『機械力学』問題解答

第1章　運動と力

ドリル問題 1-2（p. 21）

1．36［km/h］　83.3［m/s］　3．1.39［m/s］　4．4［m/s²］　5．128［m］
6．−2.08［m/s²］　7．56.5［km/h］　8．5.24［rad/s］　9．0.087［rad/s²］
10．764［rpm］

ドリル問題 1-3（p. 33）

1．600［N］　2．0.49［m/s²］　3．20［m/s²］　4．1.63［m/s²］　5．0.89
6．50［N］
7．跳ね返り係数 1 の場合　A の速度　−1［m/s］
　　B の速度　2［m/s］
　跳ね返り係数 0.5 の場合　A の速度　−0.5［m/s］
　　B の速度　1［m/s］
8．人が飛び出す速度の 3/10 の速度

演習問題 1（p. 34）

1．−4.63［m/s²］，3.6［s］　2．1.67［m/s²］，83.5［m］
3．105.8［km/n］，882［m］　4．$v=5$［m/s］　5．75［回転］
6．19.5［km/h］　7．21.6［m/s］　8．66.3［kN］
9．$v=\sqrt{\left(v_0+\dfrac{F_x}{m}t\right)^2+\left(\dfrac{F_y}{m}t\right)^2}$

$s=\sqrt{\left(v_0t+\dfrac{1}{2}\dfrac{F_x}{m}t^2\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{F_y}{m}t^2\right)^2}$

10．$\cos\theta=1-\left(\dfrac{m}{m+M}\right)^2$

第 2 章　剛体の運動

ドリル問題 2-1（p. 47）

1．3［kgm/s］　2．4.5［kgm²/s］　3．0.4［kgm²/s］　4．0.25［kgm²/s］
5．0.375［m］　6．0.09375［kgm²/s］　7．2.5［kgm²］　8．2.4［J］
9．(1)　0.16［kgm/s］　(2)　0.04［kgm²/s］

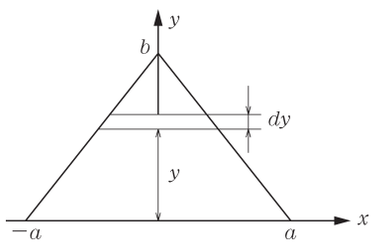
ドリル問題 2-2 (p. 55)

1. (1) $m\dfrac{dv}{dt}=f$ (2) $\dfrac{d(\sum m_i v_i)}{dt}=\sum f_i$ (3) $m_a\dfrac{dv_0}{dt}=F,\quad I\dfrac{d\omega}{dt}=M$

2. 8.33×10^{-4} [kgm^2] 3. 1.23×10^{-3} [kgm^2] 4. 1.7×10^{-5} [kgm^2]

5. 6.5×10^{-5} [kgm^2]

6. 0.00533 [kgm^2]



7. 1.96×10^{-9} [kgm^2] 8. 0.0225 [kgm^2] 9. 3.55×10^{-4} [J]

10. 0.0529 [J]

ドリル問題 2-3 (p. 63)

1. 2.551 [m]

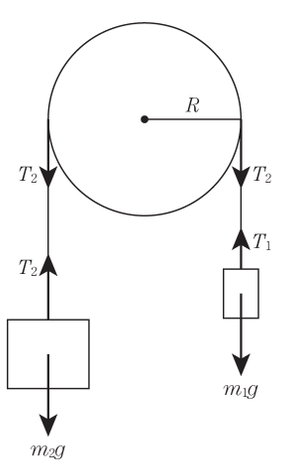
2. $\omega=\dfrac{2}{3}\dfrac{gt}{R}$ より $R_i=\dfrac{2}{3}\dfrac{gt}{\omega_i}$ を得る。ここで $i=1,\ 2$

   また，$I_i=\dfrac{mR_i^2}{2}$ なので $\dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{R_1^2}{R_1^2}$ を得る。

   上式に $\omega_1=10.0$ rad/s，$\omega_2=15.0$ rad/s を代入すると，$\dfrac{I_1}{I_2}=2.25$ を得る。

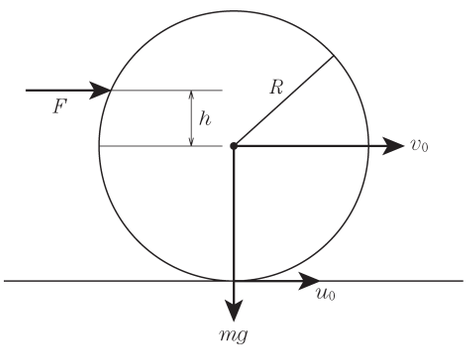
3. $\dfrac{1}{3}gt^2\sin\theta$ 4. $\dfrac{1}{2}$ 5. 1.147 [s]

6. $T_1=0.245$ [N]，$T_2=0.367$ [N]



7. 0.401 [m] 8. $2g$

9.　1.25［cm］



演習問題２（p. 64）

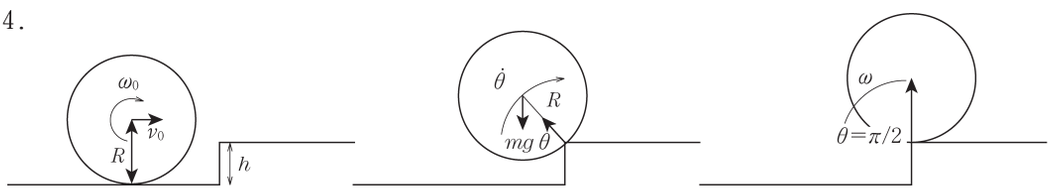
1.　(1)　0.233［m］　　(2)　2［m/s］

2.　前者は $I_F=\frac{1}{2}m_GR^2$，$K_F=\frac{1}{2}I_F\omega^2=0.0156\cdots J$ であり，

後者は $I_L=\frac{1}{12}m_GL^2+\frac{1}{4}m_GR^2$，$K_L=\frac{1}{2}I_L\omega^2=0.268\cdots J$ である。

3.　(1)　7.5×10^{-5}［kgm^2］　　(2)　0.972［s］

4.



段差のコーナーを角運動量を定義するための基準点とすると，この衝突前後の円筒の角運動量は

$mv_0(R-h)+I\omega_0=\bar{I}\omega$

の関係で表すことができる。ここで $\omega_0=\frac{v_0}{R}$ であり，$\bar{I}$ は衝突後に段差のコーナーまわりに回転する円筒の慣性モーメントを示しており平行軸の定理より $\bar{I}=I+mR^2$ である。また ω は，段差乗り上げ後の円筒の回転角速度を示す。これらの関係より

$(\bar{I}-mRh)\,v_0=\bar{I}R\omega$　　①

を得る。一方，衝突直後から乗り上げ終了後の運動エネルギーおよび位置エネルギーの関係を考えると

$\frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}^2+mgR\sin\theta=\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2+mg(R-h)$

の関係が成り立つ。この時も段差のコーナーを基準点としている。ここで $\dot{\theta}$ は，段差乗り越え途中の円筒の回転角速度（乗り上げ中に時間変化をしている）を示す。乗り上がるということは $\theta=\pi/2$ になるとのことなので，上式から

$\frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2-mgh>0$

の乗り上げるための条件 $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 > mgh$ さらには $\omega > \sqrt{\frac{2mgh}{\bar{I}}}$ を得る。この関係に①を代入すると

$v_0 > \frac{R\sqrt{2mgh\bar{I}}}{\bar{I} - mRh}$

であり，ここでは $\bar{I} = \frac{3}{2}mR^2$ なので

$v_0 > \frac{\sqrt{3gh}}{\left(\frac{3}{2} - \frac{h}{R}\right)}$ となり，この円筒がこの段差を乗り越えるための初速度は約 1.05 m/s 以上であることがわかる。

5. 5.84×10^6［J］

6. $\frac{F}{F_2} = \frac{\frac{2}{7}mg\sin\theta}{\mu mg\cos\theta} = \frac{2}{7\mu}\tan\theta < 1$　つまり　$\tan\theta < \frac{7}{2}\mu$ の条件が満たされれば，球はすべることなく斜面を転がり落ちることが予想できる。

7. (1) $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3kL^2\omega^2}{4m}$　　(2) $\omega = \frac{4m\omega_0}{4m + 3kL^2\omega_0 t}$　　8. $\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{m + \frac{I}{a^2}} = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2a^2}}$

第 3 章　動力学の基礎と機械要素

ドリル問題 3-1 (p. 75)

1. 0.5［J］　2. 0.2925［J］　3. 0.098［m］　4. 250［W］
5. 40800［kW］　6. 980［s］　7. 573［Nm］　8. 3.13［m/s］
9. 1.8［m］　10. 156250［J］

ドリル問題 3-2 (p. 86)

1. 103.8［N］　2. 0.163　3. 155［N］　4. 49.5［N］
5. 問題文「4*s* 後に停止した」を「10*s* 後に停止した」に訂正して下さい。　0.15
6. 210°　7. 0.176　8. 0.0010　9. 800［N］　10. 152［N］
11. 0.0667［Nm］

ドリル問題 3-3 (p. 97)

1. 125［N］　1000［Nm］　134［N］　1070［Nm］
2. 990［W］　3. 294［N］　490［W］
4. $\theta = 0°$ のとき，$F = 7.45$［N］
   $\theta = 10°$ のとき，$F = 7.18$［N］
   $\theta = 20°$ のとき，$F = 7.14$［N］

$\theta=30^\circ$ のとき，$F=7.33$［N］

5．584［N］

6．$\alpha \leqq \lambda$ となるようにする。$\tan\lambda=0.25$ より，$\lambda=14^\circ$。よって，頂面 $2\alpha \leqq 2\lambda=28^\circ$ となるようにする。

7．92.9［N］　8．9.42［mm］　9．14.2［%］　10．58.8［%］

演習問題 3（p. 98）

1．1960［J］　2．$a=\dfrac{2g(m_2-m_1\sin\alpha-\mu_k m_1\cos\alpha)}{m+2(m_1+m_2)}$

3．1583［N］　4．2.3［m/s］　5．左回りの方が 16［N］大きい

6．右回りの時の方が 1940［N］大きい　7．0.196［m］　8．1960［s］

9．0.36［J］　10．212［PS］

11．$\dfrac{1}{2}mv^2=\mu_k mgx+\dfrac{1}{2}kx^2$

よって，$x=\dfrac{-\mu_k mg+\sqrt{(\mu_k mg)^2+mkv^2}}{k}$

第 4 章　実際に使われる機械要素と機構

ドリル問題 4-2（p. 110）

1．36.6［rad/s］　2．0.136［N］　3．45°

4．$F_1=47140$［N］　$F_2=47140$［N］　5．160［mm］　15.70［mm］

6．140［mm］　7．2［mm］　8．60　9．132［rpm］　10．30［W］

ドリル問題 4-3（p. 116）

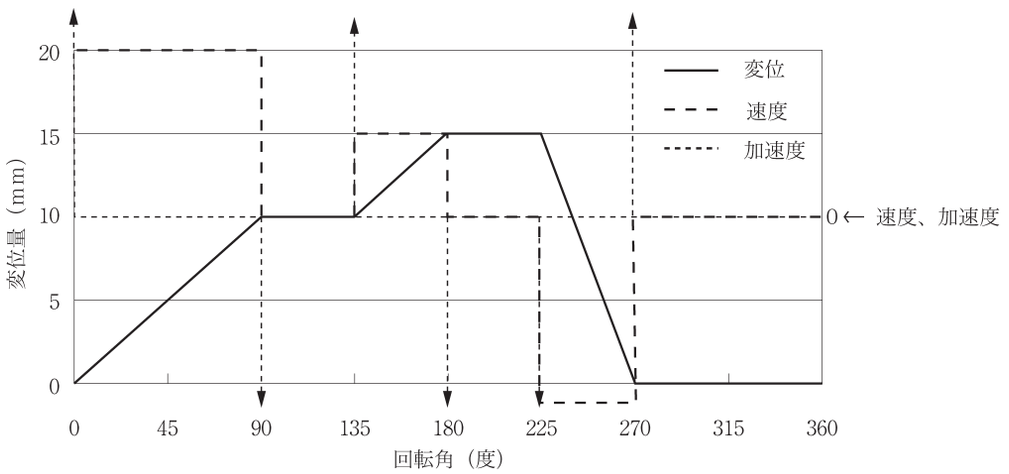
1．表 4.2 の中から「板カム」，「端面カム」，「溝カム」，「リブカム」，「直動カム」を挙げて，それぞれの特徴を記述すれば良い。

2．「振動コンベア」，「内燃機関のカムシャフト」，「間欠コンベア」，「自動工具交換装置」などへの応用がある

3．ハート形状

4．回転軸に円板を傾斜させて取付けたカム。
コストが安くて精度が出しやすく，調整や取替えが比較的簡単であるが，従動節が跳ね上がりやすいため，ばねで押さえつけることが必要であり，押し付け力の影響で原動節における円板と回転軸接合部の耐久性が低くなる。

5．下図のようなカム線図となる（速度と加速度については定性的な傾向のみ記載）



6．等速度運動するカムでは，カム回転角が 0°，180° の位置で加速度が急激に変化し，従動節と接点間に衝撃力が発生するが，等加速度運動するカムでは加速度の急激な変化が無いので衝撃力が殆ど発生しない。

7．カム線図が等加速度となるようなカムを設計すれば従動節に衝撃力は発生しない。

ドリル問題 4-4（p. 122）

1．57.3［Nm］

2．問題文に誤りがあります。（誤）「すべり軸継手の特徴について述べよ」→（正）「すべり軸受の特徴について述べよ」

【解答】 すべり軸受：部品点数は少なく安価だが，摩擦による発熱が高くなり過ぎないような軸受面積の確保と適切な潤滑が行える軸受と軸のはめあい設定などが重要になる。

3．問題文に誤りがあります。（誤）「ころがり軸継手の特徴について述べよ」→（正）「ころがり軸受の特徴について述べよ」

【解答】 ころがり軸受：軸と軸受間にいれる玉や円柱の精度良く作らねばならず，すべり軸受より高価であるが，摩擦が小さく，潤滑の必要がなく，保守・交換も容易である。

4．2 軸を一致させにくい場合や，回転によって生ずる振動・衝撃を緩和したい場合に用いる軸継手である。いずれもフランジ間にゴム，ばね，ブシュなどが挿入されており，回転中の軸の振れまわりや衝撃的に作用する曲げ，引張，圧縮力を緩和する。

5．キー，スプライン，ピン

6．$T(\mathrm{N}\cdot m)=0.1(m)\times10\times10^{3}(\mathrm{N})=1000(\mathrm{N}\cdot m)$

$W(\mathrm{J})=T\theta=1000\times4\pi=12566(\mathrm{J})$

ドリル問題 4-5 (p. 132)

1．0.5　　2．オープン掛けの場合　　10.05［m］　　クロス掛けの場合　　15.18［m］

3．285.5［N］

4．$T_e=(T_s-m^*v^2)(e^{\mu\theta}-1)=\dfrac{(T_t-m^*v^2)(e^{\mu\theta}-1)}{e^{\mu\theta}}$ において

$T_e=100$［N］，　$\mu=0.2$，　$\theta=132^\circ$ であるので

$T_s=100.4+m^*v^2$，　$T_t=200.4+m^*v^2$ となる。

5．問題文に誤りがあります。(誤)「小スプロケットとチェーンの平均速度…」→(正)「小スプロケットの歯数とチェーンの平均速度…」

【解答】　小スプロケットの歯数は，$\varepsilon=\dfrac{z_1}{z_2}$ より $z_2=20$ 枚

また，チェーンの平均速度は，$v_m=\dfrac{pz_1\omega_1}{2\pi}=\dfrac{pz_1N_1}{60}\approx1.9$［$m/s$］

6．チェーンのリンク数 L_p は

$L_p=\dfrac{2a}{p}+\dfrac{1}{2}(z_1+z_2)+\dfrac{p(z_2-z_1)^2}{4\pi^2a}=79.9\approx80$ 個

7．精度を要求しない，軸間距離が大きくとれる，振動や衝撃的な駆動負荷を吸収する，騒音が小さい，潤滑の必要がない。

ドリル問題 4-6 (p. 140)

1．300 mm＜a＜800 mm

2．$a+d>b+c$ となるので，最も短いリンクは回転できない

3．$\left.\begin{array}{l}a+b<c+d\\a+c<b+d\\a+d<b+c\end{array}\right\}$ の関係があるので最も短いリンクは回転可能である。

4．最も短いリンクを a としたとき a＋b＜c＋d，a＋c＜b＋d，a＋d＜b＋c の関係があるので，最も短いリンクは回転できる。

5．・てこクランク機構（回転揺動機構）：1つのリンクをクランクとして回転させると対面のリンクが揺動運動（てこ）するリンク機構

・両クランク機構（二重回転機構）：1つのリンクをクランクとして回転させると対面のリンクも回転するリンク機構

・両てこ機構（二重揺動機構）：1つのリンクをてことして揺動させると対面のリンクも揺動するリンク機構

6．ショベルカー，水平引込クレーン，クランクプレス，エンジン（内燃機関），空気圧縮機などを例に挙げ，機構と動きを説明すればよい

7．式（4-38）と（4-39）の関係から

$$\cos\alpha_1=\frac{c^2+d^2-(a+b)^2}{2cd}=0.5416,\qquad \alpha_1\approx 57.2^\circ$$

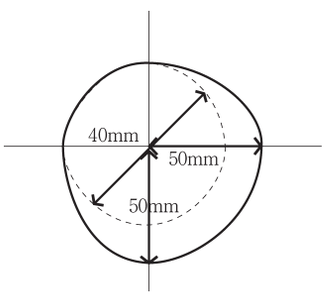
$$\cos\alpha_2=\frac{b^2+c^2-(a+d)^2}{2bc}=-0.3026,\qquad \alpha_2\approx 107.6^\circ$$

となるので，リンクのゆれ角度 δ は　$\delta=\alpha_1-\alpha_2\fallingdotseq -50.4^\circ$ となる。

演習問題 4（p. 141）

1．100［mm］，400［mm］　2．0.839　3．48，96

4．下図のようなカム断面図となる



5．7.89［m/s］　6．0.833［kW］

7．この問題は教科書だけでは解けません。

設計動力 P_d は式（4-31）より $P_d=m_1\cdot P=0.75\times 1.2=0.9$［kW］

また，ベルトの基準伝動容量 P_r は

$P_r=0.5236\times 10^{-7}\times D\times N\times$（ベルトの許容張力）

$=0.5236\times 10^{-7}\times 121.28\times 1500\times 9.6=0.091$

ベルト幅 b は，$b\geq P_d/P_r=0.9/0.091=9.89$［$mm$］したがって 10 mm 以上の幅が必要である。

8．問題文に誤りがあります。（誤）「軸間距離 a＝300 mm」→（正）「軸間距離 L＝300 mm」

【解答】 ベルト長さ L_B は，式（4-26）より

$$L_B=2L+\frac{\pi}{2}(D_1+D_2)+\frac{(D_2-D_1)^2}{4L}$$

$$=2\times 300\times\frac{\pi}{2}(22.6+45.3)+\frac{(45.3-22.6)^2}{4\times 300}=707\ [\mathrm{mm}]$$

9．12.24［m/s］，558.31［m/s^2］　10．49.45°

第 5 章　振動

ドリル問題 5-1（p. 151）

1．ブランコの振動

鉄棒にぶら下がっての振動

振り子時計

地震のとき電燈スイッチの紐などが揺れる

はかりのはりが物を載せた瞬間にゆれる

風があるときに木の枝が揺れる現象

台風時に木が揺れる

2．ばね係数も質量も変わらないので周期は変わらない。（振動の中心がかわるだけ）

3．振り子の周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ なので

$$1[s]=2\pi\sqrt{\frac{l[m]}{9.8[ms^{-2}]}}$$

より，$l=\frac{9.8}{(2\pi)^2}=0.2482\cdots=0.25\ \mathrm{m}$

4．固有周期は，$T=\frac{60[\mathrm{s}]}{120}=0.5$［s］

固有振動数は $f=\frac{1}{T}=2$［Hz］

固有円振動数 $\omega=2\pi f=12.56$［rad/s］

5．固有周期は，$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{1000}}=0.19869\cdots=0.198$［s］

6．振動の解は，$x=A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t$ となる。

初期値を考えて

$$x(0)=A\sin 0+B\cos 0=0.01\Rightarrow B=0.01$$

$$\dot{x}(0)=\omega_0 A\cos 0-\omega_0 B\sin 0=2\Rightarrow A=\frac{2}{\omega_0}=\frac{2}{\sqrt{1000}}=0.06325$$

したがって $x=0.06325\sin\left(\frac{t}{\sqrt{1000}}\right)+0.01\cos\left(\frac{t}{\sqrt{1000}}\right)$

7．固有振動数 $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}=0.1575\cdots=0.158$［Hz］

振り子の固有周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=6.346\cdots=6.35$［s］

8．1 m の棒の等価振り子長さは $\frac{2}{3}$ m であるので，

振り子の固有周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}=1.638\cdots=1.64$［s］

9．この系の，固有角振動数は，$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=10$

振動の振幅は $e^{-\gamma\omega_0 t}$ にしたがって小さくなるので，

$e^{-\gamma\omega_0 t}=\frac{1}{10}$ より，

$$t=\frac{1}{\gamma\omega_0}\log 10=\frac{2.3025}{0.1}=23.0\ [s]$$

10．この系の，固有周期，$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

振動の振幅は $e^{-\gamma\omega_0 t}$ にしたがって小さくなるので，

$e^{-\gamma\omega_0 t}=\dfrac{1}{100}$ より，

$$t=\frac{1}{\gamma\omega_0}\log 100=\frac{2\times 2.3025}{0.001\omega_0}$$

よって $\dfrac{1}{100}$ になるまでに振動する回数は

$$\frac{2\times 2.3025}{0.001\omega_0 T}=\frac{2\times 2.3025}{0.001\times 2\pi}=732.9 \text{ より}\quad 732 \text{ 回}$$

ドリル問題 5-2 (p. 157)

1．問題文を 1 m/s ⇒ 1 m/s^2 に訂正して下さい。

突然加速度が増えても，ばね定数および質量は変わらないので，振動数は同じ，0.1 N の慣性力が突然かかった問題になる。ばねが $\dfrac{0.1}{10000}=10^{-5}$ m 伸びた点を中心に振幅 10^{-5} m の振動をする。

2．1 の問題と同じになり，ばねが 10^{-5} m 縮んだ点を中心に振幅 10^{-5} m の振動をする。

3．本問題では初速度を推定する問題である。

振動応答は

$$x=A\sin\omega_0 t$$

なので，速度応答は

$$v=\omega_0 A\cos\omega_0 t$$

から，$t=0$ での質量がもつ運動量は $mv(0)=m\omega_0 A$

したがって与えられた力積は $10^{-3}\times\sqrt{\dfrac{9.8}{1}}\times 0.05=1.565\times 10^{-4}$ [Ns]

4．減衰係数比は $\gamma=\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}=0.05$

減衰固有円振動数は $\omega_d=\sqrt{\dfrac{k}{m}(1-\gamma^2)}=9.9875$

減衰固有振動数は $f_d=\dfrac{\omega_d}{2\pi}=1.590$

5．問題文を以下のように訂正して下さい。

質量 $m=1$ kg，バネ定数 $k=1$ N/m，減衰係数 $c=0.01$ Ns/m の系に，

$F(\mathrm{t})=0.01\sin t$ [N]

なる振動する力が与えられたとき，十分時間がたった後の応答の振幅を求めよ。

正しい問題の解は $\lambda=1$ を 5-27 式に代入して

$$A=\frac{0.01}{1}\frac{1}{2\times 0.005}=1\ [\mathrm{m}]$$

6. 問題文問 3 の系でを問 5 の系でに訂正して下さい。

5-30 より $\omega_r=\sqrt{\frac{k}{m}(1-2\gamma^2)}=9.99975$

$$A_r=\frac{0.01}{1}\frac{1}{2\times 0.005\sqrt{1-0.005^2}}=10.0001250$$

7. 問題文「振動応答 $x(t)$ を求めよ」を「応答履歴を導け」に訂正して下さい。

この問題は $t=0$ で初期変位 0，初速度 $\frac{Q}{m}$ の問題となる。

初期変位 0 の解は $x(t)=Ae^{-\gamma\omega_0 t}\sin\omega_d t$ と書けるので

ここで $\omega_0{}^2=\frac{k}{m}$，$\omega_d=\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}$ である。

$$\dot{x}(0)=-\gamma\omega_0 A\sin 0+\omega_d A\cos 0=\frac{Q}{m}\Rightarrow A=\frac{Q}{m\omega_d}$$

8. 衝突後の系は物体の質量が $2m$ でばね定数が k の振動系の問題となるので固有円振動数は $\sqrt{\frac{k}{2m}}$，初速度は運動量保存の法則より初速度は $\frac{v}{2}$ [m/s] となる。

よって振幅 A とすると，$A\sqrt{\frac{k}{2m}}=\frac{v}{2}\Rightarrow A=v\sqrt{\frac{m}{2k}}$

したがって $x=v\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}t$

9. (1)　$\omega=0.5\sqrt{\frac{k}{m}}$，　(2)　$\omega=0.98\sqrt{\frac{k}{m}}$ が抜けていました。

$$A_r=\frac{f}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\gamma\lambda)^2}}$$

ここで $\lambda=\frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$

ドリル問題 5-3 (p. 165)

1. 微小振動をするとき

$$x=x_0\cos\omega_0 t,\quad y=y_0\cos\omega_0 t$$

したがって $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}$ となり，原点を通る直線状を振動する

ただし $\omega_0{}^2=\frac{k}{m}$

2. $x=x_0\cos\omega_0 t,\quad y=\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

$\cos^2\omega_0 t+\sin^2\omega_0 t=1$ より

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\left(\frac{\frac{y}{v_0}}{\frac{\omega_0}{\omega_0}}\right)^2=1$$

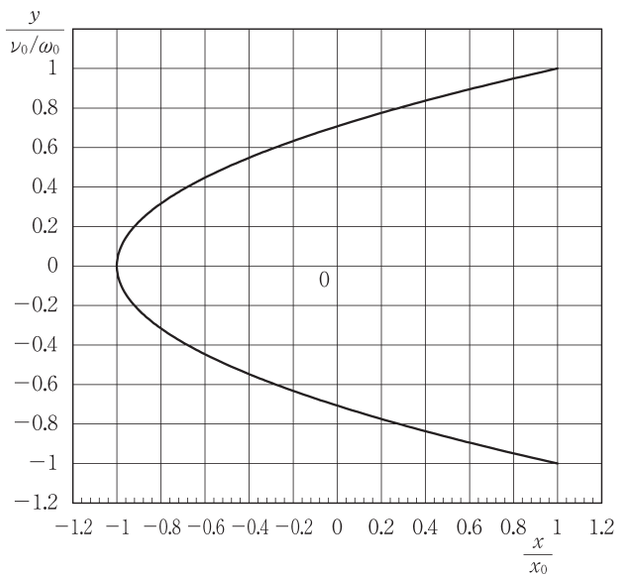
となり，楕円軌道を描いて振動する

3．$x=x_0\cos 2\omega_0 t$，$y=y_0\cos\omega_0 t$ の振動をする。

ここで $\cos 2\omega_0 t=2\cos^2\omega_0 t-1$ より

$$\frac{x}{x_0}=2\left(\frac{y}{y_0}\right)^2-1$$

なる放物線を描く振動をする。



4．2 自由度の自由振動は，2 つの自由振動の和と考えればよい。

そうすると

$$x_1(t)=A_{11}\cos\omega_1 t+B_{11}\sin\omega_1 t+A_{12}\cos\omega_2 t+B_{12}\sin\omega_2 t$$

$$x_2(t)=A_{21}\cos\omega_1 t+B_{21}\sin\omega_1 t+A_{22}\cos\omega_2 t+B_{22}\sin\omega_2 t$$

ただし，p. 161 の例題より

$$\frac{A_{21}}{A_{11}}=\frac{B_{21}}{B_{11}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{A_{22}}{A_{12}}=\frac{B_{22}}{B_{12}}=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

となる。

略解）　$t=0$ で $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$ より，$B_{11}=B_{12}=B_{21}=B_{22}=0$

$t=0$ で $x_1=x_0$，$x_2=2x_0$ なので

$$x_1(0)=A_{11}+A_{12}=x_0$$

$$x_2(0)=A_{21}+A_{22}=2x_0$$

$$A_{11}+A_{12}=x_0$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}A_{11}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}A_{12}=2x_0$$

これを解くと

$$A_{11}=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}x_0 \qquad A_{21}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)x_0=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}x_0$$

$$A_{12}=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}x_0 \qquad A_{22}=\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)x_0=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}x_0$$

となる。

$$x_1(t)=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cos\omega_1 t+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cos\omega_2 t$$

$$x_2(t)=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\cos\omega_1 t+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\cos\omega_2 t$$

5．問題文の前問を問 3 に訂正してください。

$x=x_0\cos 2\omega_0 t$，$y=\dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ の振動をする。

ここで $\cos 2\omega_0 t=1-2\sin^2\omega_0 t$ より

$$\frac{x}{x_0}=1-2\left(\frac{y}{\dfrac{v_0}{\omega_0}}\right)^2$$

なる放物線を描く振動をする。

6．式 5-40 より

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{mg+2kl}{ml}}=\sqrt{\frac{mg+8mg}{ml}}=3\sqrt{\frac{g}{l}}$$

1 次のモードの振幅を

$\theta_1=\theta_2=\Theta_1$

2 次のモードの振幅を

$\theta_1=-\theta_2=\Theta_2$

と書くと，$\Theta_1=\Theta_2=\dfrac{1}{2}$

$$\theta_1(t)=\frac{1}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\frac{1}{2}\cos 3\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

$$\theta_2(t)=\frac{1}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t-\frac{1}{2}\cos 3\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

演習問題 5（p. 166）

1．質量が x 下方に変位したとき，ばねの伸びは $2x$ となる。

糸の張力 $T=2kx$

運動方程式は $m\ddot{x}+2T=0 \quad\Rightarrow\quad m\ddot{x}+4kx=0$

したがって

$$f=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2．質量が x 上方に変位したとき，ばねの伸びは $\frac{x}{2}$ となる。

ばねの反力は下向きに $F=\frac{kx}{2}$

運動方程式は $m\ddot{x}l+F\cdot\frac{l}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+\frac{k}{4m}x=0$

よって $f=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{k}{4m}}=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

3．(1)　質量の受ける慣性力は $ml\ddot{\theta}$

ばねの抵抗モーメントは $k\theta$

よって，ダランベールの原理よりモーメントの釣り合いを考えると，振動方程式は

$$ml\ddot{\theta}\cdot l+k\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta}+\frac{k}{ml^2}\theta=0$$

固有円振動数は $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{ml^2}}=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}$

(2)　鉛直に吊り下げられたときには重力の影響を考えなければならない。θ 傾いたとき重力の円周方向成分は，$mg\theta$

よって振動方程式は

$$ml\ddot{\theta}\cdot l+k\theta+mgl\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta}+\frac{k+mgl}{ml^2}\theta=0$$

よって　$\omega_0=\sqrt{\frac{k+mgl}{ml^2}}$

4．釣り合い位置からの変位を x とすると，糸の張力は $T=kx$

慣性力は $m\ddot{x}$

よって系の固有振動数は $f=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

5．円板の釣り合い位置からの回転角を θ とすると，

慣性力の中心周りに作るモーメントは $\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta}+m(a\ddot{\theta})\,a=\left(\frac{1}{2}M+m\right)a^2\ddot{\theta}$

ばねの作るモーメントは $k(a\theta)\cdot a=ka^2\theta$

よって円固有振動数は $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{\frac{1}{2}M+m}}$

周期は $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2k}}$

6．振幅は $e^{-\gamma\omega_0 t}$ に比例するので，

要する時間を t とすると，$t=10\frac{2\pi}{\omega_d}\approx\frac{20\pi}{\omega_0}$

よって $e^{-\gamma\cdot 20\pi}\leq 0.5 \quad \Rightarrow \quad 20\pi\gamma\geq\log 2 \quad \gamma\geq\frac{1}{20\pi}0.693\approx 0.011$

7. 前問と同様に $e^{-\gamma\omega_0 t}\leq 0.5$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{10000}{1}=100}$$

$$\gamma\omega_0 t\geq\log 2 \quad \Rightarrow \quad \gamma\geq\frac{1}{\omega_0 t}\log 2=\frac{1}{100\cdot 60}\log 2=1.15\times 10^{-4}$$

8. 質量の受ける慣性力は $-ml\ddot{\theta}$

空気による減衰力 $-cl\dot{\theta}$

重力による円周方向の力 $-mg\theta$

よって $ml\ddot{\theta}+cl\dot{\theta}+mg\theta=0$

9. 問題文の $\underline{F(t)=F_0\cos 2\pi t}$ を $\underline{F(t)=F_0\cos t}$ に訂正して下さい。

5-26，27，28 式より，$\omega_0=1$，$\gamma=0.01$ なので，$\lambda=1$

$$x_0=\frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-1^2)^2+(0.02)^2}}=50F_0$$

$$\tan\beta=\infty \qquad \beta=\frac{\pi}{2}$$

$$\omega_d=\sqrt{1-0.01^2}=0.99995$$

よって，応答は，

$x(t)=50F_0\sin t+e^{-\gamma\omega_0 t}[A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t]$

となる。$x(0)=0$ より $A=0$。また速度は

$$\dot{x}(t)=50F_0\cos t+Be^{-\gamma\omega_0 t}[-\gamma\omega_0 t\sin\omega_d t+\omega_d\cos\omega_d t]$$

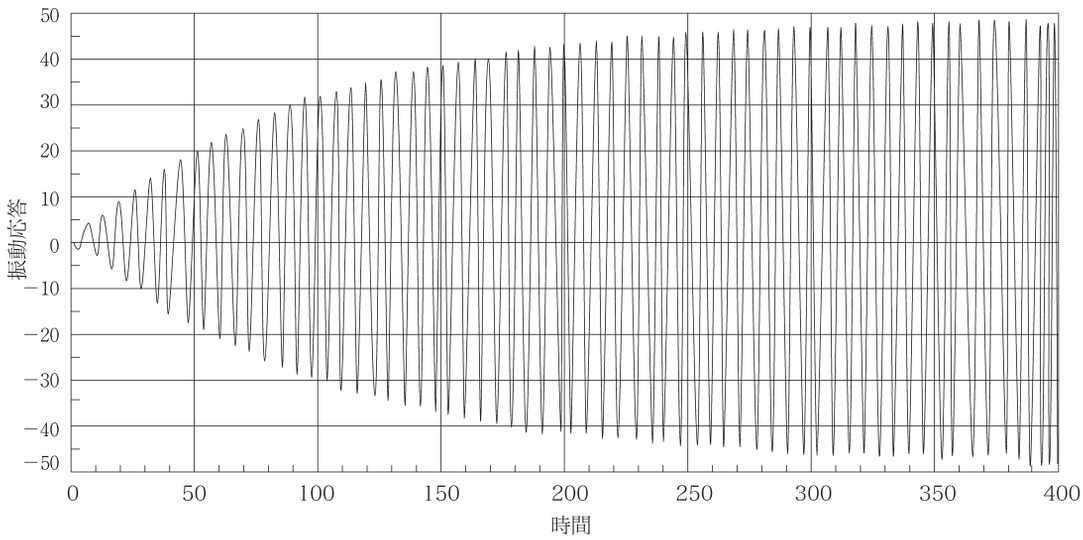
と書けるので

$$\dot{x}(0)=50F_0+\omega_d B=0$$

$$B=-50F_0$$

よって振動は，

$$x(t)=50F_0(\sin t-e^{-0.01t}\sin 0.99995t)$$



10．対応する前問が変わってしまいましたので解答はありません。

11．(1) $f=\dfrac{\omega_0}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{10\times10^3[N/m]}{1[kg]}}=\dfrac{100}{2\pi}=15.9\ [\mathrm{Hz}]$

$$T=\frac{1}{f}=0.0628$$

(2) $\lambda=\dfrac{80}{100}=0.8,\ \ \gamma=0$

$$x_0=\frac{0.1}{10^4}\frac{1}{\sqrt{(1-0.8^2)^2}}=\frac{1}{0.36}10^{-5}=2.78\times10^{-5}\ [\mathrm{m}]$$

1章　ワークシート問題 (p. 175)

1．$N_1'=W\dfrac{l_2}{l_1+l_2}+\dfrac{W}{g}\dfrac{ah}{l_1+l_2}\ \ >\ \ N_1$

$N_2'=W\dfrac{l_1}{l_1+l_2}-\dfrac{W}{g}\dfrac{ah}{l_1+l_2}\ \ <\ \ N_2$

後輪が浮き上がらない条件

$l_1>Mh$

自動車の減速度

$a=\dfrac{Ml_2g}{l_1+l_2-Mh}$

2．$\tan\theta=\dfrac{v^2}{gR}=0.92$

3．(1) $s=\left(\dfrac{V^2}{g}+2h\right)\sin2\theta$

(2) $\theta=\pi/4$

4．エネルギー保有則より，$mgl(1-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv^2$

$v=\sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$

力の釣り合いより

$T=mg+m\frac{v^2}{l}=mg+m\frac{2gl(1-\cos\theta_0)}{l}=mg(3-2\cos\theta_0)$

2章　ワークシート問題 (p. 177)

1．$I_1=\frac{1}{2}(\pi a_1{}^2t\mu)\,a_1{}^2=78.5\ \mathrm{kgm^2}$

$I_2=\frac{1}{2}(\pi a_2{}^2t\mu)\,a_2{}^2=397.6\ \mathrm{kgm^2}$

ここで，$a_1=10\ \mathrm{cm}$，$a_2=15\ \mathrm{cm}$，$t=1\ \mathrm{cm}$，$\mu=0.005\ \mathrm{kg/cm^3}$

角運動量保存則より

$I_1\omega_1+I_2\omega_2=(I_1+I_2)\,\omega$

$\omega_1=1.5\ \mathrm{rad/s}$，$\omega_2=0.8\ \mathrm{rad/s}$ なので

$\therefore\quad \omega=\frac{I_1\omega_1+I_2\omega_2}{I_1+I_2}=0.915\ \mathrm{rad/s}$

2．この振り子を 1 つの剛体とみなすと，その慣性モーメントは平行軸の定理にしたがって

$I=I_s+mc^2$

である。ここで I_s は球の重心まわりの慣性モーメントであり，球の半径を a とするとき $I_s=\frac{2}{5}ma^2$ である。c は固定軸から球の重心までの距離である。この振り子が θ だけ振れた時，この振り子が球から受ける力のモーメントは

$M=-mgc\sin\theta$

である。ここでは θ は十分に小さいので，

$M=-mgc\theta$

となる。剛体の回転の運動方程式は

$I\ddot{\theta}=M$

なので，

$\ddot{\theta}=\frac{M}{I}=-\frac{mgc}{I_s+mc^2}\theta=-\frac{mgc}{m\left(\frac{2}{5}a^2+c^2\right)}\theta$

となる。$\theta=\Theta\sin\omega t$ とおくと

$\omega=\sqrt{\frac{gc}{\left(\frac{2}{5}a^2+c^2\right)}}=4.39\ \mathrm{rad/s},\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=1.43\ \mathrm{s}$

を得る。

3．この剛体棒の重心まわりの慣性モーメント I_G は 1.33 kgm^2 なので O 点まわりの慣性モーメント I は

$I = I_G + lbt\mu \cdot c^2 = 13.58$ kgm^2

ここで $l = 80$ cm，$b = t = 5$ cm，$\mu = 0.005$ kg/cm^3 である。

P 点に撃力 Y がかかる時の剛体棒の回転の運動方程式は

$$I\frac{d\omega}{dt} = xY \qquad ①$$

となる。ここで ω は Y によって生じた O 点まわりの回転の角速度である。①式は $v = \omega c$ の関係から

$$\frac{I}{c}\frac{dv}{dt} = xY \qquad ②$$

となる。一方，剛体棒の質量を m，O 点にかかる y 方向の抗力を $\bar{Y}$，そして剛体棒の重心が得た y 方向の速度を v とすると，

$mv = \bar{Y}\Delta t + Y\Delta t$

つまり

$$m\frac{dv}{dt} = \bar{Y} + Y \qquad ③$$

②と③より

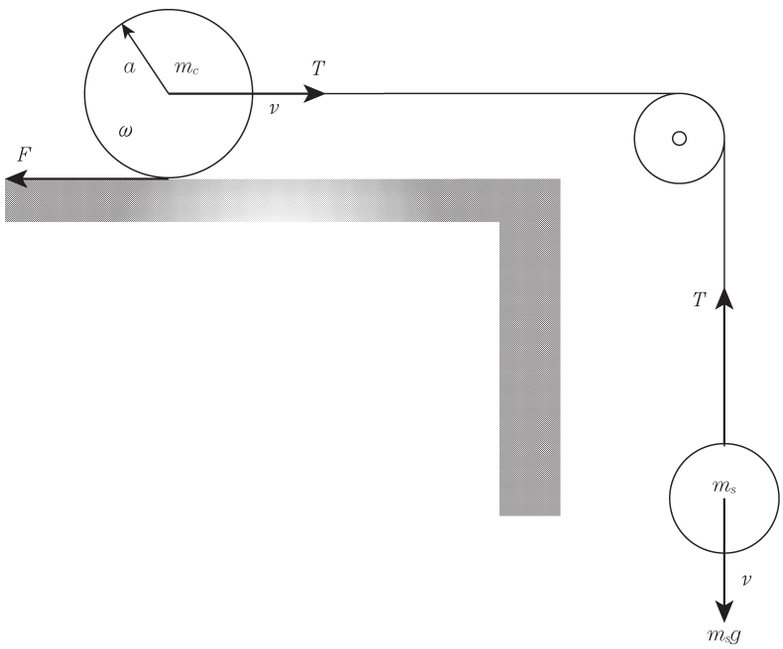
$$\frac{I}{c}\frac{1}{m}(\bar{Y} + Y) = xY \qquad ④$$

この式において $\bar{Y} = 0$ が成り立つためには

$$x = \frac{I}{mc} = 38.81 \text{ cm}$$

である。つまり，Y を O 点から 38.81 cm ずれたポイントで受ける時は，O 点での y 方向の抗力は受けないことになる。この剛体棒を野球のバットに例えれば，O 点を把持点とするときは手首への衝撃がない状態でボールを受けることを意味している。

4．以下のように張力と摩擦力を定義する。



円柱の重心の運動方程式は

$$m_c \frac{dv}{dt} = T - F \qquad ①$$

円柱の重心まわりの回転の運動方程式は

$$I \frac{d\omega}{dt} = Fa \qquad ②$$

$I = \frac{1}{2} m_c a^2$ と $v = a\omega$ の関係より，②は

$$m_c \frac{dv}{dt} = 2F \qquad ③$$

となる。①と③より，

$$T = 3F \qquad ④$$

を得る。一方，錘の運動方程式は

$$m_s \frac{dv}{dt} = m_s g - T \qquad ⑤$$

なので，①と⑤より

$m_s(T - F) = m_c(m_s g - T)$

となる。この式に④を代入し

$$F = \frac{m_c m_s g}{(2m_s + 3m_c)} = 0.046N,$$

$T = 3F = 0.138N$

を得る。

3章　ワークシート問題 (p. 179)

1．11.2［km/s］　　2．$v=\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$

3．エネルギー保存則から，材料を折るのに必要なエネルギーは材料を折ることによってハンマーが失ったエネルギーであり，それは振り下ろす前にもっていた重力による位置エネルギーと角度まで振れ上がったときの重力による位置エネルギーの差となる。従って，$mgl(\cos\beta-\cos\alpha)$ で表される。

4．$\alpha=0.86^\circ$

4章　ワークシート問題 (p. 181)

1．大きい方の歯車（大歯車）のピッチ円直径 D_1 は式（4-11）より，$D_1=204$ mm，小さい方の歯車（小歯車）のピッチ円直径 D_2 は，$D_2=132$ mm となる。
歯車の中心間距離 a は式（4-12）より a＝168 mm，大歯車の円ピッチ p_1 は式（4-10）より，$p_1=107$ mm，小歯車の円ピッチ p_2 は，$p_2=69$ mm，ピッチ円上での回転速度 v は式（4-15）より，v＝6.93（m/sec），そして大歯車の回転数 N_1 は式（4-14）より，$N_1=649$ rpm となる。

2．オープン掛けの場合，軸間の中心線とベルトのなす角度 γ は
$\sin\gamma=\dfrac{D_2-D_1}{2L}=0.075 \Rightarrow \gamma=\sin^{-1}0.075=4.3^\circ$ となるので，式（4-24）より
$L_B=6.82$ m となる。
また，クロス掛けの場合は，$\sin\gamma=\dfrac{D_2+D_1}{2L}=0.245 \Rightarrow \gamma=\sin^{-1}0.245=14.2^\circ$
となるので，式（4-27）より $L_B=19.33$ m となる。

3．チェーンの平均速度 v_m は，式（4-32）より，$v_m=2.54$（m/sec）
小スプロケットの歯数は z_2 は，式（4-34）より，$z_2=20$ 枚となる。

4．式（3-38）より $\cos\alpha_1=98^\circ$，式（4-39）より $\cos\alpha_2=24^\circ$ 従って，リンクのゆれ角度 δ は $\delta=\alpha_1-\alpha_2=74^\circ$ となる。

5章　ワークシート問題 (p. 183)

1．高さ h の点から落下させたとき衝突直前の速さは，エネルギー保存から
$v_0=\sqrt{2gh}$
衝突直後の速さ v_1 は運動量保存を考えて
$mv_0=2mv_1 \Rightarrow v_1=\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$
$2m$ の質量が載っているときの釣り合い位置は m の質量が載っている位置よりさらに $\dfrac{mg}{k}$ 下がるので，この問題は諸速度が $-\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$ で初期変位が $\dfrac{mg}{k}$ の振動の問題に

なる。

よって釣り合い位置からの変位を x とすると

$$x=e^{-\gamma\omega_0 t}[A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t]$$

と表される。ここで

$$\omega_0{}^2=\frac{k}{2m},\qquad \gamma=\frac{c}{2\sqrt{2mk}}$$

$t=0$ で $x=\dfrac{mg}{k}$ より，$A=\dfrac{mg}{k}$

$$\dot{x}=-\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

$$(\dot{x}=e^{-\gamma\omega_0 t}[-\gamma\omega_0(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t)+\omega_d(-A\sin\omega_d t+B\cos\omega_d t)]$$

すなわち

$$\dot{x}(0)=-\gamma\omega_0 A+B\omega_d=-\sqrt{\frac{gh}{2}} \qquad \Rightarrow$$

$$B=-\frac{1}{\omega_d}\left(\sqrt{\frac{gh}{2}}-\gamma\omega_0 A\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\frac{mg}{k}\left(\gamma-\sqrt{\frac{kh}{mg}}\right)$$

よって

$$x=\frac{mg}{k}e^{-\gamma\omega_0 t}\left[\cos\omega_d t+\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left(\gamma-\sqrt{\frac{kh}{mg}}\right)\sin\omega_d t\right]$$

2．円板の慣性モーメントは

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\rho\pi d^2 h}{4}\right)\frac{d^2}{4}=\frac{\rho\pi d^4 h}{32}=39.25$$

θ 回転したときのばねの作るモーメントは

$$k\left(\frac{d}{2}\theta\right)\cdot\frac{d}{2}=\frac{kd^2}{4}\theta$$

よって

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kd^2}{I}}=4.02\ [\mathrm{Hz}]$$

3．(1)　非減衰のときの

固有円振動数$=\sqrt{\dfrac{100}{0.1}}=31.62\ [\mathrm{Hz}]$

減衰係数比$=\dfrac{c}{\sqrt{2mk}}=\dfrac{1}{2\sqrt{0.1\cdot 100}}=0.158=0.16$

減衰固有円振動数$=\omega_0\sqrt{1-\gamma^2}=31.62\sqrt{1-0.158}=31.225=31.2\ [\mathrm{Hz}]$

(2)　初期変位が 0.01 m，初期速度が 0 のときの自由振動の解であるので，

$x=e^{-\gamma\omega_0 t}[A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t]$ より

$A=0.01\ [\mathrm{m}]$

$\dot{x}=e^{-\gamma\omega_0 t}[-\gamma\omega_0(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t)+\omega_d(-A\sin\omega_d t+B\cos\omega_d t)]$

すなわち

$$\dot{x}(0) = -\gamma\omega_0 A + B\omega_d = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} A = \frac{0.158}{\sqrt{1-0.158^2}} 0.01 = 0.160A$$

よって

$$x = 0.01e^{-\gamma\omega_0 t}[\cos 31.2t + 0.160 \sin 31.2t]$$

4. (1) 左の質量の変位を x_1，右の質量の変位を x_2 とすると，振動方程式は

$$\begin{matrix} m\ddot{x}_1 + kx_1 - 3k(x_2 - x_1) 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + 3k(x_2 - x_1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} m\ddot{x}_1 + 4kx_1 - 3kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - 3kx_1 + 4kx_2 = 0 \end{matrix}$$

となる

(2) $x_1 = A_1 e^{i\omega t}$，$x_2 = A_2 e^{i\omega r}$ を代入すると

$$(-\omega^2 m + 4k) A_1 - 3kA_2 = 0$$

$$-3kA_1 + (-\omega^2 m + 4k) A_2 = 0$$

係数比が等しい条件より

$$(-\omega^2 m + 4k)(-\omega^2 m + 4k) - 9k^2 = 0$$

これを解いて 2 つの固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \sqrt{\frac{7k}{m}}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ のとき，$A_1 = A_2$ となる同位相の振動

$\omega = \sqrt{\frac{7k}{m}}$ のとき，$A_1 = -A_2$ となる逆位相の振動