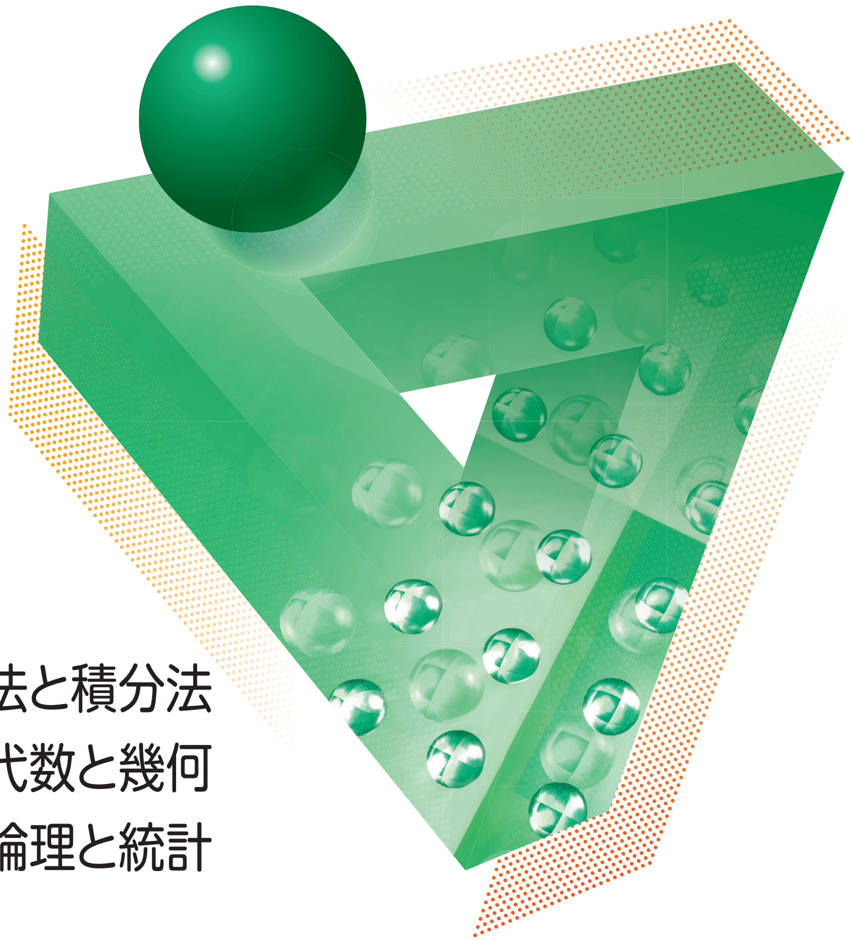
Primary

プライマリー大学ノート

よ·く·わ·か·る！

基礎数学

Basic Mathematics



藤田岳彦
石村直之
藤岡　敦
松田秀樹
今井仁司
石井昌宏
竹内慎吾
…………著

微分法と積分法
代数と幾何
集合と論理と統計

実教出版

まえがき

本書は大学での１，２年生の数学で重要な微分積分，線形代数，確率統計，集合論理についてコンパクトにまとめ，問題を解くことによりわかりやすく学べるよう工夫したものである．

高校からの復習も随所にとり入れ，高校のときに数学が苦手だった読者にもとっつきやすいようにした．

第１章では，高校数学の復習からはじめて，微分・積分，極限，数列について，第２章では，やはり高校の範囲（図形と式，ベクトル）からはじめて，行列，連立１次方程式の基本的知識を得られるように工夫した．また，新課程では行列は高校数学からはずれたが，その点についても配慮してやさしい説明を行った．第３章では，やはり基本的な数学だが応用範囲が広い，集合，論理，確率・統計についての講義・演習を高校数学の復習からはじめ，十分な演習もとり上げて読者の理解が深まるようにした．

微分積分，線形代数，確率統計，集合論理は理科系でなくとも社会科学系を含むいわゆる文科系の学生にとっても非常に重要なものであり，本書をマスターしたら，より詳しい「よくわかる Primary 大学ノート」シリーズの微分積分，線形代数やさらに進んだ勉強にチャレンジして欲しい．とはいえ，そんなに数学の使用が頻繁ではない専門科目については本書で十分であると考えており，文科系の学生，また理科系の学生で数学が苦手だが将来必要となる学生，両方に有益な本に執筆者が協力し，仕上ったと思っている．

また，元大阪府立布施工業高校校長の安村博文先生，一橋大学経済学部生の中村友理奈さんには原稿を見て，貴重な意見を頂き，著者一同感謝している．

目　次

■ 本書の使い方

本書に決まった使い方があるというわけではありませんが，本書の特徴および著者らが想定している使い方を述べておきますので参考にしてください．

1 ……読者は大学初年次であることを想定しています．

2 ……読者の予備知識として高校数学Ⅰ・A，Ⅱ・B の内容を想定していますが，もう一度学び直すという姿勢で本書を活用してください．既に知っている用語などもあるでしょうが，なるべく解説するようにしました．もし解説されていない用語でわからないものがあるときは，高校の教科書や参考書などを調べてください．

3 ……1 章から読み始めることが望ましいですが，各章は独立しているので，読者の理解度に合わせてとばしたり順序を変えたりしても構いません．

4 ……説明や公式を記憶してしまうくらいに，熟読・精読を心掛けてください．

5 ……各講は解説・例題・練習問題で構成されています．

6 ……解説・例題の右側の余白には注があります．用語の説明，本文のより丁寧な解説，間違いやすい点や公式の使い方，問題を解くための補足，豆知識，アドバイスなどです．また例題・練習問題は基本・標準・発展に分かれています．

7 ……練習問題は全部自力で解いてみてください．そのほとんどが例題の解法をマスターすれば解ける問題です．脚注にヒントを載せていることもあるので参考にしてください．

8 ……各章の最後にまとめの問題があります．その章で学んだことの総復習になります．

9 ……各章の終わりにはコラムを入れました．その章の内容に関する話題なので，ぜひ読んでください．

10……巻末には問題の解答を入れました．さらに詳しい解答が必要な場合には，次の Web サイトからダウンロードできます．http://www.jikkyo.co.jp/download/

▶基礎数学　第1章

微分法と積分法

この章では大学数学の解析学に関連する話題を扱う．具体的には関数と数列が紹介されている．関数の重要性は自明であるが，数列もまたその概念なくして解析学を語ることができないくらい重要なものである．関数を具体的に理解したうえでその微分や積分あるいは極限を計算できる，また数列を理解することがこの章の目的である．

1講 初等関数(1)

解説

●関数とグラフ

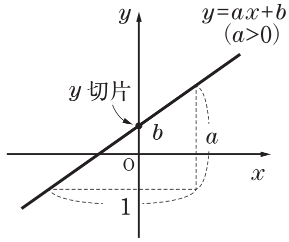
実数 x に対応して実数 y がただ1つ定まるとき，y を x の**関数**といい，$\boldsymbol{y=f(x)}$ などとかく．このとき $y=f(x)$ を満たす平面の点（x，y）の集まりを関数 $f(x)$ の**グラフ**という．

▶ x を**独立変数**，y を**従属変数**という．

$f(x)$ だけでも関数ということもある．グラフを図形ということもある．

● 1 次関数

1 次関数 $\boldsymbol{y=ax+b}$ （$\boldsymbol{a\neq 0}$） のグラフは**直線**になる．a は直線の傾きとよばれ，b は y 切片とよばれる．傾き a が正の場合はグラフは右上がりになり，負の場合は右下がりになる．



直線の方程式

（i） 傾きが a，y 切片が b の直線は $y=ax+b$

（ii） 傾きが a で点 (x_1, y_1) を通る直線は

$y-y_1=a(x-x_1)$

（iii） 2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通る直線は

$(x_2-x_1)(y-y_1)$
$=(y_2-y_1)(x-x_1)$

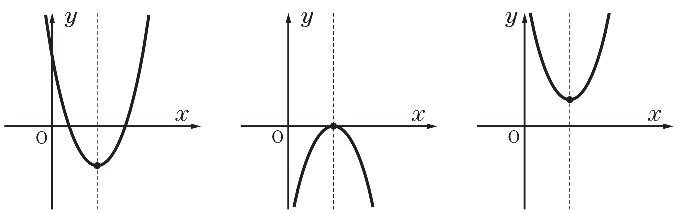
● 2 次関数

2 次関数 $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$ （$\boldsymbol{a\neq 0}$） のグラフは**放物線**とよばれる．$a>0$ の場合はグラフは下に凸になり，$a<0$ の場合は上に凸になる．放物線は対称軸をもち，この軸と放物線の交点を頂点という．

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

とかけるので，放物線 $y=ax^2+bx+c$ は $x=-\dfrac{b}{2a}$ を対称軸にもち，

頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ である．



$a>0$，$D>0$　　$a<0$，$D=0$　　$a>0$，$D<0$

▶一般に $f(x)$ が多項式であるとき，$y=f(x)$ を**多項式関数**という．0 次関数 $y=a$（a は定数）は**定数関数**という．

放物線の方程式

（i） 軸が $x=p$ の放物線は

$y=a(x-p)^2+b$

（ii） 軸が $x=p$，頂点が (p, q) の放物線は

$y=a(x-p)^2+q$

（iii） x 軸と 2 点 $(x_1, 0)$，$(x_2, 0)$ で交わる放物線は

$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

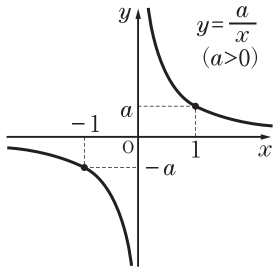
$\boldsymbol{x}$ 軸との共有点

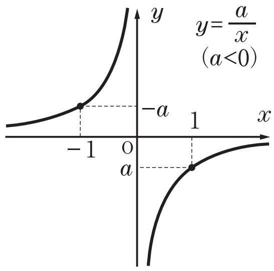
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点の x 座標は 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である．したがって，2 次方程式の**判別式** $D=b^2-4ac$ を用いると，x 軸との共有点は $D>0$ のとき 2 個，$D=0$ のとき 1 個，$D<0$ のとき 0 個となる．

（$D<0$ のときは複素数解をもつ（11 講））．

●分数関数

x についての分数式で表される関数を**分数関数**という．

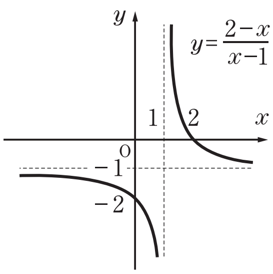




$$y=\frac{cx+d}{ax+b}=\frac{\dfrac{c}{a}(ax+b)-\dfrac{bc}{a}+d}{ax+b}$$

$$=\frac{\dfrac{ad-bc}{a^2}}{x+\dfrac{b}{a}}+\frac{c}{a}$$

とかけるので，分数関数 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ のグラフは直角に交わる 2 直線を漸近線にもつ**直角双曲線**になる．



▶分数関数を**有理関数**ともいう．

漸近線

グラフが限りなく近づく直線または曲線を**漸近線**という．

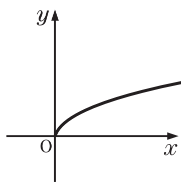
$y=\dfrac{k}{x-\alpha}+\beta$ のグラフの漸近線は $x=\alpha$，$y=\beta$

▶双曲線について詳しいことは 7 講にある．

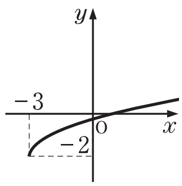
▶$y=\dfrac{2-x}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-1$ であるので，漸近線は $x=1$，$y=-1$

●無理関数

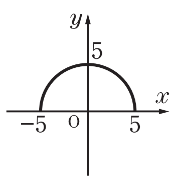
x と y の多項式 $f(x,\ y)$ に対して $f(x,\ y)=0$ を考える．このとき，x の関数 y のうちで分数（有理）関数でないものを**無理関数**という．



$y=\sqrt{x}$



$y=\sqrt{x+3}-2$



$y=\sqrt{25-x^2}$

▶左と中央のグラフは放物線の半分，右のグラフは半円を表している．

▶対応する $f(x,\ y)$ は左から順に

$f(x,\ y)=x^2-y$

$f(x,\ y)=x+3-(y+2)^2$

$f(x,\ y)=x^2+y^2-25$

●逆関数と合成関数

$y=f(x)$ を x に関する方程式とみる．これを解いて $x=g(y)$ が得られたとき，x と y を入れかえて得られる関数 $y=g(x)$ を $y=f(x)$ の**逆関数**といい $\boldsymbol{y=f^{-1}(x)}$ とかく．

$y=f(g(x))$ を $y=(f\circ g)(x)$ と表し，$f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という．

▶**逆関数のグラフ**は，もとの関数のグラフを**直線 $\boldsymbol{y=x}$ に関して対称**に描いたものになる．

逆関数 $f^{-1}(x)$ に対して，一般に $f^{-1}(x)\neq\dfrac{1}{f(x)}$

合成関数に対して，一般に $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$

例題

1 ●基本● 次の直線を方眼紙に描き，その方程式を求めなさい．

(1)　傾きが 2，y 切片が -1　(2)　傾きが -1，点 $(1,\ -2)$ を通る

(3)　2 点 $(-1,\ 3)$，$(2,\ -3)$ を通る

解　(1)　直線の方程式(i)より　$y=2x-1$

▶ p. 8 側注参照.

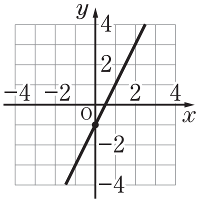
(2)　直線の方程式(ii)より　$y-(-2)=(-1)(x-1)$

よって　$y=-x-1$

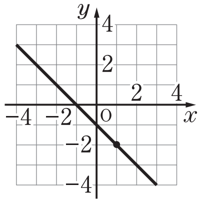
(3)　直線の方程式(iii)より

$$(2-(-1))(y-3)=((-3)-3)(x-(-1))$$

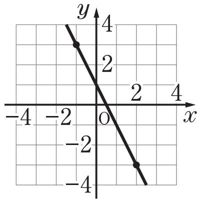
よって　$y=-2x+1$



(1)　$y=2x-1$



(2)　$y=-x-1$



(3)　$y=-2x+1$

2 ●基本● 次の放物線の方程式を求め，グラフを方眼紙に描きなさい．

(1)　軸が $x=-1$，頂点が $(-1,\ 2)$，y 軸との共有点が $(0,\ 1)$

(2)　x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸との共有点が $(0,\ -3)$

滑らかなグラフの描き方

滑らかなグラフを描くには，いくつかの適当な x の値に対して方程式より y の値を計算する．これから定まる点 $(x,\ y)$ を方眼紙にかき入れ，それらを滑らかな曲線で結べばよい．具体的には例題 6 の解答が詳しい．

解　(1)　放物線の方程式(ii)より　$y=a(x+1)^2+2$

y 軸との共有点が $(0,\ 1)$ であるので　$1=a(0+1)^2+2$

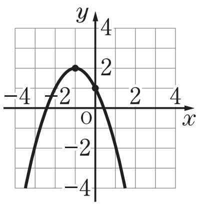
よって　$a=-1$　　よって，放物線の方程式は $y=-(x+1)^2+2$

(2)　放物線の方程式(iii)より　$y=a(x+1)(x-3)$

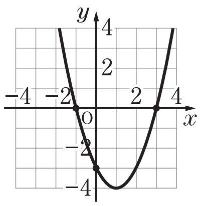
▶ p. 8 側注参照.

y 軸との共有点が $(0,\ -3)$ であるので　$-3=a(0+1)(0-3)$

よって　$a=1$　　よって，放物線の方程式は $y=(x+1)(x-3)$

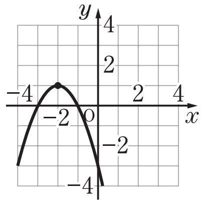


(1)　$y=-(x+1)^2+2$



(2)　$y=(x+1)(x-3)$

3 **●基本●** 放物線 $y=-x^2-4x-3$ の軸と頂点を求め，グラフを方眼紙に描きなさい．



解 $y=-x^2-4x-3=-(x^2+4x)-3$

$=-\{(x+2)^2-4\}-3$

$=-(x+2)^2+1$

軸は $x=-2$，頂点は $(-2,\ 1)$

▶放物線の方程式(ⅱ)と較べる．

4 **●基本●** 次の2次関数のグラフと x 軸との共有点の個数を求めなさい．

(1) $y=x^2-2x+1$　　(2) $y=-x^2-4x-3$

解 (1) 2次方程式 $x^2-2x+1=0$ の判別式は

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0$

よって，x 軸との共有点の個数は1．

(2) 2次方程式 $-x^2-4x-3=0$ の判別式は

$D=(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=4>0$

よって，x 軸との共有点の個数は2．

▶(2)のグラフは例題3のもの．図を見ても共有点の個数が解答のとおりであることがわかる．

5 **●基本●** $f(x)=3x-2$ とする．関数 $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，そのグラフを描きなさい．

解 $y=3x-2$ を x について解くと $x=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{2}{3}$ x と y を入れかえて逆関数は $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$ よって $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

逆関数のグラフの描き方でグラフを描く．

(1) 右表のように $y=3x-2$ 上の点を求める（図(1)）．

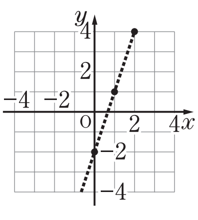
x	0	1	2
y	-2	1	4

(2) (1)の表の x 座標と y 座標の値を入れかえた点を方眼紙にかき入れる．

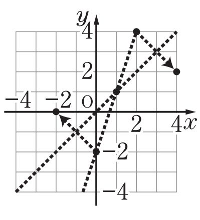
この点が逆関数のグラフ上の点になる（図(2)）．

x	-2	1	4
y	0	1	2

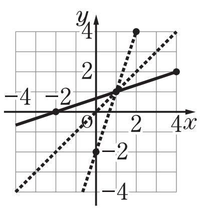
(3) (2)の点を結べば逆関数のグラフが描ける（図(3)）．



(1)



(2)



(3)

逆関数の式とそのグラフ

例題では $y=f(x)$ が x について解けた（y の関数として具体的にかきくだせた）が，そうでない場合，逆関数の式はどうなるのであろうか．

一般的に，関数の式の x と y を入れかえれば逆関数の式になる．逆関数ともとの関数のグラフは直線 $y=x$ に関して対称になる．

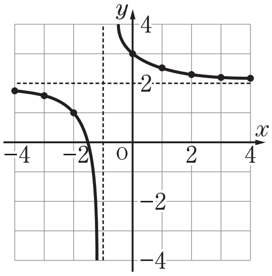
▶この例題では逆関数が1次関数なのでグラフは簡単に描ける．しかし，逆関数が簡単な関数でなくてもグラフは描ける．この描き方を解答例で紹介した．

▶もとの関数のグラフや直線 $y=x$ などはイメージしやすくするための補助線として点線でかき入れてある．

6 ■標準■ 次の関数のグラフを描きなさい．

(1)　$y=\dfrac{2x+3}{x+1}$　　(2)　$y=-\dfrac{x}{x-1}$

解　(1)　分子の x の係数に注目して式変形すると



$$y=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{x+1}+2$$

▶ $\begin{array}{r} 2 \\ x+1\overline{)2x+3} \\ \underline{2x+2} \\ 1 \end{array}$

これは $x=-1$，$y=2$ を漸近線とする双曲線を表す．

表にあるような $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ のグラフ上の点 $(x,\ y)$ を求める．

y の値は小数第 1 位（第 2 位を四捨五入）まで求める．

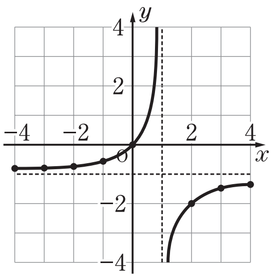
x	-4	-3	-2	0	1	2	3	4
y	1.7	1.5	1	3	2.5	2.3	2.3	2.2

これらの点を滑らかな曲線で結ぶ．その際に，この曲線が漸近線に近づくように描くことに注意する．

▶ y の値を小数第 1 位まで求めるのは，手描きでは第 2 位の数字が必要になるほど正確にグラフを描けないためである．また，表の点を方眼紙にかき入れるとき，目分量で大体の場所に点をかき入れられたらそれでよい（方眼紙の一目盛りを正確に 10 等分するような繊細さは要求されていない）．

▶表では異なる x の値に対して同じ y の値が現れている．実際に計算すればわかるが，正確な y の値は異なる x に対して同じになることはない．表の y の値はあくまでもグラフを描くための補助手段として用いるものであることに注意する．

(2)　分子の x の係数に注目して式変形すると



$$y=-\frac{x}{x-1}=-\frac{(x-1)+1}{x-1}$$

$$=-\frac{1}{x-1}-1$$

これは $x=1$，$y=-1$ を漸近線とする双曲線を表す．

表にあるような $y=-\dfrac{x}{x-1}$ のグラフ上の点 $(x,\ y)$ を求める．

y の値は小数第 1 位（第 2 位を四捨五入）まで求める．

x	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
y	-0.8	-0.8	-0.7	-0.5	0	-2	-1.5	-1.3

これらの点を滑らかな曲線で結ぶ．その際に，この曲線が漸近線に近づくように描くことに注意する．

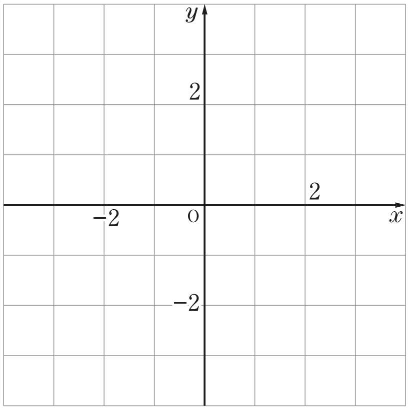
練習問題

1 **●基本●**　次の直線を方眼紙に描いた後，その直線の方程式を求めなさい．

(1)　傾きが 2，y 切片が -1

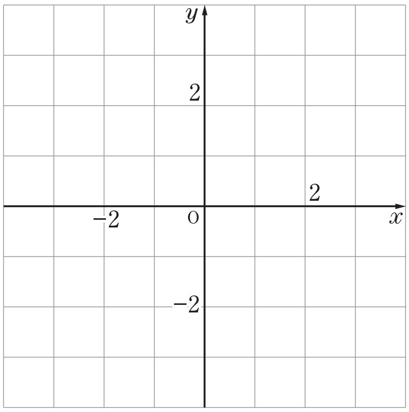
(2)　傾きが $\frac{1}{3}$，点（-2，-1）を通る

(3)　2 点（-2，2），（2，-3）を通る



2 **●基本●**　次の放物線の方程式を求めなさい．その後，方程式を用いて表の放物線上の点を決定し，これらの点を滑らかに結んでグラフを方眼紙に描きなさい．

(1)　軸が $x=-1$，頂点が $(-1,\ -2)$，y 軸との共有点が（0，-1）



表：放物線上の点

x	-3	-2	-1	0	1
y			-2	-1	

ヒント① 直線が通る点を方眼紙にかき入れてから直線を引く．傾きの図形的意味に注意する．

ヒント② グラフを描くには，方程式を用いて与えられた点以外の点をいくつかを求め，それらを滑らかな曲線で結ぶ．