１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５６７８９０１２３４５

練習問題

［１］（基本）　次の関数の導関数を求めなさい。

（1）　$y=(x^2+x+1)^3$

$y'=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$

（2）　$y=\sqrt{x^2+x+1}$

$y'=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

（3）　$y=\cos^3 x$

$y'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)$

$=-3\sin x\cos^2 x$

（4）　$y=e^{-x^2}$

$y'=e^{-x^2}\cdot(-2x)$

$=-2xe^{-x^2}.$

（5）　$y=\log x^2$

$y'=\dfrac{1}{x^2}\cdot 2x=\dfrac{2}{x}$

（6）　$y=\log(\tan x)$

$y'=\dfrac{1}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

［２］（標準）　次の関数の導関数を求めなさい。

（1）　$y=\sqrt{\cos 2x}$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2$

$=-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

（2）　$y=x\sin\dfrac{1}{x}$

$y'=\sin\dfrac{1}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$

（3）　$y=e^{-ax}\sin bx$　（a , b は定数）

$y'=-ae^{-ax}\sin bx+e^{-ax}\cdot b\cos bx=-ae^{-ax}\sin bx+be^{-ax}\cos bx$

$=e^{-ax}(-a\sin bx+b\cos bx)$

（4）　$y=\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$

$y'=\dfrac{\cos x(1+\cos x)^3-\sin x\cdot 3(1+\cos x)^2\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^6}$

$=\dfrac{\cos x(1+\cos x)+3\sin^2 x}{(1+\cos x)^4}=\dfrac{2\sin^2 x+\cos x+1}{(1+\cos x)^4}$

(5) $$y=\frac{\log x}{\log x+1}$$

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot(\log x+1)-\log x\cdot\frac{1}{x}}{(\log x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x(\log x+1)^2}$$

(6) $$y=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

$$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}$$

［３］（標準） 次の式で与えられる関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい。

（1） $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y=\dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$ （2） $xy+y^3=x^2$ （3） $x=\sin(x+y)$

解

（1） $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}}{\frac{4t}{(1-t^2)^2}}=\frac{1+t^2}{2t}$$

（2） 両辺を x で微分して $$y+x\cdot\frac{dy}{dx}+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=2x$$

よって $$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+3y^2}$$

（3） 両辺を x で微分して $$1=\cos(x+y)\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

よって $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos(x+y)}-1$$

［４］（標準） 次の関数の第３次導関数を求めなさい。

（1） $y=e^{-x}$

$y'=-e^{-x}$ ， $y''=e^{-x}$ ， $y'''=-e^{-x}$

（2） $y=\tan x$

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}\ ,\quad y''=-\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$y'''=\frac{2\cos x\cdot\cos^3 x-2\sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^6 x}=\frac{2\cos^2 x+6\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{4\sin^2 x+2}{\cos^4 x}$$

(3)　$y=e^x\cos x$

$y'=e^x\cos x-e^x\sin x$ ，　$y''=e^x\cos x-2e^x\sin x-e^x\cos x=-2e^x\sin x$

$y'''=-2e^x\sin x-2e^x\cos x=-2e^x(\sin x+\cos x)$

発展問題

［５］　次の関数の導関数を求めなさい。

(1)　$y=\sqrt[3]{(x+2)(x^2+3)}$

両辺の絶対値の対数をとると

$$\log|y|=\frac{1}{3}\log|x+2|+\frac{1}{3}\log|x^2+3|$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2x}{3(x^2+3)}$$

よって　$y'=y\left\{\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2x}{3(x^2+3)}\right\}=\sqrt[3]{(x+2)(x^2+3)}\cdot\frac{3x^2+4x+3}{3(x+2)(x^2+3)}$

$$=\frac{3x^2+4x+3}{3\sqrt[3]{(x+2)^2(x^2+3)^2}}$$

(2)　$y=x^{\frac{1}{x}}$

（解１）　両辺の対数をとると　$\log y=\frac{1}{x}\cdot\log x$

両辺を x で微分して　$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\cdot\log x+\frac{1}{x^2}$

よって　$y'=y\cdot\frac{1-\log x}{x^2}=\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\log x)}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$

（解２）　指数の性質から　$x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\log x}$　なので　$y=e^{\frac{1}{x}\log x}$

合成関数の微分法より　$y'=e^{\frac{1}{x}\log x}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\log x+\frac{1}{x^2}\right)$

$$=\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\log x)}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$$

(3)　$y = x^{\log x}$

（解 1）　両辺の対数をとると　$\log y = (\log x)^2$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y} = 2\log x \cdot \dfrac{1}{x}$

よって　$y' = y \cdot \dfrac{2\log x}{x} = \dfrac{2x^{\log x} \cdot \log x}{x} = 2x^{\log x - 1}\log x$

（解２）　指数の性質から　$x^{\log x} = e^{(\log x)^2}$　なので　$y = e^{(\log x)^2}$

合成関数の微分法より　$y' = e^{(\log x)^2} \cdot 2\log x \cdot \dfrac{1}{x}$

$$= \frac{2x^{\log x} \cdot \log x}{x} = 2x^{\log x - 1}\log x$$

［６］　次の関数の第 n 次導関数を求めなさい。

(1)　$y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x$　,　$y'' = 2e^x + xe^x$　,　$y''' = 3e^x + xe^x$　,　$\cdots\cdots$　,　$y^{(n)} = ne^x + xe^x$

$$= e^x(x+n)$$

(2)　$y = \log x$

$y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$　,　$y'' = (-1)x^{-2}$　,　$y''' = (-1)(-2)x^{-3}$　,　$\cdots\cdots$

$$y^{(n)} = (-1)(-2)(-3)\cdots\cdots(-n+1)x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$$

(3)　$y = \cos x$

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \times 2\right)$$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$