「電磁気学」第2章の問題解答

2-1 ドリル問題

1.

2.

式 2-2 を参照

$$F = +qE$$

$$= q_{1C} \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (答)$$

3.

(答) 原点と電荷を結ぶ直線上、外側向き

4.

原点と+Qの電荷を結ぶ直線上に静止する点があり、それは次の方程式の解になっている。

$$\frac{4Q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (1-x)^2}$$

$$4\left(1-x\right)^2=x^2$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$(3x-2)(x-2)=0$$

すなわち、原点から 2/3m と 5/3m の点だが、x が 1m よりも大きい所では力は外向きになるので、5/3m の点は静止点にならず、2/3m の所だけが静止点になる。(答)

5.

$$F = EQ = 10^{-3} \text{ C} \times 10^{3} \text{ N/C} = 1\text{ N}$$

(答) 電界の方向に 1N の力を受ける

6.

$$\frac{10}{1000} \text{kgf} = 9.8 \times 10^{-2} \,\text{N} = Q \times 10^{3} \,\text{N}$$

$$Q = 9.8 \times 10^{-5} \,\text{C} \quad (\text{\ref{eq:posterior}})$$

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1.602 \times 10^{-22}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 1.44 \times 10^{-12} \,\mathrm{N}$$

(答) $F=1.4\times10^{-12}$ N の力が内向きに働く

8.

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 9.00 \times 10^{-4} \,\mathrm{N}$$

(答) $F=9.0\times10^{-4}$ Nの力が外向きに働く

9.

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 2.25 \times 10^5 \,\mathrm{N}$$

(答) F=2.3×10⁵N の力がそれぞれ内向きに働く

10.

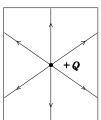
$$2 \times 10^4 = \frac{5 \times 10^{-3} \times Q}{4 \pi \varepsilon_0 \times 2^2} \times \frac{0.5}{2}$$
なので、 Q =7.12×10⁻³C (答)

2-2 ドリル問題

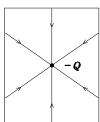
1.

(解答例) 電気力線は電界の方向と強さを定量的に表す曲線であり、電界と平行に描かれ、電界の方向に矢印を付す。電気力線の密度はある点の電界強度が n[N/C]ならば $1m^2$ あたり n 本になる。

2.



(答) 図 2.4 参照、水の湧き出すような形になるので、数学的には湧点になる。



(答) 図 2.4 参照、水が吸い込まれるような形になるので、数学的には収斂(れん)点になる。 4.

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.19 \times 10^5 \, \text{Å} \quad (\$)$$

5.

(答) 1.19×10³本

6.

(答) 1.19×10⁴本

7.

(答) 1.19×10⁴本

8.

(答) 式 2-7 ないし式 2-7

9.

(答) 式 2-9

10.

(答) p.44 の側注 4 を参照

2-3 ドリル問題

1.

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{2}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} = 1.798 \times 10^{10} [\text{N/C}]$$

(答) 1.8×10¹⁰N/C

2.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2^2} = 4.50 \times 10^9 \text{ N/C}$$

(答) 4.5×10⁹ N/C

3.

点 A、B ともに
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2}) = 9.99 \times 10^9 [\text{N/C}]$$

(答) 1.0×10¹⁰ N/C

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} \right) = 2.70 \times 10^{10} [\text{N/C}]$$

(答) 2.7×10¹⁰ N/C

5.

電界は+1Cの電荷のある方向から重心の方向に働くが、電界強度は次の式で計算できる。

重心と頂点の距離は $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \times 2\cos 60^\circ \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{9}{3} + \frac{9}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \right)$$
$$= \frac{6}{4\pi\varepsilon_0} = 5.39 \times 10^{10} [\text{N/C}]$$

(答) 5.4×10¹⁰ N/C

6.

(答) おもりは重力によって下向きの力 9.8N を与えるが、これが電界強度につりあっているから、電界の方向は下から上向きであり、強度は 9.8N/C である。

7.

$$F = m\alpha$$
 $1 = 10^{-3} \times \alpha$ $\alpha = 10^{3} \text{ m/s}^{2}$
 $v = dt \downarrow 0$, $10^{6} = 10^{3} t$ $t = 10^{3} \text{ s}$

(答) 1000秒後

8.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3+5}{0.5^2} \times 10^{-8} \right) = \frac{1}{4\times\pi\times8.85\times10^{-4}} \times \frac{8}{0.25} = 2.88\times10^3 \, [\text{N/C}] \text{ for } \text{U/m}$$

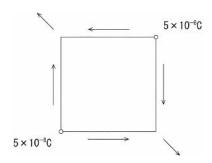
(答) 2.9×10³ N/C ないし V/m の電界が正電荷から負電荷の方向に働く

9.

$$5 \times 10^{-8}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{5+3}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \times 10^{-8} \right) = 2.16 \times 10^3 \, [\text{N/C}] \, \text{feV} \, \text{U[V/m]}$$

(答) 2.2×10³ N/C ないし V/m の電界が負電荷の方向に働く



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{5}{1^2} \times 10^{-8}\right) \times \sqrt{2} = 635.5 \,[\text{N/C}] \text{ for } \text{U/m}$$

(答) 6.4×10^2 N/C ないし V/m の電界が正方形の中心から頂点を通る方向外向きに働く

2-4 ドリル問題

1.

(解答例) 電界の中を与えられた地点に無限遠から+1 C の電荷を運んでくる時に要する仕事。 2.

(解答例) 電界の単位は[N/C]あるいは[V/m] であり、電位の単位は[J/C]ないし[V]である。 3.

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{10^{-5}}{4\times 3.14\times 8.85\times 10^{-12}\times 2^2} = 2.24\times 10^4 \text{ V/m}$$

電位の計算は式 2-16 を使って

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{10^{-5}}{4\times 3.14\times 8.85\times 10^{-12}\times 2} = 4.49\times 10^4 \text{ V} = 45\text{kV}$$

(答) 電界は 2.2×10⁴ V/m 原点から外向きに働き、電位は 4.5×10⁴ V

4.

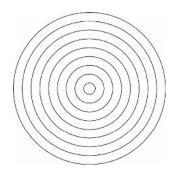
(答) 電界は左右二つの電荷によって相殺されるので、0 になる。一方電位は足し合わせになって、 $V=1.8\times10^5\,\mathrm{V}$

5.

(答) 電界は左右二つの電荷のために 2 倍になるので、 $E=1.8\times10^5$ V/m であり、方向は正電荷から負電荷の方向である。一方電位は二つの電荷で相殺されて 0 である。

6.

$$V(r)=rac{10^{-5}}{4\piarepsilon_0 r}=rac{8.99 imes10^4}{r}\,[ext{V}]$$
になるので、この式にしたがって、同心円を描く。



平行平板電極の間では電界強度が定数 $\emph{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ になるので、 $\emph{E}=1.13 \times 10^6 \, \mathrm{V/m}$

(答) 1.1×10⁶ V/m

8.

式 2-12 を参照。平行平板電極間の電界強度がわかっているので、dを電極間距離とすると、V=Edなので、 $V=1.13\times10^5$ V

(答) 1.1×10⁵ V

9.

式 2-11 を積分することになるが、その答えは式 2-15 と同じになるので、式 2-15 を用い、 r_A =0.2, r_B =0.1 として計算すると、

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{\rm B}} - \frac{1}{r_{\rm A}} \right) = \frac{10^{-5}}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}} \times \left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.2} \right) = 4.49\times10^5 \,\text{V}$$

(答) 4.5×10⁵ V

10.

前問と同じ式を用いる。この場合、上空を原点にしているので r_A =3000, r_B =1000 となり、

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{\rm B}} - \frac{1}{r_{\rm A}} \right) = \frac{0.5}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}} \times \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{3000} \right) = 2.99\times10^6 \,\text{V}$$

(答) $V=3.0\times10^6$ V これが、雷になって落ちてくる。

11.

式 2-19 と式 2-20 を参照。

$$E_{\scriptscriptstyle x} = -\frac{\partial\,V}{\partial x}\,,\quad E_{\scriptscriptstyle y} = -\frac{\partial\,V}{\partial y}\,,\quad E_{\scriptscriptstyle z} = -\frac{\partial\,V}{\partial z}$$

ガウスの法則の微分形

$$E = E_x e_x + E_y e_y + E_z e_z$$

$$E = -gradV$$

ポアッソンの方程式

$$\begin{aligned} div\left(gradV\right) &= -divE = div\left(\frac{\partial V}{\partial x}e_x + \frac{\partial V}{\partial y}e_y + \frac{\partial V}{\partial z}e_z\right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

第2章 演習問題

1.

(答)
$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(a-x)^2}\right)$$
 の力が右から働く

2.

小球の間には 500g のおもりがつけられた場合と同じ力が働くので、次式になる。

$$0.5 \times 9.8 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{0.12^2}$$

したがって、 $Q=2.801\times10^{-6}$ C (答) 2.8×10^{-6} C 3.

100g のおもりには重力により 0.98N の力が下向きに働く。静電力により左右に 0.098N ずつ反発力が働くので 20cm 離れることがわかる。したがって、下式が与えられる。

$$F = 2 \times 0.098 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{0.2^2}$$

したがって、 $Q=0.933\times10^{-6}$ C (答) 0.93×10^{-6} C

4.

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (1 + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (1 + \frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (1 + \sqrt{2})$$

5.

電界のX成分とY成分を分けて考えると次のようになる。

電荷 a からと x 点の距離、電荷 b と x 点の距離、電荷 c と x 点の距離はそれぞれ、

$$l_1 = \sqrt{1^2 + x^2}$$
, $l_2 = \sqrt{1^2 + (1 - x)^2}$, $l_3 = \sqrt{1^2 + (2 - x)^2}$ と書ける。

したがって、それぞれの電荷から受ける電界のx成分は、

$$E_{ax} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{l_1^2 \cdot l_1}$$

$$E_{bx} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x-1}{l_2^2 \cdot l_2}$$

$$E_{cx} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x-2}{l_3^2 \cdot l_3}$$

$$E_x = E_{ax} + E_{bx} + E_{cx}$$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{x}{l_1^3} + \frac{x-1}{l_2^3} + \frac{x-2}{l_3^3}\right) \quad (\stackrel{\triangle}{\Rightarrow})$$

y成分は、

$$E_{y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_{0}} \left(\frac{1}{l_{1}^{3}} + \frac{1}{l_{2}^{3}} + \frac{1}{l_{3}^{3}} \right) \quad (\stackrel{\text{(8)}}{>})$$

6.

(答)
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}} \right)$$

7.

$$E = 2\int_0^a \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{r^2 + x^2})^3} dx$$

$$(x = r \tan \theta, a = \tan \theta_0 \ge \overline{\Xi} \le \ge dx = r \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$
従って、
$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_0^{g_0} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \sin \theta \Big|_0^{g_0} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \sin \theta_0$$

8.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left\{ (x-a)^2 + y^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ (x+a)^2 + y^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\left\{ x^2 + y^2 - 2ax + a^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ x^2 + y^2 + 2ax + a^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[r^{-1} \left\{ 1 - \frac{2ax}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} - r^{-1} \left\{ 1 + \frac{2ax}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \right]$$

aはrに比べて十分に小さいので、 $\frac{a^2}{r^2}$ 項は無視できる。また、xもrより小さいとして、指数部分の近似式をつかうと、

$$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[r^{-1} \left(1 + \frac{ax}{r^2} \right) - r^{-1} \left(1 - \frac{ax}{r^2} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2ax}{r^3}$$

$$\begin{split} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \not \supset \mathcal{O} , \\ E_x &= \frac{2aQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2x^2 - y^2}{r^5} \quad , \quad E_y = \frac{2aQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3xy}{r^5} \end{split}$$

10.

電荷には $F = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times 10^4 \text{N}$ の力が働くので、電子の加速度は、

$$\dot{v} = \frac{F}{m} = 1.76 \times 10^{15} \, \text{m/sec.}^2$$
 従って $t = (3 \times 10^7) \div (1.76 \times 10^{15}) \approx 1.7 \times 10^{-8} \, \text{sec.}$ 秒後

第2章 ワークシート

1.

(1) (答) 電荷
$$q$$
を持った二つの荷電粒の間には $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o r^2}$ の力が働く。

(2) (答) 電荷との距離を
$$r$$
とすると, $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$

(3) (答)
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{l}$$

(4) (本文を参照)

2

加速度 a は運動の法則と式 2-1 より

$$a = \frac{F}{m} = \frac{EQ}{m} = \frac{10^{-6} \times 10^{4}}{1} = 10^{-2} \text{ m/s}^{2}$$

したがって、10 秒後の速度 vは

$$v = 10^{-2} \times 10 = 10^{-1} \,\text{m/s}$$
 (答)

3.

- (1) $8.85 \times 10^{-8} \div \epsilon_0 = 10^4$ 本 (答)
- (2) 球面の面積は $4\pi r^2 m^2$ なので、

$$S = \frac{4\pi r^2}{10^4} = 1.26 \times 10^{-3} \,\mathrm{m}^2 \quad (5)$$

4.

(1)
$$E = \frac{V}{d} = 10^3 \text{ V/m}$$
 (答)

(2) 電極と垂直方向の速度を v_z とする。電荷を得た時点から 10 秒の間に小球には負電極に向かって $a=\frac{EQ}{m}=\frac{10^4\times 10^{-10}}{10^{-3}}=10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$ の加速度が働くので、10 秒後には $v_z=10^{-2}\mathrm{m/s}$.の速度になる。したがって、電荷を受けてから電荷を失うまで、z 方向の移動距離が無視できるとす

れば、 $0.5\div0.01=50$ 秒後に負電極板に衝突する。実際には 10 秒間に移動する距離は t=10 であり、 $\frac{1}{2}\times at^2=0.05$ m なので、 $0.45\div0.01=45$ 秒後に負極に衝突する。50 秒と答えても \bigcirc とする。 (答)

5.

(1) (答)
$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}$$

- (2) (答) 電界の「重ね合わせ原理」があるので、それぞれの点電荷のつくる電界を計算して足し合わせる。
- (3) (本文参照)

6.

- (1) (解答例) 空間における電界強度を図式的かつ定量的に示すために描かれる曲線群であり、 その線密度は x[V/m]の電界強度があった場合には $1m^2$ 毎に x 本ずつとなる。
- (2) (解答例)
 - ① 電気力線は正電荷から出て、負電荷に入る。その数は真空中では Q ϵ $_0$ である。
 - ② 電気力線は弾力のあるゴムひものように常に縮もうとする。
 - ③ 電気力線同士は反発する。
 - ④ 電気力線は途中で分岐したり交差したりしない。
 - ⑤ 電気力線の接線の方向がその点の電界の向きになる。
 - ⑥ 電気力線の密度がその点の電界強度になる。
 - (7) 電気力線は導体表面に垂直に出入りし、導体内部には存在しない。
- (3) (解答例) 真空中に+Qの点電荷があるとき、この電荷から出て行く電気力線の数は Q/ ϵ o である。-Qの点電荷があれば、同じ数の電気力線が吸い込まれる。
- (4) $Q/\epsilon_0 = 10^4$ なので、 $Q = 10^4 \times \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-8} \mathrm{C}$ (答)
- 7. (p.44 の側注 4 を参照)

8.

2-3-2 項に示したとおり、
$$E=rac{\sigma r}{2arepsilon_0} \left[rac{1}{r} - rac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}
ight]$$
なので、 r =2、 b =1 とおけばよい。

$$E = \frac{\sigma r}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{0.0527\sigma}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

9

(1) (答)
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- (2) (答) +1Cの電荷を電界の中を無限遠から無限にゆっくり運ぶのに要する仕事。
- (3) (答) 電位差は二つの地点の間の電位の差であり、電位は無限遠から+1C の電荷を無限にゆっくり運ぶのに要する仕事。
- (4) (答) *E*=1000÷ *d* [N/C, V/m]

(5) (答) *E*= σ / ε ₀[N/C,V/m]

10.

(1) ガウスの法則から

 10^{-8} ÷ (8.85×10^{-12}) = 1.13×10^{3} (答) 1.13×10^{3} 本

(2) 正負の電荷の総電荷は 9×10^{-8} C なので、ガウスの法則から

$$9 \times 10^{-8} \div (8.85 \times 10^{-12}) = 1.02 \times 10^{4}$$

(答) 1.02×10⁴ 本

11.

(1) ガウスの法則の微分形により、
$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$
, $E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$ なので、 $E_x=3kx^2$, $E_y=0$, $E_z=0$ (答)

(2) ガウスの法則の積分形、 $Q=arepsilon_0\oint_{\sigma} \vec{E}\cdot \vec{n}dS$ 、から計算する。 x=0 ないし a の表面では $E_x=$

 $3kx^2=0$ または $3ka^2$ であり、他の面では電界強度はゼロなので、積分の値は $3ka^2 \times a^2 = 3ka^4$ である。したがって、 $Q=3 \epsilon_0 ka^4$ (答)

- (1) (答) 前者は[N/C]ないし、[V/m]であり、後者は[J/C]ないしは[V]であり、それぞれ絶対値は 変わらない。
- (2) (答) 本文の式 2-8 ないしは式 2-9 と式 2-7 あるいは式 2-7

13.

広い平板の上では電界強度は定数 $\sigma/2$ ϵ 0になることを2-3-3項で示した。したがって、電位は 次の式で計算できる。

$$V = V_0 - \int_{-\infty}^{x} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = V_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x \quad (\stackrel{\triangle}{>})$$

ただし、無限のかなたでは電界強度が0としている。(答)

14.

立方体の各面の電界強度の面直成分を加えるので、

$$Q = \varepsilon_0 \oint_{\dot{\gamma}, f, f, k \neq \bar{m}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \varepsilon_0 (-a^4 - a^4) \quad (答)$$

15.

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(本文の式 2-20 の導出を参照)