これは $C=0$ のときも解

（2）まず、$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$

C を定数とすると、$\displaystyle -\frac{1}{y} = \tan x + C$

$y(0) = 1$ だから、$C = -1$

よって、$\displaystyle y = -\frac{1}{\tan x - 1}$

［3］まず、$y = y_0$ は解

$y \neq y_0$ とすると、$\displaystyle\int \frac{dy}{y - y_0} = \int (-k)dt$

C を定数とすると、$\log|y - y_0| = e^{-kt} + C$
$\pm e^C$ を改めて C とおくと、$C \neq 0$ で $y = y_0 + Ce^{-kt}$
これは $C=0$ のときも解

［4］まず、$\displaystyle\frac{dy}{dt} = C_1e^t + C_2e^t + C_2te^t = C_1e^t + C_2(t+1)e^t$ だから、

$$\frac{d^2y}{dt^2} = C_1e^t + C_2e^t + C_2(t+1)e^t = C_1e^t + C_2(t+2)e^t$$

よって、$\displaystyle\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = \left\{C_1e^t + C_2(t+2)e^t\right\} - 2\left\{C_1e^t + C_2(t+1)e^t\right\}$

$+\left\{C_1e^t+C_2te^t\right\}=0$

3 章まとめの問題

［1］（1） $t=x^2+1$ とおくと、$dt=2xdx$

よって、$\displaystyle\int x(x^2+1)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{8}t^4=\frac{1}{8}(x^2+1)^4$

（2） $t=\sin x$ とおくと、$dt=\cos xdx$

よって、$\displaystyle\int\sin^3 x\cos xdx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4=\frac{1}{4}\sin^4 x$

（3） $\displaystyle\int x^3\log xdx=\int\left(\frac{1}{4}x^4\right)'\log xdx=\frac{1}{4}x^4\log x-\int\frac{1}{4}x^4(\log x)'dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}x^4\log x-\int\frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}x^4\log x-\int\frac{1}{4}x^3dx=\frac{1}{4}x^4\log x$

$\displaystyle-\frac{1}{16}x^4$

（4） $\displaystyle\int(\log x)^2dx=\int x'(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int x\{(\log x)^2\}'dx$

$\displaystyle=x(\log x)^2-\int x\cdot\frac{2\log x}{x}dx=x(\log x)^2-2\int\log xdx=x(\log x)^2$

$-2(x\log x-x)=x(\log x)^2-2x\log x+2x$

（5） $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\log|\sin x|$

（6） $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x(\tan x)'dx=x\tan x-\int x'\tan xdx=x\tan x$

$\displaystyle-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=x\tan x+\log|\cos x|$

［2］ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\frac{3^3}{n^4}+\cdots+\frac{n^3}{n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3=\int_0^1 x^3dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$

［3］（1） まず、$\displaystyle\int e^ydy=\int xdx$

C を定数とすると、$\displaystyle e^y=\frac{1}{2}x^2+C$

よって、$\displaystyle y=\log\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)$

（2） $xy+2x+y+2=(x+1)(y+2)$ だから、これは変数分離形

まず、定数関数 $y=-2$ は解

$y\neq-2$ のとき、$\displaystyle\int\frac{dy}{y+2}=\int(x+1)dx$

C を定数とすると、$\log|y+2| = \dfrac{1}{2}x^2 + x + C$

$\pm e^C$ を改めて C とおくと、$C \neq 0$ で $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2+x} - 2$

これは $C = 0$ のときも解