第 1 講　初等関数とグラフ 1

▷ **練習問題**

1. (1)　$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$

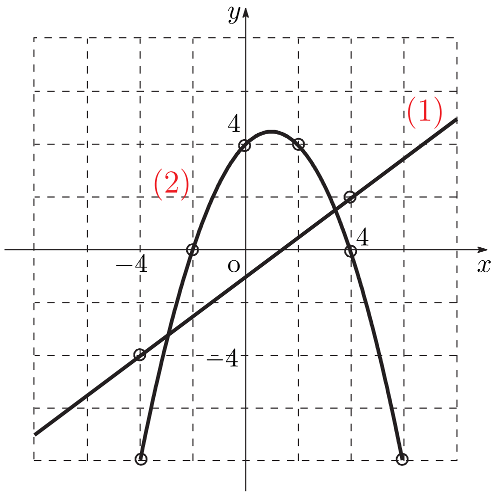
よって $(4-(-4))(y-(-4)) = (2-(-4))(x-(-4))$

よって $y = \dfrac{3}{4}x - 1$

(2)　$y = a\,(x - (-2))(x - 4)$

よって $y = a\,(x+2)(x-4)$

これが $(0,\,4)$ を通るので　$y = -\dfrac{1}{2}\,(x+2)(x-4)$



2. (1)　$y - b = -\dfrac{1}{x-a}$　　よって $y = \dfrac{bx - ab - 1}{x - a}$

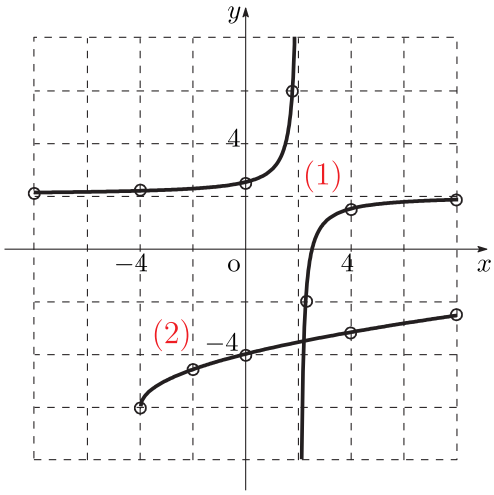
これと与式を比べて $a = b = 2$

x 軸方向に 2, y 軸方向に 2 平行移動したグラフ.

(2)　$y - b = \sqrt{x-a}$　　よって $y = \sqrt{x-a} + b$

これと与式を比べて $a = -4,\ b = -6$

x 軸方向に -4, y 軸方向に -6 平行移動したグラフ.



3. グラフ上の点 $(x,\,y)$ が点 $(1,\,2)$ に関して対称移動して点 $(x',\,y')$ に移ったとすると

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}\quad \text{よって}\quad \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$$

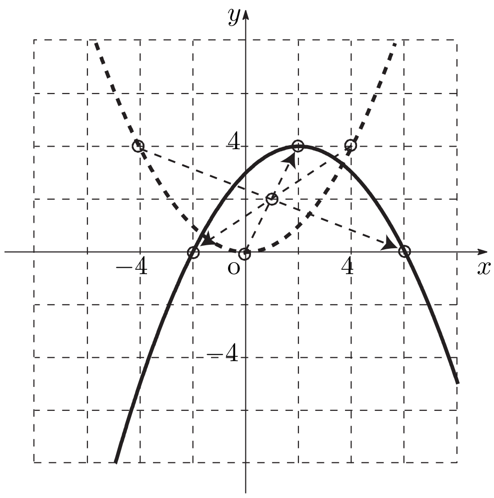
これらをもとの方程式に代入すると

$$4 - y' = \frac{1}{4}\,(2 - x')^2$$

よって $y' = \dfrac{1}{4}\,(2 + x')(6 - x')$

$x',\,y'$ を $x,\,y$ におきかえて，像は放物線

$$y = \frac{1}{4}\,(2 + x)(6 - x)$$



4.(1)　$-y' = \dfrac{1}{4}x'^{\,2}$ $(x' \geqq 0)$

x', y' を x, y におきかえて　$y = -\dfrac{1}{4}x^2$ $(x \geqq 0)$

(2)　$y' = \dfrac{1}{4}(-x')^2$ $(-x' \geqq 0)$

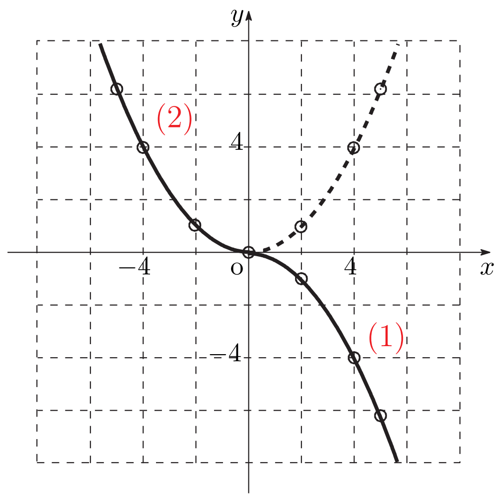
x', y' を x, y におきかえて　$y = \dfrac{1}{4}x^2$ $(x \leqq 0)$

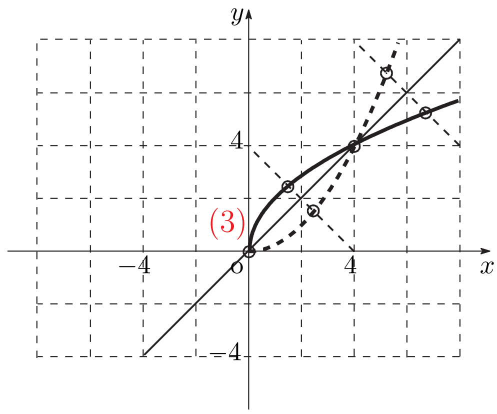
(3)　$x' = \dfrac{1}{4}y'^{\,2}$ $(y' \geqq 0)$

x', y' を x, y におきかえて　$x = \dfrac{1}{4}y^2$ $(y \geqq 0)$

ここで，　$y \geqq 0$,　$x \geqq 0$　であるので

$y = 2\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$





5.　関数の式で x と y をいれかえると　$x = \dfrac{1}{4}y^2$ $(y \geqq 0)$

ここで，　$y \geqq 0$,　$x \geqq 0$　であるので　$y = 2\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$

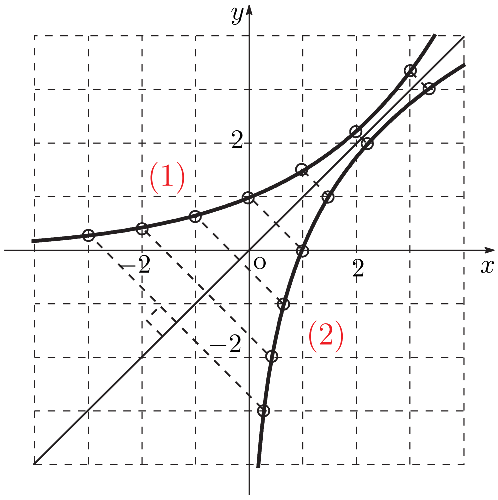
これはもちろん上の練習問題 4(3) の式と一致する．

第2講　初等関数とグラフ2

▷ **練習問題**

1. (1) $(-3,\ 0.29)$, $(-2,\ 0.44)$, $(-1,\ 0.66)$, $(0,\ 1.00)$, $(1,\ 1.50)$, $(2,\ 2.25)$, $(3,\ 3.37)$

(2) 右図の通り．



2. (1) $(3^x)^2-5\cdot 3^x-36=0$ 　 $t=3^x$ とおくと 　 $t^2-5t-36=0$ 　 よって 　 $(t-9)(t+4)=0$

よって 　 $t=9,\ -4$ 　 $t>0$ であるので 　 $t=9$ 　 よって 　 $3^x=9$ 　 よって 　 $x=\log_3 9=2$

(2) $2^x+\dfrac{1}{2^x}=2$ 　 $t=2^x$ とおくと 　 $t+\dfrac{1}{t}=2$ 　 よって 　 $t^2-2t+1=0$

よって 　 $(t-1)^2=0$ 　 よって 　 $t=1$ 　 よって 　 $2^x=1$ 　 よって 　 $x=\log_2 1=0$

(3) $2^x+\dfrac{4}{2^x}=5$ 　 $t=2^x$ とおくと 　 $t+\dfrac{4}{t}=5$ 　 よって 　 $t^2-5t+4=0$

よって 　 $(t-1)(t-4)=0$ 　 よって 　 $t=1,\ 4$ 　 よって 　 $2^x=1,\ 4$

よって 　 $x=\log_2 1,\ \log_2 4=0,\ 2$

3. (1) $\log_9 27=\dfrac{\log_3 27}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2}=\dfrac{3\log_3 3}{2\log_3 3}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\log_2 3\times\log_3 8=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}=\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$

4. $2\log 3=\log 3^2=\log 9$ 　 よって 　 $\log 3<\log 8<2\log 3(=\log 9)$

5. $$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$

よって 　 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ 　 よって 　 $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

よって 　 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ 　 よって 　 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

6. $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\sqrt{3} - 1)$$

$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\sqrt{3} + 1)$$

7. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = a\ \sin(x + b) = a\,(\sin x \cos b + \cos x \sin b) = a\ \sin x \cos b + a\ \cos x \sin b$

よって $\begin{cases} a\ \cos b = \sqrt{3} \\ a\ \sin b = 1 \end{cases}$ よって $a^2(\cos^2 b + \sin^2 b) = 3 + 1$ よって $a^2 = 4$

$a > 0$ であるので $a = 2$

よって $\begin{cases} \cos b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $0 \leqq b < 2\pi$ であるので $b = \dfrac{\pi}{6}$

第3講　関数の極限

▷ 練習問題

1. (1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0}$　　$\displaystyle\lim_{x\to\boxed{1-0}} f(x) = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x) = \boxed{+\infty}$　　$\displaystyle\lim_{x\to\boxed{+\infty}} f(x) = 0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$　　$\displaystyle\lim_{x\to\boxed{-0}} g(x) = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x) = \boxed{0}$　　$\displaystyle\lim_{x\to\boxed{+\infty}} g(x) = +\infty$

2. (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{x}} = \frac{1}{3},\ \lim_{x\to\infty}\left(2x-\frac{5}{x}\right) = \infty$　であるので

$$与式 = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-\frac{5}{x}}{3+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{x}}\cdot\left(2x-\frac{5}{x}\right) = \infty$$

(2) $$与式 = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{2}$$

(3) $$与式 = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{0}{2} = 0$$

3. (1) $y=-2x$ とおくと $x\to0$ のとき $y\to0$ であるので,

$$与式 = \lim_{x\to0}(-2)\cdot\frac{\log(1-2x)}{-2x} = (-2)\cdot\lim_{y\to0}\frac{\log(1+y)}{y} = (-2)\cdot1 = -2$$

(2) $$与式 = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\log(1+x)} = 1\cdot1 = 1$$

(3) $$与式 = \lim_{x\to0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\log(1+2x)} = \frac{3}{2}\cdot\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to0}\frac{y}{\log(1+y)} = \frac{3}{2}\cdot1\cdot1 = \frac{3}{2}$$

4. (1) 与式 $= \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x} = 2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$

(2) 与式 $= \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\log(1+3x)}{3x}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1} = \frac{3}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{2}$

(3) 与式 $= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$

5. (1) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\boxed{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to\boxed{0}}\frac{\sin y}{y} = \boxed{1}$

(2) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ をはさみうちの原理で求める．$|\sin\frac{1}{x}| \leqq \boxed{1}$ を用いると

$0 \leqq |x\sin\frac{1}{x}| \leqq |x|\,|\sin\frac{1}{x}| \leqq |x|$

$\lim_{x\to 0}|x| = \boxed{0}$ であるので $\lim_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}| = \boxed{0}$ よって $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \boxed{0}$

▷ **第 1 章　まとめの問題**

1. (1) 与式 $= \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

(2) 与式 $= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$

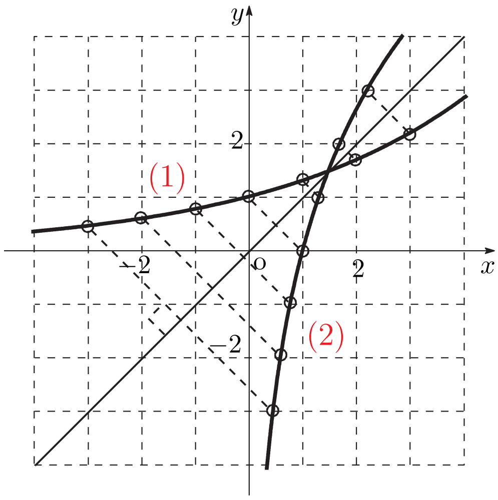
(3) 与式 $= \displaystyle\lim_{y\to 0}\tan y = \tan 0 = 0$

(4) 与式 $= \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\sin^2 x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2} = (-2)\cdot(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})^2 = (-2)\cdot 1^2 = -2$

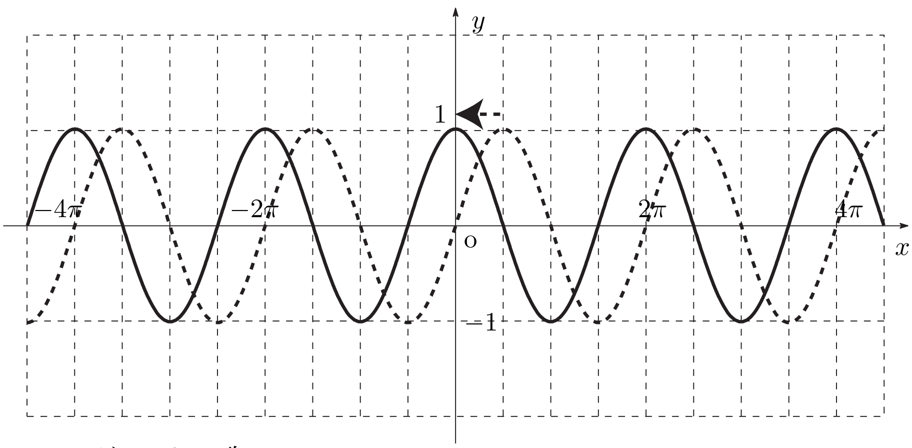
(5) 与式 $= \displaystyle\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 0\cdot 1 = 0$

2. (1) $(-3,\ 0.45)$, $(-2,\ 0.59)$, $(-1,\ 0.76)$
$(0,\ 1.00)$, $(1,\ 1.30)$, $(2,\ 1.69)$
$(3,\ 2.19)$

(2) 右図の通り.

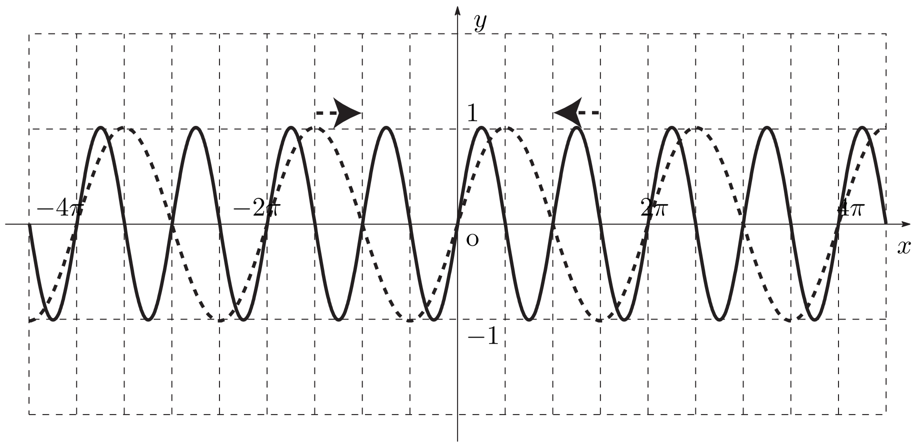


3.



$y = \cos x$ のグラフと一致している.

4.



5. (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \boxed{\frac{1}{x}} \log x = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x^{\frac{1}{x}} = \log \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \log \boxed{1}$　　よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \boxed{1}$

(2) $e^{\frac{\log x}{x}} = \left(e^{\boxed{\log x}}\right)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}} = e^{\boxed{0}} = \boxed{1}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \boxed{1}$