15章　問題解答

１．

質量数12の炭素原子と質量数13の炭素原子が98.90%，1.10%するので、炭素の原子量は，次式となる。

12.000×0.9890＋13.003×0.0110 = 12.011

２．

電位差 V で電荷 e[C]の電子を加速すると，電子が得る運動エネルギー W は，次式となる。

$W = eV$ [J]

この運動エネルギーを持った電子が金属のターゲットに当たり X 線を発生させる。そのエネルギーがすべてX線に変わるとすると，X線の波長 λ は次式で与えられる。

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = eV$$

$$\lambda = \frac{hc}{eV} = \frac{6.626\times10^{-34}\times2.998\times10^{8}}{1.602\times10^{-19}\times2.00\times10^{4}} = 6.20\times10^{-11}\ \mathrm{m}\quad[答]$$

３．

(1) 鉛　$_{82}Pb$　(2) ウラン　$_{92}U$

(3) ヨウ素　$_{53}I$　(4) セシウム　$_{55}Cs$

４．

トリウム　$^{232}_{90}Th$

演習問題Ａ

15-A1

(1)

$^{226}_{88}Ra$　＋　$^{4}_{2}He$　→　$^{222}_{86}Rn$

(2)

$4\,^{1}_{1}H$　→　$^{4}_{2}He$　＋　2　$^{0}_{+1}e$

15-A2

α 崩壊を x 回，β 崩壊を y 回起こして生成しているので，ウランの質量数を A として，核反応は次式となる。

$^{A}_{92}U \rightarrow {}^{226}_{88}Ra + x\,{}^{4}_{2}He + y\,e^{-}$　(15A-1)

$A = 226 + 4x$,　$92 = 88 + 2x - y$

ゆえに、A は偶数である。したがって，A=238 で，出発物質は $^{238}_{92}U$ [答]

$x = (238-226)/4 = 3$

$y = 88 + 2x - 92 = 94 - 92 = 2$

よって、　3 回の α 崩壊と 2 回の β 崩壊であり、下記のような反応と考えられる。[答]

$$\text{ウラン } {}^{238}_{92}U \xrightarrow{\alpha\text{崩壊}} \text{トリウム } {}^{234}_{90}Th \xrightarrow{\beta\text{崩壊}} \text{プロトアクチニウム } {}^{234}_{91}Pa \xrightarrow{\beta\text{崩壊}} {}^{234}_{92}U$$

$${}^{234}_{92}U \xrightarrow{\alpha\text{崩壊}} {}^{230}_{90}Th \xrightarrow{\alpha\text{崩壊}} {}^{226}_{88}Ra$$

15-A3

$$t_{1/2} = \frac{1}{\lambda}\ln 2 = \frac{\ln 2}{0.0239} = 29.0$$

半減期は 29.0 年　[答]

15-A4

原子量 90 のストロンチウム 90 $^{90}_{38}Sr$ の原子の数 N は, アボガドロ数を N_A として, 1.00g の質量から次のように求まる。

$N = N_A \times 1.00 / 90 = 6.69 \times 10^{21}$ 個　[答]

ラジウム 1g の放射能は，次のようになる。

$A = \lambda N = \{0.0239/(365.242 \times 24 \times 60 \times 60)\} \times 6.69 \times 10^{21} = 5.07 \times 10^{12}$ Bq　[答]

15-A5

$t / t_{1/2} = 7.25 / 29 = 1/4$

$$N = N_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 0.841$$

$A = \lambda N = \{0.0239/(365.242 \times 24 \times 60 \times 60)\} \times 6.69 \times 10^{21} \times 0.841 = 4.26 \times 10^{12}$ Bq

[答]　約 0.841 g が残り，崩壊するのは，0.159 g である。

放射能は 4.26×10^{12} Bq

15-A6

$1.00\text{g} = 1.00 \times 10^{-3}$ kg

$mc^2 = 10^{-3} \times (2.998 \times 10^8)^2$

$= 8.988 \times 10^{13}$ J

$=8.988\times10^{13}／(1.602176\times10^{-19})$ eV

$=5.61\times10^{32}$ eV

$=5.61\times10^{26}$ MeV　[答]

15-A7

ウランは核分裂によって、以下のように変化する。

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{95}_{42}\mathrm{Mo} + {}^{139}_{57}\mathrm{La} + 2\,{}^{1}_{0}\mathrm{n} + 7\,{}^{0}_{-1}\mathrm{e}$$

電子の質量を無視すると、核分裂による質量の減少は次のようになる。

$\Delta m = 235.124 + 1.009 - (94.945 + 138.955 + 2 \times 1.009) = 0.215$ u

$= 0.215 / 1000 / (6.022 \times 10^{23})$ kg

$= 3.57 \times 10^{-28}$ kg

$E = mc^2$を用いて、

$E = 3.57 \times 10^{-28} \times (2.998 \times 10^{8})^2 = 3.21 \times 10^{-11}$　　[答] 3.21×10^{-11} J

演習問題B

15-B1

1.

例題 15-8 より，$^{14}_{6}C$ の半減期を 5730 年とする。

$$\frac{x}{100} = \frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$$

両辺の自然対数をとると

$$\ln\left(\frac{x}{100}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}} = \frac{t}{t_{1/2}} \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$t = -t_{1/2} \times \ln\left(\frac{x}{100}\right) \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$= -t_{1/2}\frac{1}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{x}{100}\right)$$

$$= \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \times (\ln 100 - \ln x)$$

x=6.25%　を代入して 22900 年，または　1／16 で　5730×4 = 22900 年となる。

x=12.5%　を代入して 17200 年，　または　1／8 で　5730×3 = 17200 年となる。

15-B2

$^{238}_{92}U$，$^{235}_{92}U$ の現在と 45 億年前の数をそれぞれ N_A, N_B と N_{A0}，N_{B0} とすると，

$$\frac{N_A}{N_{A0}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4.5\times10^9}{4.5\times10^9}} \qquad N_{A0} = 2\,N_A$$

$$\frac{N_B}{N_{B0}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4.5\times10^9}{7.1\times10^8}} \qquad N_{B0} = 2^{6.34} N_B = 81 N_B$$

$$\frac{N_A}{N_B} = \left(\frac{1}{0.0070}\right)$$

$$\frac{N_{A0}}{N_{B0}} = \frac{N_{A0}}{N_A}\times\frac{N_B}{N_{B0}}\times\frac{N_A}{N_B} = \frac{2.0N_A}{81N_B} = \frac{2.0}{81}\times\left(\frac{1}{0.0070}\right) = 3.52$$

$^{238}_{92}U : {}^{235}_{92}U$ = 3.52：1 になるので、

45 億年前の比率（N_{A0} と N_{B0} の比率）は 1÷3.52＝28%である。[答]

15-B3

アボガドロ数 $N_A = 6.022\times10^{23}$ として，質量 $m = 0.001$g 中のウラン 235（原子量 M=235）の原子の数 N は次のように求められる。

$N = N_A \times m / M = 6.022\times10^{23}\times1.00\times10^{-3} / 235 = 2.56\times10^{18}$ 個

ウラン 235 の原子核 1 個の分裂で得られるエネルギー W[J]は次のようになる。

$W = 2.00\times10^8\times1.602\times10^{-19} = 3.20\times10^{-11}$ J

原子炉の 1 秒間の放出エネルギー Q は次のようになる。

$Q = N\,W = 2.56\times10^{18}\times3.20\times10^{-11} = 8.19\times10^7$ J/s

得られる電力 $W_{out} = \eta\,Q = 0.300\times8.19\times10^7 = 2.46\times10^7$ W [答]

15-B4

水素の原子核(陽子)^1_1H(=p)4 個が核融合し，^4_2He になるときに放出されるエネルギーであるとする。

$4p \rightarrow {}^4_2He + 2e^+ + 2v$

陽子の質量は近似的に m_p，^4_2He の質量 M_{He} とし、失われた質量 Δm は

$\Delta m = 4m_p - M_{He}$

$= 4\times1.007825 - 4.0026 = 0.0287$ u

$= 0.0287 / (1000\times6.022\times10^{23})$ kg

$E = \Delta mc^2$

$= \{0.0287 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23})\} \times (2.998 \times 10^8)^2 = 4.284 \times 10^{-12}$ J

$= 4.284 \times 10^{-12} / (1.602 \times 10^{-13}) = 26.7$ MeV　[答]

15-B5

この問題を次の３つの手順で解く。

１）まず，水素の原子核(陽子)$^1_1$H(=p)4 個が核融合し，$^4_2$He になるときに放出されるエネルギーを核反応の質量変化から求める。

２）地球で観測される太陽のふく射エネルギーを求め，太陽の核融合エネルギーから１秒間に消費される水素の質量を求める。

３）太陽に含まれる水素の全質量を，太陽の核融合エネルギーから１秒間に消費される水素の質量で割ることで，太陽に含まれる水素が消費されるまでの時間を計算する。

太陽での核融合で作り出されるエネルギーQ を求める。太陽の放射エネルギーの起源は，水素の原子核(陽子)$^1_1$H(=p)4 個が核融合し，$^4_2$He になるときに放出されるエネルギーであるとする。

$$4p \rightarrow {}^4_2He + 2e^+ + 2\nu$$

陽子の質量は近似的に m_p = 1.007825u，生成するヘリウム $^4_2$He の質量 M_{He}= 4.00260u, 1 u = 1.6605 × 10−^{27}kg, 1u × c^2 = 1.49×10^{-10}J とする。c は光速度である。

まず、1u を kg に変換する。

$$1\ u = 1 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23})\ kg$$

陽子の質量は近似的に m_p, $^4_2$He の質量 M_{He} とし、失われた質量Δm は

$\Delta m = 4m_p - M_{He}$

$= 4 \times 1.007825 - 4.0026 = 0.0287$ u

$= 0.0287 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23})$ kg

$E = \Delta mc^2$

$= \{0.0287 / (1000 \times 6.022 \times 10^{23})\} \times (3 \times 10^8)^2 = 4.28 \times 10^{-12}$ J

$= 4.28 \times 10^{-12} / (1.602 \times 10^{-13}) = 26.7$ MeV

次に，地球で観測される太陽のふく射エネルギーを求め，太陽の核融合のエネルギーから１秒間に消費される水素の質量を求める。

地球での輻射エネルギーWe は，１秒間に 1m^2 の面積で地球に到達する太陽の放射エネルギーであり，

$$W\mathrm{e} = 1.36 \times 10^3\ \mathrm{J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$$

太陽と地球の距離 r＝1.5×10^{11}m　であるので，太陽が１秒間放出する輻射エネルギー Ws は，We に $4\pi r^2$ の球表面の面積を乗じて求めることができる。

$W\text{s} = W\text{e}\ 4\pi r^2 = 1.36\times10^3\times4\times3.14\times(1.50\times10^{11})^2$

$= 3.84\times10^{26}\ \text{J}\cdot\text{s}^{-1}$

水素の原子核(陽子)$^1_1$H(=p)4 個が核融合し放出するエネルギーEと太陽が 1 秒間放出する輻射エネルギーWs から 1 秒間に消費される水素の質量 N_pを考える。

$N_\text{p} = 4\,W\text{s} / \text{E} = 4\ \times3.84\times10^{26} / (4.28\times10^{-12})$個/s

$= 3.59\times10^{38}$ 個$\cdot\text{s}^{-1}$

1 秒間に失う水素の質量 M_H

$M_\text{H} = N_\text{p}\ / (1000\times6.022\times10^{23}) = 3.59\times10^{38} / (1000\times6.022\times10^{23})$ kg

$= 5.96\times10^{11}$ kg

太陽に含まれる水素の全質量を，太陽の核融合エネルギーから 1 秒間に消費される水素の質量で割ることで，太陽に含まれる水素が消費されるまでの時間を計算する。

太陽の質量 M_sunを 1.99×10^{30}kg とすると，太陽に含まれる水素が消費されるまでの時間 t [s]が求まる。

$t = M_\text{sun}/10/M_\text{H} = 1.99\times10^{30} / (10\times5.96\times10^{11})$

$= 3.34\times10^{17}$s

$= 3.34\times10^{17}/(3600\times24\times365.2425)$

$= 1.1\times10^{10}$ year

= 110 億年　[答]