

## 15章 問題解答

1.

質量数 12 の炭素原子と質量数 13 の炭素原子が 98.90%, 1.10% するので、炭素の原子量は、次式となる。

$$12.000 \times 0.9890 + 13.003 \times 0.0110 = 12.011$$

2.

電位差  $V$  で電荷  $e$  [C] の電子を加速すると、電子が得る運動エネルギー  $W$  は、次式となる。

$$W = eV \text{ [J]}$$

この運動エネルギーを持った電子が金属のターゲットに当たり X 線を発生させる。そのエネルギーがすべて X 線に変わるとすると、X 線の波長  $\lambda$  は次式で与えられる。

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = eV$$

$$\lambda = \frac{hc}{eV} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 2.998 \times 10^8}{1.602 \times 10^{-19} \times 2.00 \times 10^4} = 6.20 \times 10^{-11} \text{ m} \quad \text{[答]}$$

3.

- (1) 鉛  $_{82}\text{Pb}$     (2) ウラン  $_{92}\text{U}$   
(3) ヨウ素  $_{53}\text{I}$     (4) セシウム  $_{55}\text{Cs}$

4.

トリウム  $_{90}^{232}\text{Th}$

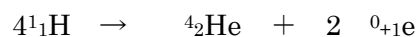
### 演習問題 A

#### 15-A1

(1)

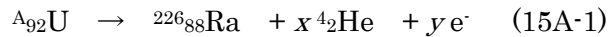


(2)



#### 15-A2

$\alpha$  崩壊を  $x$  回、 $\beta$  崩壊を  $y$  回起こして生成しているので、ウランの質量数を  $A$  として、核反応は次式となる。



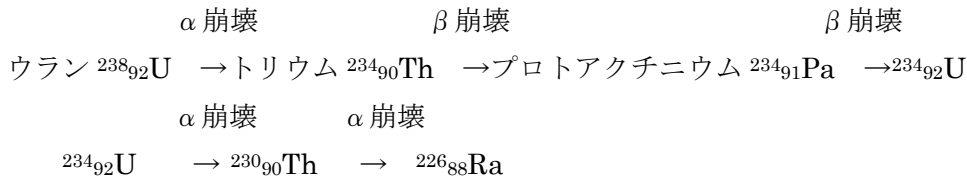
$$A = 226 + 4x, \quad 92 = 88 + 2x - y$$

ゆえに、 $A$  は偶数である。したがって、 $A=238$  で、出発物質は  ${}^{238}_{92}\text{U}$  [答]

$$x = (238 - 226) / 4 = 3$$

$$y = 88 + 2x - 92 = 94 - 92 = 2$$

よって、3回の $\alpha$ 崩壊と2回の $\beta$ 崩壊であり、下記のような反応と考えられる。[答]



### 15-A3

$$t_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{\ln 2}{0.0239} = 29.0$$

半減期は 29.0 年 [答]

### 15-A4

原子量 90 のストロンチウム  ${}^{90}_{38}\text{Sr}$  の原子の数  $N$  は、アボガドロ数を  $N_A$  として、1.00g の質量から次のように求まる。

$$N = N_A \times 1.00 / 90 = 6.69 \times 10^{21} \text{ 個} \quad [\text{答}]$$

ラジウム 1g の放射能は、次のようになる。

$$A = \lambda N = \{0.0239 / (365.242 \times 24 \times 60 \times 60)\} \times 6.69 \times 10^{21} = 5.07 \times 10^{12} \text{ Bq} \quad [\text{答}]$$

### 15-A5

$$t / t_{1/2} = 7.25 / 29 = 1 / 4$$

$$N = N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.841$$

$$A = \lambda N = \{0.0239 / (365.242 \times 24 \times 60 \times 60)\} \times 6.69 \times 10^{21} \times 0.841 = 4.26 \times 10^{12} \text{ Bq}$$

[答] 約 0.841 g が残り、崩壊するのは、0.159 g である。

$$\text{放射能は } 4.26 \times 10^{12} \text{ Bq}$$

### 15-A6

$$1.00 \text{ g} = 1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

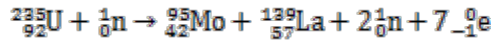
$$mc^2 = 10^{-3} \times (2.998 \times 10^8)^2$$

$$= 8.988 \times 10^{13} \text{ J}$$

$$\begin{aligned}
&= 8.988 \times 10^{13} / (1.602176 \times 10^{-19}) \text{ eV} \\
&= 5.61 \times 10^{32} \text{ eV} \\
&= 5.61 \times 10^{26} \text{ MeV} \quad [\text{答}]
\end{aligned}$$

### 15-A7

ウランは核分裂によって、以下のように変化する。



電子の質量を無視すると、核分裂による質量の減少は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta m &= 235.124 + 1.009 - (94.945 + 138.955 + 2 \times 1.009) = 0.215 \text{ u} \\
&= 0.215 / 1000 / (6.022 \times 10^{23}) \text{ kg} \\
&= 3.57 \times 10^{-28} \text{ kg}
\end{aligned}$$

$E = mc^2$ を用いて、

$$E = 3.57 \times 10^{-28} \times (2.998 \times 10^8)^2 = 3.21 \times 10^{-11} \quad [\text{答}] 3.21 \times 10^{-11} \text{ J}$$

### 演習問題B

#### 15-B1

1.

例題 15-8 より、 ${}^{14}_6\text{C}$  の半減期を 5730 年とする。

$$\frac{x}{100} = \frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$$

両辺の自然対数をとると

$$\ln\left(\frac{x}{100}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}} = \frac{t}{t_{1/2}} \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
t &= -t_{1/2} \times \ln\left(\frac{x}{100}\right) \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right) \\
&= -t_{1/2} \frac{1}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{x}{100}\right) \\
&= \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \times (\ln 100 - \ln x)
\end{aligned}$$

$x=6.25\%$  を代入して 22900 年, または  $1/16$  で  $5730 \times 4 = 22900$  年となる。

$x=12.5\%$  を代入して 17200 年, または  $1/8$  で  $5730 \times 3 = 17200$  年となる。

### 15-B2

$^{238}_{92}\text{U}$ ,  $^{235}_{92}\text{U}$  の現在と 45 億年前の数をそれぞれ  $N_A, N_B$  と  $N_{A0}, N_{B0}$  とすると,

$$\frac{N_A}{N_{A0}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4.5 \times 10^9}{4.5 \times 10^9}} \quad N_{A0} = 2 N_A$$

$$\frac{N_B}{N_{B0}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4.5 \times 10^9}{7.1 \times 10^8}} \quad N_{B0} = 2^{6.34} N_B = 81 N_B$$

$$\frac{N_A}{N_B} = \left(\frac{1}{0.0070}\right)$$

$$\frac{N_{A0}}{N_{B0}} = \frac{N_{A0}}{N_A} \times \frac{N_B}{N_{B0}} \times \frac{N_A}{N_B} = \frac{2.0 N_A}{81 N_B} = \frac{2.0}{81} \times \left(\frac{1}{0.0070}\right) = 3.52$$

$^{238}_{92}\text{U} : ^{235}_{92}\text{U} = 3.52 : 1$  になるので、

45 億年前の比率 ( $N_{A0}$  と  $N_{B0}$  の比率) は  $1 \div 3.52 = 28\%$  である。[答]

### 15-B3

アボガドロ数  $N_A = 6.022 \times 10^{23}$  として、質量  $m = 0.001\text{g}$  中のウラン 235 (原子量  $M=235$ ) の原子の数  $N$  は次のように求められる。

$$N = N_A \times m / M = 6.022 \times 10^{23} \times 1.00 \times 10^{-3} / 235 = 2.56 \times 10^{18} \quad \text{個}$$

ウラン 235 の原子核 1 個の分裂で得られるエネルギー  $W[\text{J}]$  は次のようになる。

$$W = 2.00 \times 10^8 \times 1.602 \times 10^{-19} = 3.20 \times 10^{-11} \text{ J}$$

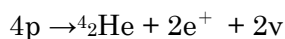
原子炉の 1 秒間の放出エネルギー  $Q$  は次のようになる。

$$Q = N W = 2.56 \times 10^{18} \times 3.20 \times 10^{-11} = 8.19 \times 10^7 \text{ J/s}$$

得られる電力  $W_{\text{out}} = \eta Q = 0.300 \times 8.19 \times 10^7 = 2.46 \times 10^7 \text{ W}$  [答]

### 15-B4

水素の原子核(陽子) $^1_1\text{H}(=p)$  4 個が核融合し、 $^4_2\text{He}$  になるときに放出されるエネルギーであるとする。



陽子の質量は近似的に  $m_p$ ,  $^4_2\text{He}$  の質量  $M_{\text{He}}$  とし、失われた質量  $\Delta m$  は

$$\begin{aligned} \Delta m &= 4m_p - M_{\text{He}} \\ &= 4 \times 1.007825 - 4.0026 = 0.0287 \text{ u} \\ &= 0.0287 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23}) \text{ kg} \end{aligned}$$

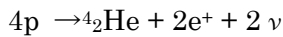
$$\begin{aligned}
E &= \Delta mc^2 \\
&= \{0.0287 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23})\} \times (2.998 \times 10^8)^2 = 4.284 \times 10^{-12} \text{ J} \\
&= 4.284 \times 10^{-12} / (1.602 \times 10^{-13}) = 26.7 \text{ MeV} \quad [\text{答}]
\end{aligned}$$

### 15-B5

この問題を次の3つの手順で解く。

- 1) まず、水素の原子核(陽子) ${}^1_1\text{H}(=p)$ 4個が核融合し、 ${}^4_2\text{He}$ になるときに放出されるエネルギーを核反応の質量変化から求める。
- 2) 地球で観測される太陽のふく射エネルギーを求め、太陽の核融合エネルギーから1秒間に消費される水素の質量を求める。
- 3) 太陽に含まれる水素の全質量を、太陽の核融合エネルギーから1秒間に消費される水素の質量で割ることで、太陽に含まれる水素が消費されるまでの時間を計算する。

太陽での核融合で作りに出されるエネルギー $Q$ を求める。太陽の放射エネルギーの起源は、水素の原子核(陽子) ${}^1_1\text{H}(=p)$ 4個が核融合し、 ${}^4_2\text{He}$ になるときに放出されるエネルギーであるとする。



陽子の質量は近似的に  $m_p = 1.007825\text{u}$ 、生成するヘリウム  ${}^4_2\text{He}$  の質量  $M_{\text{He}} = 4.00260\text{u}$ 、 $1\text{u} = 1.6605 \times 10^{-27}\text{kg}$ 、 $1\text{u} \times c^2 = 1.49 \times 10^{-10}\text{J}$  とする。 $c$ は光速である。まず、 $1\text{u}$  を  $\text{kg}$  に変換する。

$$1\text{u} = 1 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23}) \text{ kg}$$

陽子の質量は近似的に  $m_p$ 、 ${}^4_2\text{He}$  の質量  $M_{\text{He}}$  とし、失われた質量  $\Delta m$  は

$$\begin{aligned}
\Delta m &= 4m_p - M_{\text{He}} \\
&= 4 \times 1.007825 - 4.0026 = 0.0287 \text{ u} \\
&= 0.0287 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23}) \text{ kg}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \Delta mc^2 \\
&= \{0.0287 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23})\} \times (3 \times 10^8)^2 = 4.28 \times 10^{-12} \text{ J} \\
&= 4.28 \times 10^{-12} / (1.602 \times 10^{-13}) = 26.7 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

次に、地球で観測される太陽のふく射エネルギーを求め、太陽の核融合のエネルギーから1秒間に消費される水素の質量を求める。

地球での放射エネルギー $W_e$ は、1秒間に $1\text{m}^2$ の面積で地球に到達する太陽の放射エネルギーであり、

$$W_e = 1.36 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

太陽と地球の距離  $r = 1.5 \times 10^{11}\text{m}$  であるので、太陽が1秒間放出する放射エネルギー  $W_s$  は、 $W_e$  に  $4\pi r^2$  の球表面の面積を乗じて求めることができる。

$$W_s = W_e 4\pi r^2 = 1.36 \times 10^3 \times 4 \times 3.14 \times (1.50 \times 10^{11})^2$$

$$= 3.84 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

水素の原子核(陽子) ${}^1_1\text{H}(=p)$ 4個が核融合し放出するエネルギー $E$ と太陽が1秒間放出する輻射エネルギー $W_s$ から1秒間に消費される水素の質量 $N_p$ を考える。

$$N_p = 4 W_s / E = 4 \times 3.84 \times 10^{26} / (4.28 \times 10^{-12}) \text{ 個/s}$$

$$= 3.59 \times 10^{38} \text{ 個} \cdot \text{s}^{-1}$$

1秒間に失う水素の質量 $M_H$

$$M_H = N_p / (1000 \times 6.022 \times 10^{23}) = 3.59 \times 10^{38} / (1000 \times 6.022 \times 10^{23}) \text{ kg}$$

$$= 5.96 \times 10^{11} \text{ kg}$$

太陽に含まれる水素の全質量を、太陽の核融合エネルギーから1秒間に消費される水素の質量で割ることで、太陽に含まれる水素が消費されるまでの時間を計算する。

太陽の質量 $M_{\text{sun}}$ を $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ とすると、太陽に含まれる水素が消費されるまでの時間 $t$  [s]が求まる。

$$t = M_{\text{sun}} / M_H = 1.99 \times 10^{30} / (10 \times 5.96 \times 10^{11})$$

$$= 3.34 \times 10^{17} \text{ s}$$

$$= 3.34 \times 10^{17} / (3600 \times 24 \times 365.2425)$$

$$= 1.1 \times 10^{10} \text{ year}$$

$$= 110 \text{ 億年} \quad [\text{答}]$$