第13講　数列

▷ 練習問題

1. (1)　与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，$a'_n = a_{n-5}$ とすると，数列 $\{a'_n\}$ は初項 a_6，公差 2 の等差数列になる．ここで　$a_6 = a_1 + (6-1)\cdot 2 = -1 + 5\cdot 2 = 9$　よって　$a'_1 = a_6 = 9$
$S = a_6 + \cdots + a_{20} = a'_1 + \cdots + a'_{15}$　となるので，等差数列 $\{a'_n\}$ の最初の 15 項の和を求めればよい．等差数列の和の式において，初項 9，公差 2，項数 15 とすると

$$S = 9\cdot 15 + \frac{15\cdot(15-1)\cdot 2}{2} = 345$$

(2)　$b_n = 2\cdot 3^n$ とおくと $\{b_n\}$ は初項 6，公比 3 の等比数列になり，この数列の第 6 項から第 20 項の和を求める問題となっている．結局これは，初項 $2\cdot 3^6$，公比 3 の等比数列の最初の 15 項の和の問題となるので，等比数列の和の式に代入すると

$$\sum_{k=6}^{20} 2\cdot 3^k = \frac{2\cdot 3^6(1-3^{15})}{1-3} = 3^6(3^{15}-1)$$

2. $$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20}(2k^2-k-1) = 2\sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 1$$

$$= 2\,\frac{20(20+1)(2\cdot 20+1)}{6} - \frac{20(20+1)}{2} - 20 = 5740 - 210 - 20 = 5510$$

3. (1)　$c_n = a_{n+1} - a_n = n^2(n+1)^2 - (n-1)^2n^2 = n^2\{(n+1)^2-(n-1)^2\} = 4n^3$

(2)　$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{1}{4}\,(a_{n+1}-a_1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4. (1)　$$c_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}$$

(2)　$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{-1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{-1}{2}\,(a_{n+1}-a_1) = \frac{-1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

5. (1)　$n=1$ のとき　　(左辺) $=\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \boxed{1}$　　　(右辺) $=\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1) = \boxed{1}$

よって (左辺)=(右辺)

(2)　$n=m$ のとき与式は成り立つと仮定する．　$n=m+1$ のとき

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 = \boxed{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}} + (m+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)\{m(2m+1)+6(m+1)\} = \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+7m+6)$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{6}\boxed{m+1}\{(\boxed{m+1})+1\}\{2(\boxed{m+1})+1\} = \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2+7m+6)$$

よって (左辺)=(右辺)

(1)，(2) よりすべての自然数 n に対して与式が成り立つ．

第 14 講　数列の極限

▷ **練習問題**

1. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)e^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)\lim_{n\to\infty}e^{-n}=1\cdot 0=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\cos\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=(-3)\cdot 1=-3$

2. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1,\quad\lim_{n\to\infty}(n+5)=+\infty$ であるので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}(n+5)=+\infty$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3\cdot 3^n}{3^n+2\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-3}{1+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-3\right\}}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1+2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}=\frac{-3}{1}=-3$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log(n+1)-\log n\}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\log\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log 1=0$$

3. (1) 初項 $2\left(\frac{1}{3}\right)^6$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である．

(2) $\displaystyle\sum_{k=6}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}}=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{3^5}$

4. (1) $\displaystyle f(x_k)\,\Delta x=x_k\,\Delta x=k\,(\Delta x)^2=\frac{4k}{n^2}$

(2) $x_0=0,\ x_n=2$ であるので

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\,\Delta x=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2$$

▷ 第 4 章　まとめの問題

1. (1)　$a_n = b_n + 1,\ a_{n+1} = b_{n+1} + 1$ をもとの漸化式に代入すると

$$b_{n+1} + 1 + 2(b_n + 1) - 3 = 0 \qquad \text{よって} \quad b_{n+1} + 2b_n = 0$$

(2)　(1) の漸化式より　$b_{n+1} = -2b_n$　すなわち b_n は公比 -2 の等比数列．初項は $b_1 = a_1 - 1 = -2 - 1 = -3$　であるので　$b_n = (-3)(-2)^{n-1}$　よって $a_n = b_n + 1 = 1 - 3(-2)^{n-1}$

2. $$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$$

$$= \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \qquad \text{よって}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

3. $$\frac{1}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} + \sqrt{k} \ > \ \sqrt{1} + \sqrt{1} \ > \ 2$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} \ > \ 2n$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$　であるので追い出しの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \infty$

4. (1)　$$2^n + 3^n = a\left(\frac{1}{3}\right)^n 6^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n 6^n = a\left(\frac{6}{3}\right)^n + b\left(\frac{6}{2}\right)^n = a\,2^n + b\,3^n$$

よって　$a = b = 1$

(2)　$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

5. $$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \frac{d}{dx} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{\{1 - (n+1)\,x^n\}(1 - x) + (x - x^{n+1})}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{1 - (n+1)\,x^n + n\,x^{n+1}}{(1 - x)^2} \qquad \text{よって} \quad \sum_{k=1}^{n} k\,x^k = \frac{x\{1 - (n+1)\,x^n + n\,x^{n+1}\}}{(1 - x)^2}$$

$x = \dfrac{1}{2}$ とおいて　$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= 2\left\{1 - \frac{n+1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}\right\}$$